Megoldás:
Az első és a negyedik állítás az intervallum-felező módszer definíciója miatt igaz.

Ugyancsak emiatt a második állítás hamis.

A harmadik állítás a húrmódszer leírása miatt igaz. Tehát az első, a harmadik és a negyedik állítás igaz, a második pedig hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {DEG-005}

☐ A Newton-iteráció képlete a gyök új közelítésére:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}.$$

☒ A Newton-iteráció képlete a gyök új közelítésére:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

☐ Banach-féle fixpont iterációt mindig használhatunk, hiszen a módszer által igényelt kontrakció pontosan az a függvény, melynek zérushelyeit keressük.

☒ A Banach-féle fixpont iterációhoz szükségünk van egy f segédfüggvényre, mely folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható az (a, b) intervallumon és $|f'(x)| < 1, \quad \forall x \in (a, b)$.

Megoldás:
A Newton-iteráció leírásából egyértelműen következik, hogy az első állítás hamis, a második igaz.

A Banach-féle fixpont-iteráció leírásából következik, hogy a negyedik állítás igaz és a harmadik hamis. Tehát a második és negyedik állítás igaz, a többi hamis.

4.2. Deriválási szabályok

E lecke befejezése után a hallgató:

- deriválni tud bármilyen (deriválható) explicit módon megadott függvényt,
- ismeri és alkalmazni tudja az inverz függvény deriválási szabályát,
- érti az összefüggést a folytonosság, a Lipschitz-tulajdonság és a differenciálhatóság között,
- egyoldali deriváltat tud számolni és érti a jelentését,
- magasabbrendű deriváltat tud számolni (ha az létezik).

4.2.1. Elemi függvények deriváltja

A derivált függvény fogalma

Definíció: Derivált függvény

Ha tekintjük egy f függvény D_f-fel jelölt értelmezési tartományának összes olyan x_0 pontját, ahol az $f \in D\{x_0\}$ (azaz f deriválható x_0-ban) , és ezekben a pontokban hozzárendelési szabályként az f függvény pontbeli deriváltját adjuk meg, akkor az f függvény derivált függvényét kapjuk. Képletekkel megfogalmazva ugyanezt: amennyiben az {Fde:derivalt.fv}

$$\{x_0 \in D_f \mid f \in D\{x_0\}\} \neq \emptyset,$$

az

$$f' : \{x_0 \in D_f \mid f \in D\{x_0\}\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

függvényt az f **derivált függvényének** nevezzük.

A $\sin x$, $\cos x$ és e^x deriváltja

Tétel: Konstans függvény deriváltja

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c$ konstans függvény deriválható $\mathbb{R}$-en és {Fte:konst.fv.der}

$$c' = 0.$$

Bizonyítás:

A derivált függvény definíciója értelmében

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad c' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Tétel: Az x^α, $\sin x$, $\cos x$ és e^x függvények deriváltjai

Az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ és $g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos x, \quad k(x) = \mathrm{e}^x$ függvények deriválhatók értelmezési tartományukon és a derivált függvények hozzárendelési szabálya: {Fte:h.si.co.ex.fv.der}

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}; \\ (\sin x)' &= \cos x; \\ (\cos x)' &= -\sin x; \\ (\mathrm{e}^x)' &= \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Bizonyítás:

1. Az első képlet igaz $x \in \mathbb{R}$ esetén is, amennyiben az α olyan szám, melyre x^α, illetve $x^{\alpha-1}$ értelmezettek $\mathbb{R}$-ben.

Az $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ képletet csak az $\alpha \in \mathbb{N}$ esetben igazoljuk, amit az

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

alakban is írhatunk. Külön megnézzük az $n = 1$ esetet:

$$x' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = 1x^{1-1},$$

amit bizonyítanunk kellett, ha $n = 1$. Most pedig $\forall x \in \mathbb{R}$ és $\forall n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ esetén használjuk a

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosságot az $a = x + h$ és $b = x$ helyettesítéssel, valamint a derivált függvény definícióját az $f(x) = x^n$ esetén és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}])}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} = \\
&= nx^{n-1},
\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

2. A $(\sin x)' = \cos x$ képlet bizonyításához a derivált függvény definícióját használjuk az $f(x) = \sin x$ esetén, továbbá a

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

azonosságot, valamint a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

nevezetes függvényhatárértéket és kapjuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \frac{2x+h}{2} = \\
&= \cos x,
\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett.

3. Hasonló módon igazoljuk a $(\cos x)' = -\sin x$ képletet. A bizonyításhoz a derivált függvény definícióját használjuk az $f(x) = \cos x$ esetén, továbbá a

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

azonosságot, valamint a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

nevezetes függvényhatárértéket és kapjuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{2}{h} \sin\frac{x+h+x}{2} \sin\frac{x+h-x}{2} = \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\frac{2x+h}{2} = \\ &= -\sin x,\end{aligned}$$

3. Az $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ képlet bizonyításához a derivált függvény definícióját használjuk az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén és a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

nevezetes függvényhatárértéket, és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \cdot \frac{(\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \\ &= \mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

Megjegyzés: Az $\frac{1}{x}$ és $\sqrt{x}$ deriváltjai

Amennyiben az x^α függvény deriváltját megadó tétel első képletébe az $\alpha = -1$, illetve $\alpha = \frac{1}{2}$ speciális eseteket tekintünk, akkor a {Fme:1.per.x.n.x}

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

valamint a

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0, \infty)$$

képleteket kapjuk.

A függvényműveletek és a deriválás

Tétel: Összeg-, szorzat-, hányadosfüggvény deriváltja

Ha az f és g differenciálható függvények az (a, b) intervallumon, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ konstans esetén a cf, valamint az $f+g$, fg, és amennyiben értelmezhető az (a, b) intervallumon, az $\frac{f}{g}$ is differenciálható függvények és {Fte:ossz.szorz.hany.fv.der}

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$;
2. $[cf(x)]' = cf'(x)$;
3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4.
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bizonyítás:
A bizonyítás mindegyik részében használjuk

- azt a feltételt, hogy f és g differenciálható függvények az (a, b) intervallumon,
- derivált függvény definícióját,
- a függvényműveletek és a határérték tételt.

1.
$$\begin{aligned}[f(x)+g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-[f(x)+g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

2. Tetszőlegesen rögzített c valós konstans esetén
$$\begin{aligned}[cf(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\ &= cf'(x).\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} = \\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

A láncszabály - az összetett függvény deriválási szabálya

Tétel: Összetett függvény deriváltja (láncszabály)
Ha az f és g függvényeknek létezik az $f \circ g$ kompozíciója és g differenciálható az x_0 helyen, valamint f differenciálható a $g(x_0)$ helyen, akkor $f \circ g$ is deriválható az x_0 helyen és {Fte:ossz.fv.der}

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Bizonyítás:
Az x_0 pontbeli differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazását hívjuk segítségül, azaz a g függvény differenciálhatósága az x_0 helyen, valamint az f differenciálhatósága a $g(x_0)$ helyen a következőkkel ekvivalens:

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0),$$

valamint

$$f(u) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(u - g(x_0)) + \varepsilon_2(u)(u - g(x_0)),$$

ahol

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0 \text{ és } \lim_{u \to g(x_0)} \varepsilon_2(u) = 0.$$

Emiatt felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) &= [f'(g(x_0)) + \varepsilon_2(g(x))](g(x) - g(x_0)) = \\ &= [f'(g(x_0)) + \varepsilon_2(g(x))][g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)] \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(g(x))g'(x_0)(x - x_0) + \\ &+ f'(g(x_0))\varepsilon_1(x)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(g(x))(x - x_0), \end{aligned}$$

ahonnan, ha elosztunk $(x - x_0)$-val és felhasználjuk azt is, hogy ha $x \to x_0$, akkor $\varepsilon_1(x) \to 0$ és $\varepsilon_2(g(x)) \to 0$, kapjuk, hogy

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Megjegyzés:
Az összetett függvény deriválási képletét általánosan is felírhatjuk:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

A tg, ctg és az exponenciális függvény deriválási szabálya

Mintafeladat: A tg, ctg és az exponenciális függvény deriváltja
Igazoljuk, hogy a tg, ctg és az a^x exponenciális függvény (ahol $a > 0$ és $a \neq 1$) differenciálhatók az értelmezési tartományukon és {Fmi:tg.ctg.ax.der}

1. $$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
2. $$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

3.
$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Megoldás:

Javaslat:

Kezdjük az 1. és 2. képlet bizonyításával, mert ezek hasonlóan történnek. Írjuk fel a tangens- és kotangens függvények definícióját.

Lépés:

A tangens- és kotangens függvények definíciója szerint

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

és

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Javaslat:

Használjuk a hányados függvény deriválási szabályát.

Lépés:

Mivel a differenciálható függvények hányadosa is differenciálható, a tg és ctg függvények értelmezési tartományukon differenciálhatóak. A hányadosfüggvény deriválási szabálya miatt

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

és

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

amit bizonyítani kellett.

Javaslat:

Írjuk fel az a alapú exponenciális függvényt az e alapú exponenciális függvény segítségével, majd használjuk az e^x deriválási szabályát, valamint a láncszabályt.

Lépés:

Az e alapú exponenciális- és logaritmus függvény egymás inverzei, ezért

$$a^x = \mathrm{e}^{\ln a^x} = \mathrm{e}^{x \ln a},$$

így deriváláskor a láncszabály és e^x derivált képletének használatával kapjuk, hogy

$$(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a}(x \ln a)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

4.2.2. Inverz függvény deriváltja

Az inverz függvény deriválási szabálya

Tétel: Inverz függvény deriválási képlete

Ha az f függvény szigorúan monoton és differenciálható az értelmezési tartomány egy t belső pontjában és $f'(t) \neq 0$, akkor f^{-1} is differenciálható az $x = f(t)$ helyen és {Fte:inv.fv.der}

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(t)}.$$

Bizonyítás:
Belátjuk a tételt az értelmezési tartomány tetszőlegesen rögzített t_0 belső pontjára, azaz bebizonyítjuk, hogy amennyiben f szigorúan monoton és differenciálható t_0-ban és $f'(t_0) \neq 0$, akkor f^{-1} is differenciálható az $x_0 = f(t_0)$ helyen és

$$[f^{-1}(x_0)]' = \frac{1}{f'(t_0)}.$$

Az invertálhatóságra adott elégséges feltétel teljesül, tehát van inverz függvény és az inverz függvény is folytonos x_0-ban. Vezessük be az $x = f(t)$ és $t = f^{-1}(x)$ jelölést. Felhasználva a pontbeli derivált definícióját felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}[f^{-1}(x_0)]' = [f^{-1}(f(t_0))]' &= \lim_{x \to f(t_0)} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(t_0))}{x - f(t_0)} = \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}} = \\ &= \frac{1}{f'(t_0)}.\end{aligned}$$

A logaritmus és az inverz trigonometrikus függvények deriválási szabálya

Mintafeladat: A $\log_a x$ függvény deriváltja
Igazoljuk, hogy az a alapú logaritmus függvény differenciálható a $(0, \infty)$ intervallumon és {Fmi:log.fv.der}

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Megoldás:
Javaslat:
Használjuk az inverz függvény deriválási képletét az a alapú exponenciális függvényre.
Lépés:
Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x, \text{ ahol } a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$$

és használjuk az $x = f(t) = a^t$ jelölést. Az inverz függvény deriválási képlete és az exponenciális függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in (0, \infty) \quad [f^{-1}(x)]' = (\log_a x)' = \frac{1}{f'(t)}.$$

Javaslat:
Írjuk át a $\frac{1}{f'(t)}$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba.
Lépés:

$$\forall x \in (0, \infty) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{a^t \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Megjegyzés:
Az előző mintafeladat speciális esete (ha $a = \mathrm{e}$):

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Mintafeladat: Az inverz trigonometrikus függvények deriváltja

Igazoljuk, hogy az $\arcsin x$, $\arccos x$ függvények differenciálhatók a $(-1,1)$ intervallumon, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ függvények differenciálhatók $\mathbb{R}$-en és {Fmi:inv.trig.fv.der}

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Megoldás:

Javaslat:

Használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_1(x) = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arcsin függvény) és használjuk az $x = f_1(t) = \sin t$ jelölést.

