A totálisan differenciálható függvény megváltozása közelíthető differenciáljával, a független változók megváltozásának homogén lineáris függvényével. Például hibaszá-mít ásnál alkalmazzuk. Egyéb jelölések.

$$df(\underline{x}, \underline{\Delta x}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{x})\Delta x_i$$

$$df(\underline{x}, \underline{dx}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{x})dx_i$$

Indoklás az utóbbi jelöléshez: ha az $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ koordináta függvényről van szó, akkor $df = d(x_i) = dx_i = 1 \cdot \Delta x_i$.

Felület érintősíkja

A kétváltozós függvényt felülettel szemléltettük, ezért a $\Delta f \approx df$ közelítésnek kétváltozós függvény esetén geometriai tartalmat adhatunk.

Legyen a kétváltozós $f(x, y)$ függvény (totálisan) deriválható a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban! Tekintsük a $z = f(x, y)$ által meghatározott felület P_0 feletti $P_0^* = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pontját! Az előzőekben láttuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \\ \approx f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = df((x_0, y_0), (h, k)). \end{aligned}$$

Vagy más jelölésekkel:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ jelölés esetén:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Tehát

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ennek geometriai tartalma, hogy a $z = f(x, y)$ felületet a

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

síkkal közelítjük, ha $x - x_0$ és $y - y_0$ kicsi. Tehát az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pont egy elég kicsiny sugarú környezetében f grafikonja közelítőleg ezzel a síkkal helyettesíthető.

Ennek a síknak a neve érintősík.

Definíció *A* totálisan *deriválható f kétváltozós függvény* (x_0, y_0) *ponthoz* tartozó érintősíkjának *nevezzük az*

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

egyenlettel adott síkot.

Az $\underline{n} = (a, b, c) = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ normálvektorú, (x_0, y_0, z_0) ponton áthaladó sík egyenlete:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ezzel összevetve látjuk, hogy az érintősík átmegy a $P_0^* = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi ponton és normálvektora:

$$\underline{n} = f'_x(x_0, y_0)\underline{i} + f'_y(x_0, y_0)\underline{j} - \underline{k} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

Megjegyzés *Már tudjuk, hogy az érintősík tartalmazza két felületi görbe érintő-egyenesét. (Lásd parciális deriváltak geometriai tartalmát!) Az is belátható, hogy min-den, a* $P_0^* = (x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ *felületi ponton áthaladó, érintővel rendelkező felületi görbe érintőegyenese benne van ebben a síkban.*

Megjegyzés *Tehát összefoglalva a $\Delta f \approx df$ közelítés geometriai tartalma: $n = 1$ esetén érintőegyenessel való közelítés; $n = 2$ esetén: érintősíkkal való közelítés.*

Példa *Legyen* $f(x, y) = y^{2x}$ *és* $P_0 = (-1, 1)$*!*

1. *Írja fel az f függvény P_0 pontbeli gradiensét, ha az létezik!*
2. $df((-1, 1), (h, k)) = ?$
3. *Írja fel a P_0 ponthoz tartozó érintősík egyenletét!*

Megoldás: $f(x, y) = y^{2x} = e^{2x \ln y}$, *($y > 0$, x tetszőleges).*

1. $f'_x = e^{2x \ln y} 2 \ln y = y^{2x} 2 \ln y$, *és* $f'_y = 2xy^{2x-1}$. *A parciálisak léteznek és folytonosak* K_{P_0}*-ban, ezért létezik* $\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(-1, 1)\underline{i} + f'_y(-1, 1)\underline{j} = 0\underline{i} - 2\underline{j} = -2\underline{j}$.
2. $df((-1, 1), (h, k)) = f'_x(-1, 1)h + f'_y(-1, 1)k = -2k$
3. $$f'_x(-1, 1)\big(x - (-1)\big) + f'_y(-1, 1)\big(y - 1\big) - \big(z - f(-1, 1)\big) = 0,$$

   behelyettesítve

   $$0 \cdot \big(x + 1\big) + (-2)\big(y - 1\big) - \big(z - 1\big) = 0, \text{ azaz } 2y + z = 3.$$

Iránymenti derivált

Az értelmezési tartomány $\underline{a}$ pontjában az $\underline{e}$ irányban adja meg a függvény változási sebességét. Feltételezzük, hogy $|\underline{e}| = 1$, és $\underline{e} \parallel \underline{v}$ jelölés most nem csak a vektorok azonos állását, hanem azonos irányát is fogja jelenteni. Vagyis, ha $\underline{v} \neq \underline{0}$, akkor

$$\underline{e} \parallel \underline{v} \Longleftrightarrow \exists \lambda \geq 0 : \underline{e} = \lambda \underline{v},$$

Definíció *Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek és $|\underline{e}| = 1$! Ha létezik*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} \in \mathbb{R},$$

akkor azt mondjuk, hogy f deriválható $\underline{a}$-ban az $\underline{e}$ irány mentén.

