Mat G2 8. gyakorlat

1, Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények értelmezési tartományát!

a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ b, $f(x,y) = \dfrac{x+2}{4-x^2-y^2}$

c, $f(x,y) = \arcsin(y-x)$

Mo:

a) $\sqrt{x^2+y^2} > 0$, azaz $T := \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$

b, $4-x^2-y^2 \neq 0$, azaz $T := \{(x,y) : x^2+y^2 \neq 4\}$

c, Az $x \to \arcsin x$ függvény miatt:

$|y-x| \leq 1$ miatt: $-1 \leq y-x \leq 1$

, azaz $T := \{(x,y) : -1+x \leq y \leq 1+x\}$ sáv.

2, Szemléltessük az alábbi felületet:

a) $z = x^2+4y^2$ b, $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

Mo:

a) Elliptikus paraboloid felület

ui $z=c$ síkkal való metszetgörbe:

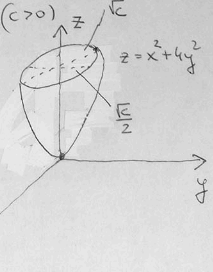
$$z = c = x^2+4y^2 \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} \quad (c>0)$$

, azaz $\sqrt{c}$ és $\frac{\sqrt{c}}{2}$ féltengelyű ellipszis.

$x=c$ és $y=c$ síkkal való metszetgörbe:

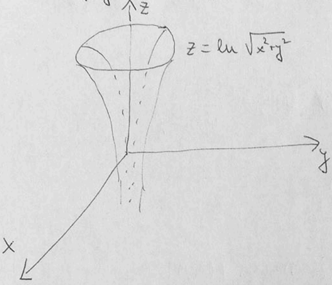
$$z = c^2+4y^2 \quad \text{ill.} \quad z = x^2+4c^2$$

$\Rightarrow$ parabola



b) A felület a $z = \ln x$, $y = 0$ (meridiángörbe)

z tengely körüli megforgatásával áll elő.



$z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

<u>Megjegyzés:</u>

A $z = f(x)$, $y = 0$ görbe z tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület egyenlete:

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

<u>3. feladat:</u> Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények megadott pontbeli határértékét!

a) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{xy+x+y}$ c) $\lim\limits_{(0,0)} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{(2,+\infty)} \dfrac{2xy-1}{y+1}$ f) $\lim\limits_{(0,+\infty)} x\sin y$

g) $\lim\limits_{(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ h) $\lim\limits_{(+\infty,0)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

<u>Mo:</u> a) Felcserélt limeszekkel:

$$1 = \underbrace{\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}}_{=1} \frac{x-y}{x+y} \neq \underbrace{\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}}_{=-1} \frac{x-y}{x+y} = -1$$

Így a limesz sem létezhet.

b) felcserélt limesznél:

$$1 = \underbrace{\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy-x+y}{xy+x+y}}_{=1} \neq \underbrace{\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy-x+y}{xy+x+y}}_{=-1} = -1$$

c) $\lim\limits_{(0,0)} xy \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$, ugyanis

$\lim\limits_{(0,0)} xy = 0$ és $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ugyan nem létezik, de

$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$. Mivel 0-hoz tartó × korlátos limesze mindig 0, ezért a határérték 0-val egyenlő.

d) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ nem létezik ui $y = mx$ $(m \in \mathbb{R})$ egyenes mentén az origóba tartva:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2} \quad \text{lenne}$$

ebben az esetben a limesz függne m-től. Más m-re más lenne a limesz ↯

e) $\lim\limits_{(2,+\infty)} \dfrac{2xy-1}{y+1} = 4$, ugyanis definíció alapján:

$$\left|\frac{2xy-1}{y+1} - 4\right| = \left|\frac{2xy-1-4y-4}{y+1}\right| = \left|\frac{2(x-2)y-5}{y+1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2|x-2|\cdot|y|}{|y+1|} + \frac{5}{|y+1|} \leq 2|x-2| + \frac{5}{y+1}$$

Látható, hogy az első tag ezért lesz „kicsi", mert $x \approx 2$, a második tag ezért lesz kicsi, mert $y \to +\infty$.

Így a $\dfrac{2xy-1}{y+1} \sim 4$, ha $x \sim 2$ és y nagy.

Megj: Más miatt is látható, hogy a limesz 4 ui ha $x \sim 2$, akkor $\dfrac{2xy-1}{y+1} \sim \dfrac{4y-1}{y+1} \sim 4$

f) $\lim\limits_{(0,+\infty)} x \sin y = 0$ ui (lsd c) feladat)

0-hoz tartó x korlátos limene 0.

$|x \sin y - 0| \leq |x|$ és $x \sim 0$

g) $\lim\limits_{(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} = 0$

Ugyanis $x^2+y^2 < (x+y)^2$ $(x>0, y>0)$ miatt

$\lim\limits_{(+\infty,\infty)} (x+y)^2 e^{-(x+y)} > \lim\limits_{(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2) e^{-(x+y)}$

Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{(+\infty,+\infty)} (x+y)^2 e^{-(x+y)} = 0$

Legyen $u := x+y$. Ekkor $\lim\limits_{(+\infty,+\infty)} (x+y)^2 e^{-(x+y)} =$

$= \lim\limits_{u \to +\infty} u^2 e^{-u} = 0$ (Pl. B-L szabállyal is ki jön)

Így a rendőrszabály miatt

$$0 \leq \underbrace{\lim_{(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2) e^{-(x+y)}}_{\Downarrow \; 0} < \underbrace{\lim_{(+\infty,+\infty)} (x+y)^2 e^{-(x+y)}}_{\Downarrow \; 0}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2) e^{-(x+y)} = 0$

h) jel $A = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

Logaritmizálva:

$$\ln A = \frac{x^2}{x+y} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+y} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ miatt:}$$

$$\lim_{(+\infty,0)} \ln A = \lim_{(+\infty,0)} \frac{x}{x+y} \cdot \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 \cdot 1$$

így $\lim\limits_{(+\infty,0)} A = e$

4. feladat Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Mo Térjünk át polárkoordinátákra - úgy hogy

$r = r(\varphi)$, ahol $\varphi \to +\infty$ esetén $r(\varphi) \to 0$

tetszőleges görbe. Ekkor $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ miatt

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 0 \quad \text{így}$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

5 feladat Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait!

a) $f(x,y) = x^y + y^x$ b, $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

Mo a)

$$\partial_1 f(x,y) = yx^{y-1} + y^x \cdot \ln y$$

$$\partial_2 f(x,y) = x^y \cdot \ln x + xy^{x-1}$$

b,

$$\partial_1 f(x,y,z) = \frac{yz\cdot(x^2+y^2+z^2) - xyz\cdot(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\partial_2 f(x,y,z) = \frac{xz(x^2+y^2+z^2) - xyz\cdot(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\partial_3 f(x,y,z) = \frac{xy(x^2+y^2+z^2) - xyz\cdot(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

6. feladat: Terjesszük ki a folytonosság megtartásával $\mathbb{R}^2$-re az alábbi függvényt!

$$f(x,y)=\frac{\sin xy}{x}$$

Mo: Az f $x\neq 0$ esetén van értelmezve és itt folytonos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot y=y$$

Így a kiterjesztett függvény

$$f^*(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x} & x\neq 0\\[2ex] y & x=0\end{cases}$$

A fentiek alapján $\lim\limits_{x\to 0} f^*(x,y)=f^*(0,y)=y$ így $f^*\in C(\mathbb{R}^2)$