Lépés:

Az inverz függvény deriválási képlete és a szinusz függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in (-1,1) \quad [f_1^{-1}(x)]' = (\arcsin x)' = \frac{1}{f_1'(t)} = \frac{1}{\cos t}.$$

Javaslat:

Írjuk át a $\frac{1}{\cos t}$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba és használjuk, hogy $\forall t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ esetén $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$.

Lépés:

$$\forall x \in (-1,1) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Javaslat:

A második képlet bizonyításához az előzőhöz teljesen hasonlóan használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_2(x) = \cos x, \quad x \in (0,\pi)$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arccos függvény) és használjuk az $x = f_2(t) = \cos t$ jelölést.

Lépés:

Az inverz függvény deriválási képlete és a koszinusz függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in (-1,1) \quad [f_2^{-1}(x)]' = (\arccos x)' = \frac{1}{f_2'(t)} = -\frac{1}{\sin t}.$$

Javaslat:

Írjuk át a $-\frac{1}{\sin t}$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba és használjuk, hogy $\forall t \in (0,\pi)$ esetén $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$.

Lépés:

$$\forall x \in (-1,1) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sin t} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Javaslat:
A harmadik képlet bizonyításához használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_3(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arctg függvény) és használjuk az $x = f_3(t) = \operatorname{tg} t$ jelölést.
Lépés:
Az inverz függvény deriválási képlete és a tangens függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad [f_3^{-1}(x)]' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{f_3'(t)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \cos^2 t.$$

Javaslat:
Írjuk át a $\cos^2 t$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba és használjuk, hogy

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}$$

képletet.
Lépés:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Javaslat:
A negyedik képlet bizonyításához használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_4(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0,\pi)$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arcctg függvény) és használjuk az $x = f_4(t) = \operatorname{ctg} t$ jelölést is.
Lépés:
Az inverz függvény deriválási képlete és a kotangens függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad [f_4^{-1}(x)]' = (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{f_4'(t)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 t}} = -\sin^2 t.$$

Javaslat:
Írjuk át a $-\sin^2 t$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba és használjuk, hogy

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}$$

képletet.
Lépés:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2 t = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = -\frac{1}{1+x^2}$$

4.2.3. Hiperbolikus függvények és inverzeik deriváltja

A sh, ch, th és cth függvények deriváltja

Mintafeladat: A hiperbolikus függvények deriváltja

Igazoljuk, hogy az $\operatorname{sh} x$, ch és th függvények differenciálhatók az $\mathbb{R}$-en, a cth differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-ban és {Fmi:hip.fv.der}

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad & (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad & (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad & (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad & (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \end{aligned}$$

Megoldás:

Javaslat:

Az első képlet bizonyításához használjuk a szinusz hiperbolikus függvény definícióját és a láncszabályt.

Lépés:

$$\operatorname{sh} x = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}(-1)] = \operatorname{ch} x.$$

Javaslat:

A második képlet bizonyításához használjuk a koszinusz hiperbolikus függvény definícióját és a láncszabályt.

Lépés:

$$\operatorname{ch} x = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}(-1)] = \operatorname{sh} x.$$

Javaslat:

A harmadik képlet bizonyításához használjuk a tangens hiperbolikus függvény definícióját és a hányadosfüggvény deriválási szabályát.

Lépés:

$$\operatorname{th} x = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Javaslat:

A negyedik képlet bizonyításához használjuk a kotangens hiperbolikus függvény definícióját és a hányadosfüggvény deriválási szabályát.

Lépés:

Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén felírhatjuk, hogy

$$\operatorname{cth} x = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Az arsh, arch, arth és arcth függvények deriváltja

Mintafeladat: Az inverz hiperbolikus függvények deriváltja

Igazoljuk, hogy {Fmi:inv.hip.fv.der}

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \\ \forall x \in (1,\infty) \quad (\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \\ \forall x \in (-1,1) \quad (\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}; \\ \forall x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \quad (\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Megoldás:

Javaslat:

Az első képlet bizonyításához használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_1(x) = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arsh függvény) és használjuk az $x = f_1(t) = \operatorname{sh} t$ jelölést.

Lépés:

Az inverz függvény deriválási képlete és a szinusz hiperbolikusz függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad [f_1^{-1}(x)]' = (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{f_1'(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Javaslat:

Írjuk át a $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba és használjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}$.

Lépés:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Javaslat:

A második képlet bizonyításához használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_2(x) = \operatorname{ch} x, \quad x \in (0,\infty)$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arch függvény) és használjuk az $x = f_2(t) = \operatorname{ch} t$ jelölést.

Lépés:

Az inverz függvény deriválási képlete és a koszinusz hiperbolikusz függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in (1,\infty) \quad [f_2^{-1}(x)]' = (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{f_2'(t)} = \frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Javaslat:

Írjuk át a $\frac{1}{\operatorname{sh} t}$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba és használjuk, hogy tetszőleges $t \in (0,\infty)$ esetén $\operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}$.

Lépés:

$$\forall x \in (1,\infty) \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Javaslat:
A harmadik képlet bizonyításához használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_3(x) = \operatorname{th} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arth függvény) és használjuk az $x = f_3(t) = \operatorname{th} t$ jelölést.
Lépés:
Az inverz függvény deriválási képlete és a tangens hiperbolikusz függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in (-1,1) \quad [f_3^{-1}(x)]' = (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{f_3'(t)} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}} = \operatorname{ch}^2 t.$$

Javaslat:
Írjuk át a $\operatorname{ch}^2 t$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba.
Lépés:
A hiperbolikus függvények 14. azonossága kimondja, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 t},$$

így kapjuk, hogy

$$\forall x \in (-1,1) \quad (\operatorname{arth} x)' = \operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 t} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Javaslat:
A negyedik képlet bizonyításához használjuk az inverz függvény deriválási képletét az

$$f_4(x) = \operatorname{cth} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvényre (hiszen ennek az inverze az arcth függvény) és használjuk az $x = f_4(t) = \operatorname{cth} t$ jelölést.
Lépés:
Az inverz függvény deriválási képlete és a kotangens hiperbolikusz függvény deriválási szabálya miatt

$$\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \quad [f_4^{-1}(x)]' = (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{f_4'(t)} = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}} = -\operatorname{sh}^2 t.$$

Javaslat:
Írjuk át a $\operatorname{sh}^2 t$ kifejezést csak x-et tartalmazó alakba.
Lépés:
A hiperbolikus függvények 17. azonossága kimondja, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{\operatorname{cth}^2 t - 1},$$

így kapjuk, hogy

$$\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \quad (\operatorname{arcth} x)' = -\operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2 t} = \frac{1}{1 - x^2},$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés: Derivált táblázat

Az eddigi eredményeinket egy táblázatban foglalhatjuk össze, melyben az első oszlop az f deriválandó függvény, a második oszlop a derivált függvény, míg a harmadik az f' derivált függvény értelmezési tartománya, azaz a halmaz, melyen az f függvény deriválható. {Fme:der.tablazat}

Ide jön (a megjegyzésbe) a derivált táblázat

4.2.4. Explicit alakban megadott függvény deriváltfüggvényének kiszámítása

A deriváltfüggvény kiszámítása

Mintafeladat:
Számítsuk ki az

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2} \sin \sqrt{x+3}, \quad x \geq -3$$

függvény deriváltját.

Megoldás:
Javaslat:
Gondoljuk meg, melyek azok a derivált képletek, melyekre a feladatban szükség lesz.
Lépés:
A derivált táblázat következő képleteire lesz szükségünk:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad (\sin x)' = \cos x, \text{ valamint } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Javaslat:
A láncszabályt használva, számítsuk ki, mennyi az e^{x^2+2} deriváltja.
Lépés:

$$(\mathrm{e}^{x^2+2})' = \mathrm{e}^{x^2+2}(x^2+2)' = 2x\mathrm{e}^{x^2+2}.$$

Javaslat:
A láncszabályt használva, számítsuk ki, mennyi az $\sin \sqrt{x+3}$ deriváltja.
Lépés:

$$(\sin \sqrt{x+3})' = (\cos \sqrt{x+3})(\sqrt{x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cos \sqrt{x+3}.$$

Javaslat:
A szorzat függvény deriválási szabályát használva (a szorzótényezők deriváltjait ismerve), adjuk meg a derivált függvényt.
Lépés:

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+2} \sin \sqrt{x+3} + \mathrm{e}^{x^2+2} \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cos \sqrt{x+3}, \quad x \in (-3, \infty).$$

Megjegyezzük, hogy amint gördülékenyen megy a deriválás, a feladatot nem szükséges ennyire szétdarabolni, azonnal elkezdhetjük számolni a derivált függvényt.

Mintafeladat:
Számítsuk ki az

$$f(x) = 10^{x^3} \lg \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+7}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény deriváltját.

Megoldás:

Javaslat:

Gondoljuk meg, melyek azok a derivált képletek, melyekre a feladatban szükség lesz.

Lépés:

A derivált táblázat következő képleteire lesz szükségünk:

$$(10^x)' = 10^x \ln 10, \quad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ valamint } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Javaslat:

A láncszabályt, valamint a szorzat függvény deriválási szabályát használva, számítsuk ki a derivált függvényt (nem kötelező felírni külön minden szorzótényező deriváltját, mehet rögtön a szorzat deriválása).