Ekkor a fenti határértéket az f $\underline{a}$-beli $\underline{e}$ iránymenti deriváltjának nevezzük, és a

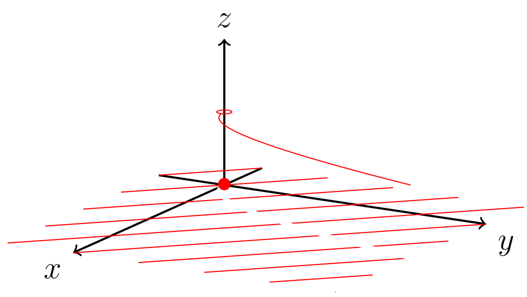
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} \quad \textit{illetve} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{\underline{a}}$$

jelöléseket használjuk.

Tétel (Elégséges tétel iránymenti derivált létezésére) *Ha f totálisan deri-válható $\underline{a}$-ban, akkor tetszőleges $\underline{e}$ egységvektor mentén létezik az iránymenti derivált, és*

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}.$$

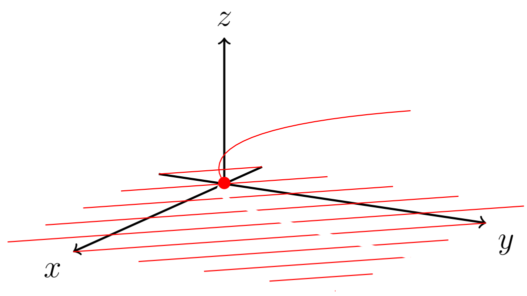
Megjegyzés *Ha egy pontban minden irányban létezik az iránymenti derivált, ak-kor sem biztos, hogy a függvény ebben a pontban totálisan deriválható. Például az*



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \textit{ha } 0<x=\sqrt{y},\\ 0, & \textit{máskor}\end{cases}$$

függvény az origóban minden irány mentén deriválható, sőt minden iránymenti deriváltja 0, de nem folytonos, így nem is deriválható totálisan.

Jegyezzük meg, hogy az



$$f(x,y)=\begin{cases}x, & \textit{ha } 0<x=\sqrt{y},\\ 0, & \textit{máskor}\end{cases}$$

függvény még folytonos is, mégis hiába 0 *minden iránymenti deriváltja, nem deriválható totálisan.*

Speciális képletek:

1. $n=2$ és $\underline{e}$ α szöget zár be $\underline{i}=(1,0)$-val. Ekkor $f(x,y)$ jelöléssel

$$\underline{e}=\cos\alpha\underline{i}+\sin\alpha\underline{j}=(\cos\alpha,\sin\alpha),$$

$$\mathrm{grad}f=f'_x\underline{i}+f'_y\underline{j}=(f'_x,f'_y),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cdot\sin\alpha.$$

2. $n=3$ és az $\underline{e}$ vektor tengelyekkel bezárt szögei: α,β,γ. Ekkor $f(x,y,z)$ jelöléssel

$$\underline{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\qquad\text{(iránykoszinuszok)}$$

és

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}=f'_x(P_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(P_0)\cdot\cos\beta+f'_z(P_0)\cdot\cos\gamma.$$

Megjegyzés *Geometriai tartalom $n = 2$ esetén:*

Tekintsük azt a felületi görbét, melyet a $z = f(x, y)$ felületből az (x, y) síkra merőleges sík metsz ki, melynek nyomvonala az (x_0, y_0) ponton áthaladó $\underline{e}$ irányú egyenes. E felületi görbéhez az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pontban húzzunk érintőegyenest, ennek irányát jelölje $\underline{w}$! (Irányítás olyan, hogy $\gamma = (\underline{w}, \underline{e})\measuredangle$ hegyesszög legyen.) Ekkor igaz az alábbi:

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}, \qquad \operatorname{tg}\gamma = \lim_{t\to 0+} \operatorname{tg}\gamma' = \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Megjegyzés *$n = 2$ esetén az érintő benne van az érintősíkban.*

Ugyanis: (x_0, y_0, z_0) pont közös és $\underline{n} \perp \underline{w}$ megmutatható.

$$\underline{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

$$\underline{w} = \underline{e} + \operatorname{tg}\gamma\underline{k} = \left(\cos\alpha, \sin\alpha, \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}\right) =$$
$$= \left(\cos\alpha, \sin\alpha, f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha\right).$$

Így valóban $\underline{nw} = 0$.

A gradiensvektor tulajdonságai

(Két- és háromváltozós esetre, itt geometriai tartalom is van.)

Tétel *Ha f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor a maximális iránymenti derivált ir ánya* $\operatorname{grad} f(\underline{a})$, *értéke:* $|\operatorname{grad} f(\underline{a})|$.