Lépés:

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10^{x^3}(\ln 10)(3x^2)\lg\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+7}}+ \\ &+ 10^{x^3}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+7}}\ln 10}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+7}}}\right)\frac{2x(x^2+7)-2x(x^2+1)}{(x^2+7)^2} = \\ &= 10^{x^3}(\ln 10)(3x^2)\lg\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+7}}+ \\ &+ \frac{10^{x^3}6x}{\ln 10}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+7)}. \end{aligned}$$

A logaritmikus derivált

Megjegyzés: A logaritmikus derivált

Ha az explicit függvény képlete olyan, hogy az alapban is és a kitevőben is szerepel az x, akkor az x szerint történő deriválás előtt át kell írnunk a függvényt olyan alakba, ahol csak a kitevő tartalmazza az ismeretlent. Ehhez az {Fme:log.der}

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x$$

lépletet használjuk (a képlet helyes, hiszen az $\mathbb{R}$-en értelmezett e^x exponenciális függvény és a $(0,\infty)$-en értelmezett $\ln x$ logaritmus függvény egymás inverzei). Ekkor már a logaritmus $\log_a b^c = c\log_a b$, $(a \in (0,\infty)\setminus\{1\}$, $b > 0$ tulajdonsága miatt a deriválás az eddigi technikákkal elvégezhető.

Mintafeladat: Logaritmikus derivált kiszámítása

Legyen {Fmi:log.der.kiszam}

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\sin x}.$$

Számítsuk ki az $f'(1)$ értéket.

Megoldás:

Javaslat:

Írjuk fel $f(x)$-et olyan alakba, hogy csak a kitevőjében legyen ismeretlen.

Lépés:

$$f(x) = x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\ln\left(x^{\sin x}\right)} = \mathrm{e}^{\sin x \ln x}.$$

Javaslat:
Deriváljuk ezt az alakot, használva a láncszabályt és a szorzatfüggvény deriválási szabályát:
Lépés:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{\sin x \ln x}\right)' = \\ &= \mathrm{e}^{\sin x \ln x}[\sin x \ln x]' = \\ &= \mathrm{e}^{\sin x \ln x}\left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]. \end{aligned}$$

Javaslat:
Írjuk most vissza az első szorzótényezőt az eredeti alakjába.
Lépés:

$$f'(x) = x^{\sin x}\left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right].$$

Javaslat:
Számítsuk ki az $f'(1)$ értéket.
Lépés:

$$f'(1) = 1^{\sin 1}\left[\cos 1 \ln 1 + \frac{\sin 1}{1}\right] = \sin 1.$$

A magasabbrendű derivált fogalma

Definíció: Magasabbrendű deriváltak
Az f függvény **kétszer differenciálható** az x_0 helyen, ha az x_0 hely egy környezetében differenciálható és az f' derivált függvény is differenciálható az x_0 helyen. Az $(f')'(x_0)$ differenciálhányadost **az f függvény x_0 helyen vett másodrendű deriváltjának** vagy **másodrendű differenciálhányadosának** nevezzük és $f''(x_0)$-val jelöljük. {Fde:magasabbrendu.der}
Általában, tetszőleges $n \in \{2, 3, 4, ...\}$ esetén az f függvény **n-szer differenciálható** az x_0 helyen, ha az x_0 hely egy környezetében $(n-1)$-szer differenciálható és a függvény $f^{(n-1)}$-val jelölt $(n-1)$-edrendű derivált függvénye is differenciálható az x_0 helyen. Az $(f^{(n-1)})'(x_0)$ differenciálhányadost **az f függvény x_0 helyen vett n-edrendű deriváltjának** vagy **n-edrendű differenciálhányadosának** nevezzük és $f^{(n)}(x_0)$-val jelöljük.
Ha nem kimondottan egy adott x_0-ban kérjük, akkor az n-edrendű derivált

$$\forall n \in \{2, 3, 4, ...\} \quad f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Ezt szoktuk még **n-edrendű derivált függvénynek** is nevezni.

A magasabbrendű derivált kiszámítása

Mintafeladat: A szinusz függvény magasabbrendű deriváltjai

Számítsuk ki az {Fmi:sin.magasabbrendu.der}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$$

függvény n-edrendű derivált függvényét. Mennyi az $f^{(n)}(0)$?

Megoldás:

Javaslat:

Számítsuk ki az $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ deriváltakat. Mit veszünk észre? Mitől függ a $\sin x$ függvény n-edrendű deriváltja?

Lépés:

Az elsőrendű derivált függvény:

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos x,$$

a másodrendű derivált függvény:

$$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\sin x,$$

a harmadrendű:

$$f''' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

és a negyedrendű már megint ugyanannyi, mint az f, tehát egy újabb „periódus” kezdete:

$$f^{(4)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

ami tartalmazza még a következőket is:

$$f^{(5)}, f^{(6)}, f^{(7)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x, f^{(6)}(x) = -\sin x \text{ és } f^{(7)}(x) = -\cos x.$$

Észrevesszük, hogy a $\sin x$ függvény n-edrendű deriváltját a derivált rendjének 4-gyel történő osztási maradéka határozza meg, azaz:

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } n = 4k+1, \\ -\sin x, & \text{ha } n = 4k+2, \\ -\cos x, & \text{ha } n = 4k+3, \\ \sin x, & \text{ha } n = 4k. \end{cases}$$

Javaslat:

A megoldás még természetesen nem teljes, akkor végeztünk, ha n szerinti teljes indukcióval még be is látjuk a fenti képletet. Tegyük meg ezt is.

Lépés:

$n = 1$-re igaz a képlet, mert $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Tegyük fel, hogy tetszőlegesen rögzített $m \in \mathbb{N}$ számra igaz a képlet és lássuk be, hogy $m+1$-re is az:

$$f^{(m+1)}(x) = (f^{(m)}(x))'.$$

Ha $m+1 = 4k+1$, akkor $m = 4k$ és az indukciós feltétel miatt $f^{(m)}(x) = \sin x$, ahonnan $f^{(m+1)}(x) = \cos x$. Ha $m+1 = 4k+2$, akkor $m = 4k+1$

és az indukciós feltétel miatt $f^{(m)}(x) = \cos x$, így $f^{(m+1)}(x) = -\sin x$. Ha $m+1 = 4k+3$, akkor $m = 4k+2$, ekkor az indukciós feltétel miatt $f^{(m)}(x) = -\sin x$, ahonnan $f^{(m+1)}(x) = -\cos x$. Ha $m+1 = 4k+4$, akkor $m = 4k+3$, ekkor az indukciós feltétel miatt $f^{(m)}(x) = -\cos x$, így $f^{(m+1)}(x) = \sin x$, ezzel a példa megoldása teljes.

Javaslat:

Az előbbiekre támaszkodva adjuk meg az $f^{(n)}(0)$ értékét is.

Lépés:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 4k+1, \\ 0, & \text{ha } n = 4k+2, \\ -1, & \text{ha } n = 4k+3, \\ 0, & \text{ha } n = 4k. \end{cases}$$

A jobb oldali derivált fogalma

Definíció: A jobb oldali derivált

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ és legyen az f függvény értelmezett az x_0 egy δ sugarú jobb oldali környezetében (jelöljük ezt $k_\delta^+(x_0)$-val). {Fde:jobbo.der}

Az f függvénynek **létezik a jobb oldali deriváltja (jobb oldali differenciálhányadosa) az x_0 helyen**, vagy **jobbról differenciálható az $x = x_0$-ban**, ha létezik és véges az

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

jobb oldali határérték. Amennyiben $h = x - x_0$ helyettesítést alkalmazunk, az f függvény x_0 pontbeli **jobb oldali deriváltjára** használhatjuk az

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

jobb oldali határértéket is.

A bal oldali derivált fogalma

Definíció: A bal oldali derivált

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ és legyen az f függvény értelmezett az x_0 egy δ sugarú bal oldali környezetében (jelöljük ezt $k_\delta^-(x_0)$-val). {Fde:balo.der}

Az f függvénynek **létezik a bal oldali deriváltja (bal oldali differenciálhányadosa) az x_0 helyen**, vagy **balról differenciálható az $x = x_0$-ban** ha létezik és véges az

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

bal oldali határérték. Amennyiben $h = x - x_0$ helyettesítést alkalmazunk, az f függvény x_0 pontbeli **bal oldali deriváltjára** használhatjuk az

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bal oldali határértéket is.

Példa: Az abszolútérték-függvény egyoldali deriváltjai

Az {Fpe:absz.fv.egyold.der}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

abszolútérték-függvény az $x_0 = 0$ helyen jobbról is és balról is differenciálható $x = 0$-ban, de mivelhogy

$$f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0),$$

az f függvény nem differenciálható $x = 0$-ban.

Megjegyzés: Differenciálhatóság és egyoldali differenciálhatóság

Nyilvánvaló, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és az f függvény értelmezett az x_0 egy $k(x_0)$ környezetében, akkor ha f az $x = x_0$ helyen jobbról is és balról is differenciálható és $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, akkor f differenciálható az $x = x_0$ helyen, ha pedig $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, akkor f nem differenciálható az $x = x_0$ helyen. {Fme:diff.egyold.diff}

4.2.5. A folytonosság, a Lipschitz feltétel és a deriválhatóság kapcsolata

A pontbeli differenciálhatóság a folytonosságnál erősebb tulajdonság

Tétel: A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Ha f differenciálható az x_0 helyen, akkor ott folytonos is. {Fte:diff.impl.folyt}

Bizonyítás:

Az x_0 pontbeli differenciálhatóság szerint felírhatjuk, hogy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

létezik és véges. A végesben vett véges határérték definíciójába az $\varepsilon = 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy az $\varepsilon = 1$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < 1,$$

azaz

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f'(x_0) - 1 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + 1,$$

amiből a $K = \max\{|f'(x_0) - 1|, |f'(x_0) + 1|\} > 0$ jelöléssel felírható, hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < K,$$

azaz

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < K|x - x_0| < \varepsilon,$$

a $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$ választással. Így ez már pontosan azt jelenti, hogy az f folytonos az x_0 helyen.

Megjegyzés:

A differenciálhatóság a folytonosságnál erősebb tulajdonság, mert a folytonosságból nem következik a differenciálhatóság, tehát az előző tétel fordítottja nem igaz, gondoljunk csak az abszolútérték-függvényre, mely folytonos az $x = 0$-ban, de ott nem differenciálható.

Differenciálhatóság vizsgálatát kérő feladatok

Megjegyzés:
A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolatáról szóló tételt használnunk kell olyan feladatokban, amelyek kérik azon paraméter értékeket, melyekre egy adott függvény differenciálható lesz.

Mintafeladat: Paraméter alkalmas választása differenciálhatósághoz

Mely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméter értékek mellett lesz az {Fmi:param.megv.diffhoz}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + \beta + 1, & \text{ha } x \leq 1 \\ \alpha x^4 + x + 2\beta, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény

1. folytonos;
2. differenciálható.

Megoldás:
1.
Javaslat:
Írjuk fel, mit tudunk f folytonosságával kapcsolatosan, azaz csak hol kell a folytonosságot vizsgálnunk.
Lépés:
A polinomfüggvények elemi függvények, így folytonosak (az értelmezési tartományukon). Ezért a paraméter értékektől függetlenül f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ halmazon. Ezért folytonosságot csak $x = 1$-ben kell vizsgálnunk.
Javaslat:
Mit jelent $x = 1$-ben f folytonossága?
Lépés:
$x = 1$-ben f folytonossága azt jelenti, hogy létezik $f(1)$ és $\lim_{x\to 1} f(x)$, valamint a kettő egyenlő egymással. A mi esetünkben szükséges jobb- és bal oldali limeszt számolni, azaz az f függvény $x = 1$-beli folytonossága az

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

egyenlőségeket jelenti. Mivel

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\alpha x^4 + x + 2\beta) = \alpha + 2\beta + 1$$

és

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (\alpha x^2 + x + \beta + 1) = \alpha + \beta + 2 = f(1),$$

így a folytonosság feltétele, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $\beta = 1$.
2.
Javaslat:
Írjuk fel, mit tudunk f differenciálhatóságával kapcsolatosan, azaz csak hol kell a differenciálhatóságot vizsgálnunk.
Lépés:
Ha nem kérte volna a folytonosságot a feladat az 1. pontban, akkor is

most a folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolatáról szóló tétel miatt külön kérnünk kéne, hogy f folytonos legyen, tehát $\beta = 1$. Az elemi függvények differenciálhatók, tehát differenciálhatóságot is csak $x = 1$-ben kell vizsgálnunk, a többi helyen

$$f'(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 1, & \text{ha } x < 1 \\ 4\alpha x^3 + 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Javaslat:
Mit jelent $x = 1$-ben f differenciálhatósága?
Lépés:
f differenciálható, ha $\beta = 1$ (f folytonos) és

$$4\alpha + 1 = \lim_{x \to 1^+} (4\alpha x^3 + 1) = f'_+(1) = f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} (2\alpha x + 1) = 2\alpha + 1,$$

azaz $\beta = 1$ és $\alpha = 0$.

A Lipschitz feltétel és a folytonosság kapcsolata

Tétel: A Lipschitz-tulajdonságú függvények folytonossága
Ha f Lipschitz-tulajdonságú függvény, akkor egyenletesen folytonos (amiből következik, hogy folytonos is). {Fte:lip.folyt}

Bizonyítás:
Legyen f Lipschitz-tulajdonságú függvény, L Lipschitz-konstanssal. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$, hogy $x, y \in D_f$ esetén fennáll, hogy

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Megjegyzés:
A Lipschitz-tulajdonságú függvények folytonosságáról szóló tétel fordítva nem igaz, tehát egy f függvény egyenletes folytonosságából nem következik, hogy f eleget tesz a Lipschitz feltételnek. Például az

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

függvény egyenletesen folytonos (az egyenletes folytonosság a Heine-tétel miatt van, mely szerint a korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények egyenletesen folytonosak) és f mégsem Lipschitz-tulajdonságú függvény, mert a deriváltja (ami $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$) akármilyen nagy lehet.

A Lipschitz feltétel és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel: A korlátos deriváltú függvények tétele
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos és az (a, b) intervallumon differenciálható, korlátos deriváltú függvény. Ekkor f Lipschitz-tulajdonságú az $[a, b]$ intervallumon. {Fte:korl.der.lip}

Bizonyítás:
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos és az (a, b) intervallumon differenciálható, korlátos deriváltú és legyen továbbá $L > 0$ úgy, hogy

$$L = \max_{x \in (a,b)} |f'(x)|.$$

Tetszőlegesen rögzített $x \neq y \in [a, b]$-re alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel, így azt is felírhatjuk, hogy létezik $c \in (x, y)$, melyre

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = |f'(c)| \leq L,$$

ahonnan következik, hogy f Lipschitz tulajdonságú függvény az értelmezési tartományán.

A *Deriválási szabályok* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Adjuk meg az area szinusz hiperbolikusz és area tangens hiperbolikusz függvények esetén az origóban húzott érintő iránytangensét. (Csak számokat lehet az eredményhez beírni.) {DER-001}

Válasz: Az area szinusz hiperbolikusz függvény origóban húzott érintőjének iránytangense 1 .

Válasz: Az area tangens hiperbolikusz függvény origóban húzott érintőjének iránytangense 1 .

Megoldás:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

így az area szinusz hiperbolikusz függvény origóban húzott érintőjének iránytangense $\frac{1}{\sqrt{0^2+1}} = 1$.

$$\forall x \in (-1, 1) \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2},$$

így az area tangens hiperbolikusz függvény origóban húzott érintőjének iránytangense $\frac{1}{1-0^2} = 1$.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbiak közül azt az igaz állítást, amelyik a Lipschitz feltétel és a folytonosság kapcsolatát írja le. {DER-002}

- ○ Ha f folytonos függvény, akkor Lipschitz-tulajdonságú.
- ○ Ha f egyenletesen folytonos függvény, akkor Lipschitz-tulajdonságú.
- ● Ha f Lipschitz-tulajdonságú, akkor folytonos függvény.
- ○ A Lipschitz-tulajdonságból nem következik a folytonosság.

Megoldás:
A Lipschitz-tulajdonságú függvények folytonosságának tétele kimondja, hogy ha f Lipschitz-tulajdonságú, akkor f egyenletesen folytonos függvény, tehát folytonos is, így a harmadik állítás igaz és a negyedik hamis.

Az első és második állítás hamis, mert még az egyenletes folytonosságból sem következik a Lipschitz-tulajdonság. Például az

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x}$$

függvény egyenletesen folytonos (tehát folytonos is), mégsem Lipschitz-tulajdonságú, mert deriváltfüggvénye, az

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

felülről nem korlátos. Tehát csak a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {DER-003}

- ☐ Ha I nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ két tetszőleges I-n differenciálható függvény, akkor

$$\forall x \in I \quad [f(x)g(x)]' = f'(x)g'(x).$$

- ☒ Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az I nyílt intervallumon, akkor ott folytonos is.
- ☒ Ha létezik az x_0 helyen az $f \circ g$ függvénykompozíció és g differenciálható az x_0 helyen, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ helyen, akkor $f \circ g$ is differenciálható az x_0 helyen és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

- ☒ Az arkusz tangens és arkusz kotangens függvények differenciálhatók az $\mathbb{R}$-en, az arkusz szinusz és arkusz koszinusz függvények pedig differenciálhatók a $(-1, 1)$ intervallumon.

Megoldás:

Az első állítás a szorzat függvény deriválási szabálya miatt hamis.

A második állítás a folytonosság és differenciálhatóság kapcsolatának tétele miatt igaz.

A harmadik állítás a láncszabály, úgyhogy igaz.

A negyedik állítás az inverz trigonometrikus függvények deriváltja miatt igaz. Tehát csak az első állítás hamis, a többi igaz.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {DER-004}

☒ Az abszolútérték-függvény 0-ban vett jobboldali deriváltja 1, míg baloldali deriváltja -1.

☐ Ha egy függvény egy x_0 pontban jobbról is és balról is differenciálható, akkor differenciálható x_0-ban.

☐ Hányados függvényt a következőképpen deriválunk:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

☒ Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható az (a, b) intervallumon és korlátos deriváltú függvény, akkor f Lipschitz-tulajdonságú az $[a, b]$ intervallumon.

Megoldás:

Az első állítás igaz az $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

abszolútérték-függvény hozzárendelési szabálya miatt.

Az abszolútérték-függvény jó példa arra is, hogy belássuk, a második állítás hamis. 0-ban az abszolútérték-függvénynek van jobb- és bal oldali deriváltja, mégsem differenciálható.

A harmadik állítás hamis a hányados függvény deriválási szabálya miatt.

A negyedik állítás nem más, mint a korlátos deriváltú függvények tétele, tehát igaz. Így az első és negyedik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {DER-005}

☒ $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

☐ $\forall x \in (1, \infty) \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

☒ $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

☒ $\forall x \in (-1, 1) \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

Megoldás:

Egyedül a második állítás hamis, a többi mind igaz. Mindez az inverz hiperbolikus függvények deriváltjának képletcsomagjából következik.

4.3. Explicittől eltérő alakban megadott függvények deriváltja

E lecke befejezése után a hallgató:

- deriválni tud bármilyen (deriválható) paraméteresen megadott függvényt,
- deriválni tud bármilyen (deriválható) polárkoordinátákkal megadott függvényt,
- logaritmikus deriváltat tud számolni,
- tetszőleges (deriválható) implicit függvényt is deriválni tud.

4.3.1. Paraméteres alakban megadott görbék érintő egyenesei

Áttérés a paraméteres alakról explicit alakra

Tétel: Paraméteres alakból expicit alakba való áttérés
Ha egy g síkgörbe paraméteres alakja {Fte:parambol.explbe}

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

ahol az $x(t)$ és $y(t)$ folytonos leképezések és az $x(t)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény a (t_1, t_2) intervallumon, akkor egy g görbe paraméteres egyenletrendszeréről áttérhetünk a görbe $y = f(x)$ explicit alakú egyenletére, tehát nem akármilyen síkgörbéről van szó, hanem létezik olyan f függvény, melynek az előbbi görbe a grafikonja.

Bizonyítás:
A feltétel és a szigorúan monoton, folytonos függvény inverzének tételéből következik, hogy az $x(t)$ függvénynek létezik

$$t = t(x), \quad x \in (a, b)$$

inverze, mely ugyanolyan szigorú monotonitással rendelkezik. Ezt behelyettesítve a paraméteres egyenletrendszer második egyenletébe kapjuk, hogy

$$y = y(t(x)), \quad x \in (a, b),$$

amit bizonyítani kellett.

Az asztrois paraméteres és explicit alakja

Definíció: Asztrois
Az **asztrois** olyan síkgörbe, amit egy rögzített R sugarú körön belül, csúszás nélkül legördülő, 4-szer kisebb r sugarú, C középpontú kör egy rögzített P pontja ír le. (Az ilyen, körön belül gördülő másik kör meghatározott kerületi pontja által leírt görbéket **hipocikloisoknak** nevezzük.) Az egyszerűség kedvéért az asztroisnál legyen a nagy kör origó centrumú, és induláskor a kis kör P pontja, melynek pályáját figyeljük, egyezzen meg a nagy kör $Q(0, R)$ koordinátájú pontjával. {Fde:asztrois.def}

Ide jön az asztrois ábrája, ASZ-04-06.png ábra

Példa: Asztrois paraméteres és explicit alakja

Amennyiben $\varphi = QOC\sphericalangle$, bonyolult számításokkal levezethető, hogy az asztrois paraméteres egyenletrendszere {Fpe:asztrois}

$$\begin{cases} x = R\cos^3\varphi \\ y = R\sin^3\varphi, \end{cases}$$

ahol $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ha ebből szeretnénk megkapni az explicit alakot, kifejezzük $\cos\varphi$-t, valamint $\sin\varphi$-t és behelyettesítjük a kapott kifejezéseket a $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ azonosságba:

$$\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [-R, R]$$

majd átszorzunk $R^{\frac{2}{3}}$-nal, így az asztrois explicit alakja 2 függvény:

$$(y =) f_{1,2}(x) = \pm\left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, x \in [-R, R].$$

Ide jön az asztrois animációja - a WIKI-n https://hu.wikipedia.org/wiki/Asztroid/ az asztroisnál az utolsó animáció

Görbék paraméteres alakban való megadása

Mintafeladat: A ciklois

Legyen egy r sugarú kör kerületének egy rögzített P pontja pontosan az O origóban úgy, hogy az x-tengely alulról érinti a kört (tehát a kör középpontja $C(0, r)$. Az x tengelyen csúszásmentesen (előre, hátra) gördülő körünk P pontja **cikloist** ír le. Írjuk fel a ciklois paraméteres egyenletrendszerét. {Fmi:ciklois}

Megoldás:

Javaslat:

Rajzoljuk fel, mi történik, ha a kör csúszásmentesen elgurul pl. pozitív irányba úgy, hogy az x-tengellyel való érintkezési pontját A-val jelöljük és a kör középpontját pedig B-vel, ahol a B pont koordinátái (OA, r).