Bizonyítás. 3.71. Tételben már láttuk, hogy $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$. Ebből

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot \cos\varphi.$$

Így $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ maximális, ha $\cos\varphi = 1$, azaz ha $\varphi = 0$, tehát $\underline{e} \parallel \operatorname{grad} f(\underline{a})$, pontosabban

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|} \qquad \text{és} \qquad \max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|.$$

□

Tehát a grad vektor irányában elmozdulva nő leggyorsabban a függvényérték.

Hasonló mondható minimumra is, azaz a −grad vektor irányában elmozdulva csökken leggyorsabban a függvényérték.

Megjegyzés *Ha f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor a minimális iránymenti derivált irányа* $-\mathrm{grad} f(\underline{a})$*, értéke:* $-|\mathrm{grad} f(\underline{a})|$.

Tétel *Legyen f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban. Ekkor*

1. $\mathrm{grad} f(\underline{a})$ *ortogonális az* $f(\underline{x}) = f(\underline{a})$ *szintalakzatra;*

2. *ha* $\mathrm{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{0}$*, akkor a növekvő paraméterű szintalakzatok irányába mutat.*

Útmutatás:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$$

1. *Ha $\underline{e}$ párhuzamos a szintalakzat érintőjével, akkor*

$$\Delta f = 0 \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = 0 \Longrightarrow \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} = 0 \Longrightarrow \mathrm{grad} f(\underline{a}) \perp \underline{e}.$$

2. *Ha a növekvő paraméterű szintalakzat felé mozdulunk el:*

$$\Delta f > 0 \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} > 0 \Longrightarrow \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} > 0 \Longrightarrow (\mathrm{grad} f(\underline{a}), \underline{e})\measuredangle < \frac{\pi}{2}$$

tehát $\mathrm{grad} f(\underline{a})$ *is a növekvő paraméterű szintalakzat felé mutat.* **.**

Példa

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1, \qquad P_0 = (1, -1, 0)$$

1. $\mathrm{grad} f(P_0) =?$, $\quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} =?$ *ha* $\underline{e} \parallel \underline{v} = (2, 1, 3)$

2. *Adja meg* $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ *értékét és irányát!*

3. *Írja fel a P_0 ponton áthaladó szintfelület egyenletét és annak P_0-beli érintősíkját!*

Megoldás: *1.* $f'_x = 4x^3$, $f'_y = 4y^3$, $f'_z = 4z^3$. *A parciálisak mindenütt léteznek és folytonosak, ezért a gradiens mindenütt létezik:*

$$\mathrm{grad} f = f'_x\underline{i} + f'_y\underline{j} + f'_z\underline{k} \Longrightarrow \mathrm{grad} f(P_0) = 4\underline{i} - 4\underline{j} = (4, -4, 0).$$

Mivel $|\underline{v}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$*, ezért* $\underline{e} = \frac{2}{\sqrt{14}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\underline{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\underline{k}$ *és*

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} = \big(4\underline{i} - 4\underline{j}\big) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\underline{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\underline{k}\right) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

2. $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = |\mathrm{grad} f(P_0)| = \sqrt{32}$, *és iránya:* $\underline{e} = \frac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = \frac{4}{\sqrt{32}}\underline{i} - \frac{4}{\sqrt{32}}\underline{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.

3. A szintfelület egyenlete:

$$f(x,y,z) = c.$$

Mivel $f(1,-1,0) = 3$, *ezért* $c = 3$, *tehát a kérdezett szintfelület:*

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 3.$$

Mivel a gradiens merőleges a szintalakzatra, az érintősík normálvektorára fennáll, hogy

$$\underline{n} \parallel \mathrm{grad} f(P_0) = 4\underline{i} - 4\underline{j} \Longrightarrow \underline{n} := \underline{i} - \underline{j},$$

és a sík átmegy az adott P_0 *ponton, így egyenlete:*

$$\mathrm{grad} f(P_0)\,(P - P_0) = 0,$$

tehát

$$(x-1) - (y-(-1)) = 0.$$

Lagrange-féle középértéktétel

Lagrange-féle középértéktétel egyváltozós függvényre:

$$\exists 0 < \vartheta < 1 : \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi) = f'(x_0 + \vartheta h),$$

azaz

$$\exists 0 < \vartheta < 1 : f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0+\vartheta h) \cdot h = \mathrm{d}f(x_0+\vartheta h, h).$$

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel) *Legyen* D_f konvex, *és f (totálisan) de-riválhat ó, és legyen* $\underline{a}$ *belső pontja* D_f *-nek. Ekkor* $\forall$ *olyan* $\underline{h}$*-hoz, melyre* $\underline{x}_0 + \underline{h} \in D_f$: $\exists 0 < \vartheta < 1$ *úgy, hogy*

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}) \cdot h_i = \mathrm{d}f(\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}, \underline{h})$$

Megjegyzés $\underline{x}_0 + \vartheta h$ *az* $\underline{x}_0$ *és* $\underline{x}_0 + \underline{h}$ *pontok által meghatározott egyenes szakasz egy pontja, így a konvexitás miatt* $\underline{x}_0 + \vartheta h \in \underline{D}$.