Lépés:

Ide jön a ciklois ábrája, CIK-04-07.png ábra

A csúszásmentesség miatt az OA szakasz hossza ugyanakkora, mint a PA körívé, azaz rt, ahol $t = ABP\sphericalangle$.

Javaslat:

Legyen ez a t szög a paraméter. Írjuk fel a ciklois paraméteres egyenletrendszerét:

Lépés:

A cikloist leíró $P(x, y)$ pont koordinátái a következők: Legyen a P pont x-tengelyre való merőleges vetülete Q és a BA egyenesre való vetülete R.

$$x = OQ = OA - QA = rt - r\sin t = r(t - \sin t)$$

és

$$y = PQ = BA - BR = r - r\cos t = r(1 - \cos t),$$

így a ciklois első ívének paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi]$. Ha pedig $t \in \mathbb{R}$, a teljes görbe paraméteres egyenletrendszerét kapjuk meg.

Ide jön a ciklois animációja - hasonlót a WIKI-n láthatunk, https://hu.wikipedia.org/wiki/Ciklois

Deriválás paraméteres alakban megadott függvény esetén

Tétel: Paraméteresen megadott függvény deriváltja
Legyen egy g görbe paraméteres egyenletrendszere {Fte:param.der}

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

ahol az $x(t)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény a $[t_1, t_2]$ intervallumon. Jelöljük $\dot{x}(t_0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)$ -val, valamint $\dot{y}(t_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$-val az $x(t)$ és $y(t)$ függvények t szerinti deriváltjait a $t = t_0$ helyen (az y' továbbra is x szerinti deriváltat jelent). Ha $x(t)$ és $y(t)$ differenciálható függvények a $t_0 \in (t_1, t_2)$ pontban úgy, hogy $\dot{x}(t_0) \neq 0$, akkor az $y(t(x))$ függvény differenciálható az $x_0 = x(t_0)$ helyen és deriváltja a következő:

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Általánosan a képletet szoktuk még

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

alakban is írni, ha $x(t), y(t)$ differenciálhatók és $\dot{x}(t) \neq 0$ a (t_1, t_2) intervallumon, valamint ugyanitt $x(t)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény.

Bizonyítás:
A paraméteres alakból explicit alakba való áttérés feltételei teljesülnek, így valóban létezik az $y(x)$ explicit alak, aminek a deriváltját, azaz $y'(x)$-et ki akarjuk számítani. A láncszabály, valamint az inverz függvény deriválási képlete miatt felírhatjuk, hogy

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x_0) = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Paraméteres alakban megadott görbe érintő egyenese

Mintafeladat: Ciklois adott pontbeli érintő egyenese

Írjuk fel az {Fmi:cikl.erinto}

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

ciklois ív $t = \frac{\pi}{6}$ paraméterű pontjához tartozó érintő egyenesének egyenletét.

Megoldás:

Javaslat:
Vegyük észre, milyen sugarú (az x-tengelyen, csúszásmentesen) gördülő kör rögzített P pontjának útvonala írja le a ciklois ívet.
Lépés:
$r = 1$ sugarú az x-tengelyen gördülő kör.
Javaslat:
Az adott pontbeli derivált geometriai jelentését használva, számítsuk ki a $t = \frac{\pi}{6}$ paraméterű cikloisbeli ponthoz tartozó érintő egyenes iránytangensét.
Lépés:
Használhatjuk a paraméteresen megadott függvény deriváltjának tételét pl. a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban (ami $\frac{\pi}{6}$-ot tartalmazza), mert az $x(t)$ függvény itt invertálható, így a $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ paraméter értékű pontokra felírhatjuk, hogy

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

azaz A $t = \frac{\pi}{6}$ paraméterű cikloisbeli ponthoz tartozó érintő egyenes iránytangense:

$$y'\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1 - \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

Javaslat:
Írjuk fel az adott pontbeli derivált geometriai jelentését használva a kért érintő egyenes egyenletét.
Lépés:
Mivel az érintő egyenes egyenlete az $y = f(x)$ explicit alakú függvény grafikonjához az x_0 pontban

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

és

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2},$$

valamint

$$f\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2},$$

a kért érintő egyenes egyenlete

$$y - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right).$$

4.3.2. Polárkoordinátákkal megadott görbék érintő egyenesei

Áttérés a polárkoordinátás alakról paraméteres alakra

Tétel: Polárkoordinátás alakból paraméteres alakba való áttérés {Fte:polbol.parbe}

Ha egy g síkgörbe polárkoordinátás alakja

$$r = r(\theta), \text{ ahol } \theta \in \Theta, \text{ valamely } \Theta \subseteq \mathbb{R} \text{ esetén}$$

(általában $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$ intervallum), ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ a vezérsugár (origótól való távolság) és $\theta \in \Theta$ a polárszög, akkor a síkgörbe paraméteres alakja a következő (θ a paraméter):

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta, \quad \theta \in \Theta. \end{cases}$$

Bizonyítás:

A tétel azonnal következik a polárkoordinátás alak definíciójából.

Deriválás polárkoordinátás alakban megadott függvény esetén

Tétel: Polárkoordinátákkal megadott függvény deriváltja {Fte:pol.der}

Legyen egy g görbe polárkoordinátás egyenlete

$$r = r(\theta), \text{ ahol } \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

ahol $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 < \theta_2$, és legyen továbbá az $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$ függvény szigorúan növekvő, vagy invertálható a $[\theta_1, \theta_2]$ intervallumon. Ha $x(\theta)$ és $y(\theta)$ differenciálható függvények a $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ pontban úgy, hogy $\dot{x}(\theta_0) \neq 0$, akkor az $y(\theta(x))$ függvény differenciálható az $x_0 = x(\theta_0)$ helyen és deriváltja a következő:

$$y'(x_0) = \frac{\dot{r}(\theta_0)\sin\theta_0 + r(\theta_0)\cos\theta_0}{\dot{r}(\theta_0)\cos\theta_0 - r(\theta_0)\sin\theta_0}.$$

(Mivel θ akár paraméterként is tekinthető, így a θ-val való deriválást is - akárcsak a paraméter szerinti deriválásnál - az $\dot{x}(\theta_0)$, illetve $\dot{y}(\theta_0)$ jelöli.) Általánosan a képletet szoktuk még

$$y'(x) = \frac{\dot{r}(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{\dot{r}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}$$

alakban is írni, ha $x(\theta), y(\theta)$ differenciálhatók és $\dot{x}(\theta) \neq 0$ a (θ_1, θ_2) intervallumon, valamint ugyanitt $x(\theta)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény.

Bizonyítás:

A polárkoordinátás alakból paraméteres alakba való áttérés tételét, a paraméteresen megadott függvény deriváltját, valamint a szorzatfüggvény deriválási képletét használva, felírhatjuk, hogy

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) \quad = \frac{\dot{y}(\theta_0)}{\dot{x}(\theta_0)} = \frac{[r(\theta)\sin\theta]'(\theta_0)}{[r(\theta)\cos\theta]'(\theta_0)} \quad = \frac{\dot{r}(\theta_0)\sin\theta_0 + r(\theta_0)\cos\theta_0}{\dot{r}(\theta_0)\cos\theta_0 - r(\theta_0)\sin\theta_0}.$$

Polárkoordinátás alakban megadott görbe érintő egyenese

Mintafeladat: Kör adott pontjában húzott érintő egyenese

Írjuk fel az {Fmi:kor.erinto}

$$r = 2R\cos\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

kör $\theta = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontjához tartozó érintő egyenesének egyenletét.

Megoldás:

Javaslat:

Készítsünk ábrát és nézzük meg, hol helyezkedik el a feladatban megadott kör.

Lépés:

Az $r \geq 0$ miatt a $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén teszünk meg egy teljes kört.

A kör ábrája (két függvényről van szó):

Ide jön a kör ábrája, KOR-04-08.png ábra

Javaslat:

Használjuk a polárkoordinátákkal megadott függvény deriválási tételét ha $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és számítsuk ki az érintő egyenes iránytangensét a félkör $\theta = \frac{\pi}{3}$ pontjában.

Lépés:

Mivel

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2R\cos\frac{\pi}{3} = 2r\frac{1}{2} = R$$

és $\dot{r}(\theta) = -2R\sin\theta$, tehát

$$\dot{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2R\sin\frac{\pi}{3} = -2R\frac{\sqrt{3}}{2} = -R\sqrt{3},$$

a $\theta = \frac{\pi}{3}$ félkörbeli ponthoz tartozó érintő egyenes iránytangense:

$$y'\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\dot{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} + r\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}}{\dot{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - r\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Javaslat:

Írjuk fel az adott pontbeli derivált geometriai jelentését használva a kért érintő egyenes egyenletét.

Lépés:

Mivel az érintő egyenes egyenlete az $y = f(x)$ explicit alakú függvény grafikonjához az x_0 pontban

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

és

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{R}{2},$$

valamint

$$f\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = r\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

a kért érintő egyenes egyenlete

$$y - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{R}{2}\right).$$

4.3.3. Implicit módon megadott görbék érintő egyenesei

Paraméteres alakból implicit alakba történő áttérés

Mintafeladat: Asztrois implicit alakja

A rögzített R sugarú körön belül, csúszás nélkül legördülő, 4-szer kisebb r sugarú kör egy rögzített P pontja által leírt asztrois paraméteres egyenletrendszere {Fpe:asztrois.impl}

$$\begin{cases} x = R\cos^3\varphi \\ y = R\sin^3\varphi, \end{cases}$$

ahol $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Írjuk fel az asztrois implicit alakját.

Megoldás:
Javaslat:
Fejezzük ki $\cos\varphi$-t illetve $\sin\varphi$-t és helyettesítsünk be a

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

képletbe.
Lépés:

$$\sin\varphi = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ és } \cos\varphi = \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{1}{3}},$$

így a kért képletbe való helyetetsítés után kapjuk az asztrois implicit alakját

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}},$$

ahol $x \in [-R, R]$.

Implicit alakban történő deriválás

Megjegyzés: Implicit függvény deriválása

Implicit módon megadott függvényt úgy deriválunk, hogy deriváljuk az egyenlőség bal-, majd a jobb oldalát is, végig szem előtt tartva, hogy az $y = y(x)$, majd kifejezzük az $y'(x)$-et. Az eredményben általában szerepel $y(x)$ is. {Fme:impl.der}

Mintafeladat: Implicit alakban megadott függvény deriváltjának kiszámolása

Tekintsük az {Fmi:impl.der.kiszam}

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4},$$

implicit alakban megadott asztroist, ahol $x \in [-2, 2]$. Írjuk fel az asztrois $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ abszcisszájú pontjaiban az érintő egyenesek egyenletét.

Megoldás:
Javaslat:
Hány ilyen pontunk van?

Lépés:
Behelyettesítve az implicit egyenletbe kapjuk, hogy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4},$$

ahonnan $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, így a keresett két pont, melyben érintő egyenest számítunk:

$$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ illetve } N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Javaslat:
Az érintő egyenesek iránytangenseit érdemes először kiszámolni. Használjuk az implicit függvény deriválási technikáját.
Lépés:

$$\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \cdot [y(x)]^{-\frac{1}{3}} \cdot y'(x) = 0,$$

ahonnan kifejezzük $y'(x)$-et:

$$y'(x) = \frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}},$$

ami az M és N pontokban -1, illetve 1 iránytangenseket jelent.
Javaslat:
Írjuk fel a kért érintő egyeneseket.
Lépés:
A kért egyenesek:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ illetve } y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Az *Explicittől eltérő alakban megadott függvények deriváltja* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Adjuk meg az {EEA-001}

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi)$ paraméteres alakban megadott görbe $(0, -2)$ valamint $(0, 2)$ pontjaiban a görbéhez húzott érintő egyenesek iránytangenseinek értékét. (Csak számokat lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A $(0, -2)$ pontban az érintő egyenes iránytangensének értéke 0 .

Válasz: A $(0, 2)$ pontban az érintő egyenes iránytangensének értéke 0 .

Megoldás:
Origó középpontú, 2 sugarú kör északi és déli pontjában az érintő egyenesek vízszintesek, így mindkét esetben az iránytangens értéke $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbiak közül az asztrois paraméteres egyenletrendszerét. {EEA-002}

- ○ $$\begin{cases} x = R\cos^2\varphi \\ y = R\sin^2\varphi, \end{cases}$$
  ahol $\varphi \in [0, 2\pi)$.
- ● $$\begin{cases} x = R\cos^3\varphi \\ y = R\sin^3\varphi, \end{cases}$$
  ahol $\varphi \in [0, 2\pi)$.
- ○ $$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$
  ahol $t \in [0, 2\pi]$.
- ○ $$\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad x \in [-R, R]$$

Megoldás:
Az asztrois paraméteres alakjából azonnal következik, hogy az első válasz hamis, és a második válasz igaz.

A negyedik állításban az asztrois implicit alakja szerepel, így a negyedik állítás nem azért hamis, mert nem az asztroist írja le, hanem azért, mert annak nem paraméteres, hanem implicit alakja.

A harmadik állítás meg nem más, mint egy ciklois ív paraméteres alakja, tehát az sem az asztrois paraméteres egyenletrendszere. Így a második állítás az egyetlen, ami megfelel a feladat feltételeinek.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {EEA-003}

- ☒ Az $r = 6\cos\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ egy 3 sugarú, $(3, 0)$ középpontú xy-síkbeli kör egyenlete.
- ☒ Implicit alakban is deriválható egy differenciálható függvény.
- ☐ Differenciálható függvény implicit alakban nem deriválható, csak explicit- és polárkoordinátás alakban.
- ☒ Ha implicit alakban deriválunk differenciálható függvényt, akkor az az y is megjelenhet az y' eredményben.

Megoldás:
Ha pl. nem az origóban, hanem a $C(R,0)$ pontban van az R sugarú kör középpontja $r = 2R\cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a kör egyenlete. Innen következik, hogy az első állítás igaz.

A második állítás is igaz, differenciálható függvény minden alakban, így implicit alakban is differenciálható.

Ugyancsak az előbbiek miatt a harmadik állítás hamis.

A negyedik állítás szintén az implicit alakban történő differenciálási szabály miatt igaz. Tehát csak a harmadik állítás hamis, a többi igaz.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {EEA-004}

- ☐ Az
$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$
ahol $t \in [0, 2\pi]$ egyenletrendszer a ciklois ív explicit alakja.
- ☐ Az
$$\begin{cases} x = r(t + \sin t) \\ y = r(\cos t - 1), \end{cases}$$
ahol $t \in [0, 2\pi]$ a (teljes) ciklois paraméteres egyenletrendszere.
- ☒ Az
$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$
ahol $t \in [0, 2\pi]$ egyenletrendszer egy ciklois ív paraméteres egyenletrenszere.
- ☐ Az
$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$
ahol $t \in \mathbb{R}$ csupán egyetlen ciklois ív paraméteres egyenletrendszere.

Megoldás:
Az első állítás azért hamis, mert egy ciklois ív paraméteres egyenletrendszere és nem explicit alak.

Ugyancsak emiatt a harmadik állítás igaz, a második állítás pedig hamis.

A negyedik állítás azért hamis, mert nem egyetlen ciklois ív, hanem a teljes ciklois paraméteres egyenletrendszere. Tehát csak a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {EEA-005}

- ☐ Polárkoordinátás alakban nem lehet függvényt deriválni.

☒ Logaritmikus deriváltról akkor beszélünk, ha differenciálható $f(x)^{g(x)}$ alakú függvényt kell deriválni.

☐ Polárkoordinátás és paraméteres alakban egyetlen differenciálható függvény differenciálhányadosát sem tudjuk kiszámolni, deriválni csak explicit alakban tudunk.

☐ Az
$$\begin{cases} x = 8\cos^3\varphi \\ y = 8\sin^3\varphi, \end{cases}$$
ahol $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ egyenletrendszer egy asztroist ír le.

Megoldás:
Az első és harmadik állítás hamis, mert minden alakban lehet differenciálható függvényt deriválni.

A második állítás a logaritmikus derivált jelentése miatt igaz.

A negyedik állítás pedig azért hamis, mert $\varphi \in [0, 2\pi)$ helyett $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ van, így nem egy teljes asztroist, csak egy ívet ír le a megadott egyenletrendszer. Tehát csak a második állítás igaz, a többi hamis.

4.4. Középértéktételek. L'Hospital szabály

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri és használni tudja Rolle tételét,
- ismeri a Lagrange-féle középértéktételt, annak geometriai és fizikai interpretációjával együtt,
- alkalmazni tudja a Lagrange-féle középértéktételt,
- tisztában van a L'Hospital szabály feltételrendszerével, ismer olyan ($\frac{0}{0}$, illetve $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ alakú) kritikus határértékeket, melyekre nem alkalmazható a L'Hospital szabály,
- számos olyan kritikus határértéket is ki tud számolni, melyet eddigi módszerekkel nem lehetett.

4.4.1. Rolle tétele, geometriai jelentése és alkalmazása

Rolle tétele

Tétel: Rolle tétele
Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és $f(a) = f(b)$, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $f'(c) = 0$. {Fte:Rolle.tetele}

Bizonyítás:
Mivel f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, Weierstrass tétele miatt a függvény felveszi maximumát, illetve minimumát, azaz léteznek $m, M \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy
$$\forall x \in [a, b] \quad m \le f(x) \le M.$$

(Tehát m jelöli az f minimumát, M pedig az f maximumát az $[a, b]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy $m \leq M$.) Két esetet különböztetünk meg:

- ha $m = M$, akkor $\forall x \in [a, b] \quad f(x) = m$, azaz minden $c \in (a, b)$ pontra $f'(c) = 0$, készen vagyunk, hiszen nem is egy, hanem végtelen c pontot találtunk a kért tulajdonsággal;
- ha $m < M$, akkor az $f(a) = f(b)$ feltétel miatt az f függvény az m és M értékek közül legalább egyiket az $[a, b]$ értelmezési tartomány egy belső pontjában veszi fel, azaz

  $$\exists c \in (a, b) \text{ úgy, hogy } f(c) = m \text{ vagy } f(c) = M.$$

  Ekkor a c pontban f-nek lokális szélsőértéke van, diferenciálható is c-ben, ahonnan a lokális szélsőértékek elsőrendű szükséges feltétele miatt következik, hogy $f'(c) = 0$.

Megjegyzés: Rolle tételének geometriai interpretációja
Rolle tétele azt mondja ki, hogy amennyiben az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és $f(a) = f(b)$, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, melyben a függvény grafikonjához húzott érintő egyenes vízszintes, amint azt az alábbi ábra is mutatja: {Fme:Rolle.geom}

Ide jön a Rolle-tétel ROL-04-09.png ábrája

Rolle tételének alkalmazása feladatokban

Mintafeladat: Rolle tételének egy alkalmazása
Tekintsük az {Fpe:Rolle.alk}

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x + 2$$

függvényt. Van-e olyan pontja a grafikonnak, melyben vízszintes az érintő egyenes? Hány ilyen pontunk van?

Megoldás:
Javaslat:
Számítsuk ki az $f(1)$ és $f(-1)$ függvényértékeket. Mit veszünk észre?
Lépés:
$f(1) = f(-1) = 2$.
Javaslat:
Használjuk Rolle tételét.
Lépés:
f folytonos a $[-1, 1]$ intervallumon, differenciálható a $(-1, 1)$ intervallumon és $f(1) = f(-1) = 2$. Ekkor Rolle tétele miatt létezik legalább egy olyan $c \in (-1, 1)$ szám, melyre $f'(c) = 0$. Tehát van legalább egy pont, amelyben a grafikonhoz húzott érintő egyenes vízszintes.
Javaslat:
Nézzük meg, hány ilyen pont van?

Lépés:
Ha tekintjük az $f'(x) = 0$, azaz a $3x^2 - 1 = 0$ egyenletet, akkor a gyökök

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

azaz két olyan pontja is van a grafikonnak:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right) \text{ valamint } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{6\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}\right)$$

koordinátájú pontok, melyekben a függvény grafikonjához húzott érintő vízszintes.

4.4.2. A Lagrange-féle középértéktétel, geometriai jelentése és alkalmazása

Lagrange-féle középértéktétel

Tétel: Lagrange-féle középértéktétel
Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, amelyre {Fte:Lagrange.tetele}

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bizonyítás:
Tekintsük az alábbi segédfüggvényt:

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Megjegyezzük, hogy ez az

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

érték nem más, mint az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes iránytangense. A folytonos függvények és függvényműveletek kapcsolatáról szóló tétel, valamint az összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény deriváltjáról szóló tétel miatt a h függvény is folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon. A

$$h(a) = h(b) = f(a),$$

így alkalmazhatjuk Rolle tételét a h segédfüggvényre, azaz létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $h'(c) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ így } \exists c \in (a, b), \text{ melyre } h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés: A Lagrange-féle középértéktétel geometriai interpretációja

A Lagrange-féle középértéktétel azt mondja ki, hogy amennyiben az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, melyben a függvény grafikonjához húzott érintő párhuzamos az f grafikonjának végpontjait összekötő szelővel. {Fme:Lagrange.geom}

Ide jön a Lagrange-féle középértéktétel LAG-04-10.png ábrája

A Lagrange-féle középértéktétel alkalmazásai

Példa: A Lagrange-féle középértéktétel mechanikai interpretációja
Amennyiben az $y = f(x)$ út-idő függvényt jelöl és az **átlagos változási sebesség** az $[a, b]$ intervallumon

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

a $c \in (a, b)$ esetén pedig a $f'(c)$ a **c-beli pillanatnyi sebesség**, akkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint lennie kell legalább egy belső pontnak, melyben a pillanatnyi sebesség megegyezik a teljes $[a, b]$ intervallumon vett átlagos változási sebességgel.

Mintafeladat: A derivált függvénynek nincs megszüntethető szakadása

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében és differenciálható a $k(x_0) \setminus \{x_0\}$ halmazon. Mutassuk meg, hogy ha létezik $\lim_{x \to x_0} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, akkor létezik $f'(x_0)$ is és {Fmi:der.n.m.sz}

$$f'(x_0) = A.$$

Megoldás:
Javaslat:
Tekintsünk egy rögzített $[x_0, x] \subset k(x_0)$ intervallumot és ellenőrizzük, alkalmazható-e az f függvény erre való leszűkítésére a Lagrange-féle középértéktétel. Ha igen, alkalmazzuk rá.
Lépés:
A feltételekből azonnal következik, hogy f folytonos az $[x_0, x]$-en és differenciálható az (x_0, x) intervallumon, következik, hogy létezik legalább egy olyan $c \in (x_0, x)$, melyre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Javaslat:
Mi történik, ha $x \to x_0$? Differenciálható-e az f függvény az x_0 helyen?
Lépés:
$c \in (x_0, x)$, emiatt ha $x \to x_0$, akkor $c \to x_0$, így felírhatjuk, hogy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \to x_0} f'(c) = A,$$

tehát az f függvény differenciálható az x_0 helyen és $f'(x_0) = A$.

Példa:
Ahhoz, hogy a derivált függvény létezzen egy rögzített x_0 helyen, nem szükséges, hogy létezzen a $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ határérték (mint ahogy az sem, hogy ebben a pontban az f' folytonos legyen). Például az

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény esetén a $\lim_{x\to 0} f'(x)$ határérték nem létezik, míg a derivált létezik és nulla az $x = 0$ helyen:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} = 0.$$

Így a derivált függvény

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\dfrac{1}{x^2} + 2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

melyre a

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

határérték nem létezik.

Ellenben, ha f differenciálható az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében és az f' függvénynek x_0-ban nincs másodfajú szakadása, akkor f' folytonos az x_0-ban:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

4.4.3. Cauchy-féle középértéktétel

Cauchy- és a Lagrange-féle középértéktétel kapcsolata

Tétel: Cauchy-féle középértéktétel
Ha az f és g függvények folytonosak az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálhatók az (a, b) nyílt intervallumon és minden $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik legalább egy $c \in (a, b)$, melyre {Fte:Cauchy.tetele}

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás:
A Lagrange-féle középértéktétel bizonyításához hasonlóan, itt is bevezetünk egy

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

segédfüggvényt. Indirekt belátjuk, hogy $g(b) \neq g(a)$. Ha feltennénk, hogy $g(b) = g(a)$, Rolle tétele miatt következne, hogy létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $g'(c) = 0$, ami ellentmondáshoz vezet azzal a feltétellel, hogy minden $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$. A folytonos függvények és függvényműveletek kapcsolatáról szóló tétel, valamint az összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény deriváltjáról szóló tétel miatt a h függvény is folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon. A

$$h(a) = h(b) = f(a),$$

így alkalmazhatjuk Rolle tételét a h segédfüggvényre, melynek következtében létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $h'(c) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

azaz mivel $g'(c) \neq 0$,

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés: A Lagrange-féle és a Cauchy-féle középértéktétel kapcsolata

A Lagrange-féle középértéktétel nem más, mint a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete, ugyanis a {Fme:Lagrange.Cauchy}

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x$$

választással a Cauchy-féle középértéktétel pontosan a Lagrange-féle középértéktételt jelenti.

4.4.4. L'Hospital szabály kritikus határértékekre

L'Hospital szabályok $\frac{0}{0}$ és $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú kritikus határértékekre

Tétel: L'Hospital szabály $\frac{0}{0}$ típusú határértékekre

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám és {Fte:LHospital.0.0}

- legyenek az f és g valós függvények differenciálhatók valamely x_0-t tartalmazó nyílt I intervallumon, kivéve esetleg az x_0 pontot és tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ minden $x \in I \setminus \{x_0\}$;
- tegyük fel, hogy $\frac{0}{0}$ típusú $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ kritikus határértékünk van, azaz
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0;$$
- tegyük fel továbbá, hogy létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Bizonyítás:

A feltételrendszer miatt, amennyiben f vagy g nem differenciálható az x_0 pontban, akkor két lehetőségünk van:

- vagy nem értelmezett x_0-ban,
- vagy megszüntethető szakadása van x_0-ban.

Emiatt az f és g függvények folytonossá tehetők az x_0-ban, ha feltesszük a továbbiakban, hogy

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Ekkor egy rögzített $[x_0, x] \subseteq I$ intervallumra az f és g valós függvények folytonosak az $[x_0, x]$ zárt intervallumon, differenciálhatók az (x_0, x) nyílt intervallumon és minden $t \in (x_0, x)$ esetén $g'(t) \neq 0$. Így a Cauchy-féle középértéktétel értelmében létezik legalább egy olyan $c \in (x_0, x)$, melyre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c \to x_0$ és az x_0 pontbeli derivált definíciója miatt felírhatjuk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \alpha.$$

Tétel: L'Hospital szabály $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékekre

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám és {Fte:LHospital.vegt.vegt}

- legyenek az f és g valós függvények differenciálhatók valamely x_0-t tartalmazó nyílt I intervallumon, kivéve esetleg az x_0 pontot és tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ minden $x \in I \setminus \{x_0\}$;
- tegyük fel, hogy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ kritikus határértékünk van, azaz
$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty;$$
- tegyük fel továbbá, hogy létezik a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor létezik a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Bizonyítás:

Mivel az f és g függvényeknek másodfajú szakadása van x_0-ban, így itt nem tehetők folytonossá. Ennek a tételnek a bizonyítása jóval bonyolultabb, megtalálható pl. Farkas Miklós Matematika II. jegyzetében (http://math.bme.hu/jegyzetek/040797_Farkas_Miklos_Matematika_II._Kotet.pdf.

Megjegyzés: L'Hospital szabályok egyoldali határértékek esetében

Mindkét L'Hospital szabály használható egyoldali határértékek kiszámolásánál is, a tételek bizonyítása ezekben az esetekben hasonló módon történik, csak ilyenkor egyoldali folytonosság, valamint egyoldali határértékek váltják fel a folytonosság, valamint határérték fogalmát. {Fme:LHospital.egyold}

Következmény: L'Hospital szabály $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ esetben

Amennyiben $x_0 = \infty$ vagy $x_0 = -\infty$, ugyanúgy érvényes mindkét L'Hospital szabály, csak a „valamely x_0-t tartalmazó nyílt I intervallumon, kivéve esetleg az x_0 pontot” megfogalmazás helyett az (a, ∞), illetve a $(-\infty, b)$ intervallumokat tekintjük. {Fko:LHospital.x0.vegt}

Bizonyítás:
Legyen $x_0 = \infty$. (A következmény hasonlóan bizonyítható az $x_0 = -\infty$ esetben is.) Az $x = \frac{1}{t}$ helyettesítést alkalmazva, akár a $\frac{0}{0}$ típusú határértékekre vonatkozó L'Hospital szabály, akár a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékekre vonatkozó L'Hospital szabály esetén felírhatjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)},$$

és az egyoldali határértékek esetében használatos L'Hospital szabályokat hívjuk segítségül.

L'Hospital szabály alkalmazása feladatokban

Mintafeladat: Egy egyoldali logaritmikus határérték
Számítsuk ki a {Fmi:egyold.loglim}

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

határértéket. Az ilyen határértékeket, melyekben az alapban is és a kitevőben is szerepel ismeretlen, **logaritmikus határértékeknek** nevezzük.

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be x helyére 0-t. Mit veszünk észre?
Lépés:
Helyettesítéskor a 0^0 kritikus esetet kapjuk.
Javaslat:
Használva azt, hogy az e alapú exponenciális függvény, valamint az ugyanolyan alapú logaritmus függvény egymás inverzei, írjuk át a függvény hozzárendelési szabályát olyan alakba, ahol már csak a kitevő tartalmazza az ismeretlent. (A módszert láthattuk már a logaritmikus derivált esetében is.)
Lépés:

$$x^x = \mathrm{e}^{\ln(x^x)} = \mathrm{e}^{x \ln x}.$$

Javaslat:
Így a kiszámítandó határérték

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x \ln x}.$$

Helyettesítsünk be x helyére 0-t. Mit veszünk észre? Használható-e a L'Hospital szabály a kitevőben?
Lépés:
Behelyettesítés után a kitevőben a $0\cdot(-\infty)$ esetet kapjuk. Így a L'Hospital szabály még nem használható.
Javaslat:
Írjuk át a határértéket olyan alakba, amikor már használhatjuk a kitevőben a L'Hospital szabályt és számítsuk ki a kért határértéket.

Lépés:

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}.$$

Most már teljesülnek a kitevőben a L'Hospital szabály feltételei, így a kért határérték

$$\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+}(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Mintafeladat: A L'Hospital szabály többszöri használata

Számítsuk ki a {Fmi:LH.tobbsz}

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right)$$

határértéket.

Megoldás:

Javaslat:

Helyettesítsünk be x helyére 0-t. Mit veszünk észre?

Lépés:

Helyettesítéskor, használva a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket, a $\infty - \infty$ kritikus esetet kapjuk.

Javaslat:

Hozzunk közös nevezőre. Mit veszünk észre?

Lépés:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$$

az utóbbira már teljesülnek a $\frac{0}{0}$ alakú határértékekre vonatkozó L'Hospital szabály feltételei.

Javaslat:

Használjuk a L'Hospital szabályt.

Lépés:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Javaslat:

Helyettesítsünk be újra. Mit veszünk észre?

Lépés:

Még mindig $\frac{0}{0}$ alakunk van és a L'Hospital tétel feltételei itt is teljesülnek, így újra alkalmazhatjuk, és kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6},$$

amennyiben használjuk a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ függvényhatárértéket.

Magyarázat:

Vannak feladatok, ahol a L'Hospital szabály még többszöri használatával jutunk eredményhez. Fontos, hogy minden alkalommal meggyőződjünk arról, hogy a szabály feltételei maradéktalanul teljesülnek, mint ahogy arról is, hogy a szabály használatával a feladatot nem bonyolítjuk el.

Mintafeladat: Amikor nem segít a L'Hospital szabály

Számítsuk ki a {Fmi:LH.nem}

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x+1}$$

határértéket.

Megoldás:

Javaslat:

Helyettesítsünk be x helyére ∞-t. Mit veszünk észre?

Lépés:

Ha $x \to \infty$, a számláló is és a nevező is ∞-hez tart. Továbbá találhatunk alkalmas (a, ∞) intervallumot, melyen a számláló és a nevező is differenciálható, valamint a nevező deriváltja nem 0 (pl. a $(2, \infty)$ egy ilyen intervallum). A L'Hospital szabály használásának feltétele már csak az, hogy létezzen a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1}$$

határérték, ez viszont nem teljesül. Így nem hsználható a L'Hospital szabály.

Javaslat:

Számítsuk ki más módszerrel ezt a határértéket, pl. x számlálóból és nevezőből való kiemelésével.

Lépés:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Magyarázat:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

mert itt $x \to \infty$ és így a $\sin x$ korlátos függvény, valamint a nullához tartó $\frac{1}{x}$ függvény szorzatának határértékéről van szó, ami 0.

A *Középértéktételek. L'Hospital szabály* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:

Adjuk meg a L'Hospital szabály segítségével a {KLH-001}

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos 3x}{2x^2 + 100}$$

értékét.(Csak számot lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos 3x}{2x^2+100}$ értéke 0 .

Megoldás:

Behelyettesítve x helyére ∞-t, $\frac{\infty}{\infty}$ esetet kapunk. A $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékekre és $x_0 = \infty$-re megfogalmazott L'Hospital szabály többi feltétele is teljesül, így ezt alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos 3x}{2x^2 + 100} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x + \cos 3x)'}{(2x^2 + 100)'} = \lim_{x\to\infty} (1 - 3\sin 3x) \cdot \frac{1}{4x} = 0.$$

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbiak közül Rolle tételét: {KLH-002}

- ○ Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $f'(c) = 0$.
- ○ Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és $f(a) = f(b)$, akkor létezik pontosan egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $f'(c) = 0$.
- ● Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és $f(a) = f(b)$, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$, melyre $f'(c) = 0$.
- ○ Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Megoldás:
Az első állítás hamis, mert hiányzik az $f(a) = f(b)$ feltétel. Pl. az $f : [1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$ függvény folytonos az $[1, 3]$ zárt intervallumon és differenciálható az $(1, 3)$ nyílt intervallumon, mégsem létezik olyan $c \in (1, 3)$, melyre $f'(c) = 0$.

Ide jön az $f : [1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$ függvény REC-04-11.png ábrája

A második állítás azért hamis, mert semmi nem garantálja a pontosan egy $c \in (a, b)$ közbülső értéket, melyre $f'(c) = 0$, lehet akár több ilyen közbülső érték is. Például a szinusz függvény $[0, 4\pi]$ intervallumra való leszűkítését tekintve, az állítás feltételei teljesülnek mind, mégis 0 és 4π között nem egyetlen, hanem pontosan 4 helyen is nulla a derivált függvény értéke.

A harmadik állítás pontosan Rolle tétele, így az a keresett állítás.

A negyedik állítás egy igaz állítás, csak nem Rolle tétele, hanem Lagrange tétele, így az egyetlen kiválasztandó állítás a harmadik.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat! {KLH-003}

- ☒ A Lagrange-féle középértéktétel nem más, mint a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete.
- ☐ A Cauchy-féle középértéktétel nem más, mint a Lagrange-féle középértéktétel speciális esete.
- ☐ Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre megfogalmazott Rolle tétele az f függvény zérushelyeinek megtalálását szolgálja.
- ☐ Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre megfogalmazott Rolle tétele az f' függvény zérushelyeinek pontos számát adja meg.

☐ A feladat előző állításai mind hamisak.

Megoldás:
Az első állítás igaz, ezt mondja ki a Lagrange-féle és a Cauchy-féle középértéktétel kapcsolatáról szóló megjegyzés.

A második állítás hamis. Csak a Lagrange-féle középértéktétel speciális esete a Cauchy-féle középértéktételnek, a Cauchy-féle középértéktétel a Lagrange-féle középértéktételnél többet állít, ugyanis a benne szereplő $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény hozzárendelési szabálya nem csupán $g(x) = x$ lehet.

A harmadik állítás hamis, mert egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre megfogalmazott Rolle tétel az f' függvény zérushelyének létezéséről, és nem az f függvény zérushelyeinek megtalálásáról szól.

A negyedik állítás is hamis, mert a derivált zérushelyeinek számáról Rolle tétele nem ad pontos információt, csak azt állítja, hogy amennyiben Rolle tételének feltételei teljesülnek, létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy $f'(c) = 0$.

Az ötödik állítás is hamis, mert az első állítás igaz. Tehát csak az első állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat! {KLH-004}

☐ A L'Hospital szabály a $\frac{0}{0}$ alakú határértékek mindegyikénél használható.

☐ A L'Hospital szabály a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ alakú határértékek mindegyikénél használható.

☒ A $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{2x+1}$ határértéknél nem használható a L'Hospital szabály.

☒ Az $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$ függvényre használhatjuk Rolle tételét.

Megoldás:
Az első két állítás hamis, hiszen mind a $\frac{0}{0}$ típusú határértékekre vonatkozó L'Hospital szabály, mind pedig a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékekre vonatkozó L'Hospital szabály komoly feltételrendszerrel rendelkezik, a $\frac{0}{0}$, vagy a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ alak mellett egyéb követelményeknek is teljesülniük kell.

A harmadik állítás igaz, ez is a második állítás hamisságát támasztja alá, hiszen a $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{2x+1}$ határérték $\frac{\infty}{\infty}$ eset, de a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x - \sin x)'}{(2x+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \cos x}{2}$$

határérték nem létezik, mert a koszinusz függvény grafikonjának alakja miatt a $\lim_{x\to\infty} \cos x$ határérték nem létezik. Így a L'Hospital szabály nem használható az eredeti határérték kiszámolásánál, ami nem azt jelenti, hogy maga a határérték ne létezne. A határértéket nem L'Hospital szabállyal számoljuk ki, hanem a következőképpen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - \sin x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2 - \frac{\sin x}{x})}{x(2 + \frac{1}{x})} = 1,$$

mivelhogy mind a $\frac{\sin x}{x}$, mind pedig az $\frac{1}{x}$ 0-hoz tartanak, ha $x \to \infty$.

A negyedik állítás is igaz, mert Rolle tételének minden feltétele teljesül az f függvényre: f folytonos a $[-2, 1]$ zárt intervallumon, differenciálható a $(-2, 1)$ nyílt intervallumon és az $f(-2) = f(1) = 1$. Tehát a harmadik és negyedik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:

Válasszuk ki az igaz állításokat! {KLH-005}

- ☐ A Lagrange-féle középértéktétel azt mondja ki, hogy ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik pontosan egy olyan $c \in (a, b)$ hely, melyben az f függvény grafikonjához húzott érintő egyenes párhuzamos az f grafikonjának $(a, f(a))$, valamint $(b, f(b))$ pontjait összekötő szelővel.
- ☒ A Lagrange-féle középértéktétel azt mondja ki, hogy ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, melyben az f függvény grafikonjához húzott érintő egyenes párhuzamos az f grafikonjának $(a, f(a))$, valamint $(b, f(b))$ pontjait összekötő szelővel.
- ☒ A Cauchy-féle középértéktétel azt mondja ki, hogy ha az f és g függvények folytonosak az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálhatók az (a, b) nyílt intervallumon és minden $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik legalább egy $c \in (a, b)$, melyre
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
- ☐ A Cauchy-féle középértéktétel azt mondja ki, hogy ha az f és g függvények folytonosak az $[a, b]$ zárt intervallumon, differenciálhatók az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik legalább egy $c \in (a, b)$, melyre
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Megoldás:

Az első állítás hamis, mert a Lagrange-féle középértéktétel geometriai interpretációja azt mondja ki, hogy a felsorolt feltételek mellett létezik legalább egy (és nem pontosan egy) olyan $c \in (a, b)$ hely, melyben az f függvény grafikonjához húzott érintő egyenes párhuzamos az f grafikonjának $(a, f(a))$, valamint $(b, f(b))$ pontjait összekötő szelővel. Például az alábbi ábrán látható függvény esetében három ilyen tulajdonságú c_1, c_2, c_3 pont is létezik:

Ide jön a LAP-04-12.png ábra

Emiatt a második állítás, ami pontosan ezt mondja ki, igaz.

A harmadik állítás pontosan a Cauchy-féle középértéktétel állítása.

A negyedik állítás pedig azért hamis, mert g lehet konstans függvény is, melynek deriváltja 0, így a

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

képlet mindkét oldalán szereplő törtek nevezője 0, ami lehetetlen. Tehát a második és harmadik állítás igaz, a többi hamis.

5. A differenciálszámítás alkalmazásai

5.1. Szélsőértékek

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri az abszolút és lokális szélsőérték fogalmát,
- érti a differenciálható függvény deriváltja és monotonitása közötti kapcsolatot,
- meg tudja állapítani a monotonitási intervallumokat a derivált előjelének vizsgálatával,
- differenciálható függvények esetén a legtöbb esetben lokális és abszolút szélsőértékeket tud számolni (amennyiben azok léteznek),
- szöveges szélsőérték feladatot tud megoldani, amennyiben az egyváltozós valós függvény szélsőértékével kapcsolatos.

5.1.1. Abszolút és lokális szélsőértékek

Abszolút szélsőértékek

Definíció: Abszolút (globális) szélsőértékhelyek/szélsőértékek
Az f egyváltozós valós függvénynek az $x_0 \in D_f$ **abszolút (vagy globális) maximumhelye** (vagy **x_0-ban az f függvénynek abszolút maximuma van** és ennek értéke $f(x_0)$), ha {Fde:absz.szels}

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D_f.$$

Az f egyváltozós valós függvénynek az $x_0 \in D_f$ **abszolút (vagy globális) minimumhelye** (vagy **x_0-ban az f függvénynek abszolút minimuma van** és ennek értéke $f(x_0)$), ha

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D_f.$$

Példa:
Határozzuk meg az

a) abszolútérték-függvény,

b) konstans függvény,