

Tétel Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt tartomány! Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható D -ben és $df(\underline{x}, \underline{h}) \equiv 0$, akkor f állandó.

Bizonyítás. Az előző tétel értelmében $\forall \underline{a}, \underline{b} \in D$ -hez van az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő szakaszon olyan $\underline{c}$ pont, hogy $f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = df(\underline{c}, \underline{b} - \underline{a}) = 0$ mivel D konvexitása miatt $\underline{c} \in D$. $\square$

Példa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{3x^2 + 4y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{7}, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Mutassa meg, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nem létezik!
2. Hol differenciálható totálisan az f kétváltozós függvény? $\text{grad} f = ?$
3. Írja fel a $P = (0, 1)$ ponthoz tartozó érintősík egyenletét!
4. $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(0,1)} = ?$ ill. $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(0,0)} = ?$, ha $\underline{e} = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}$ ($\underline{e}$ irányú iránymenti derivált).

Megoldás: 1.

$$\lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^2 \cos \varphi_n \sin \varphi_n}{\varrho_n^2 (3 \cos^2 \varphi_n + 4 \sin^2 \varphi_n)}$$

függ φ_n -től, ezért a határérték nem létezik.

2. $\text{grad} f(\underline{0})$ nem létezik, mert f nem folytonos $\underline{0}$ -ban. (Szükséges feltétel nem teljesül.)
Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor f'_x és f'_y létezik és folytonos $\implies \exists \text{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j}$, ahol

$$f'_x = \frac{y(3x^2 + 4y^2) - xy \cdot 6x}{(3x^2 + 4y^2)^2},$$

és

$$f'_y = \frac{x(3x^2 + 4y^2) - xy \cdot 8y}{(3x^2 + 4y^2)^2}.$$

3. Az érintősík egyenlete:

$$f'_x(0, 1)(x - 0) + f'_y(0, 1)(y - 1) - (z - f(0, 1)) = 0.$$

Behelyettesítve $f'_x(0, 1) = \frac{1}{4}$, $f'_y(0, 1) = 0$, $f(0, 1) = 0$, így

$$\frac{1}{4}(x - 0) + 0 \cdot (y - 1) - (z - 0) = 0 \implies z = \frac{1}{4}x.$$

Magasabbrendű parciális deriváltak

Az n -változós függvény bármely parciális deriváltfüggvénye újból n -változós függvény. Ezért beszélhetünk ennek a függvénynek is a parciális deriváltjairól. Így jutunk el a másodrendű parciális deriváltakhoz.

Példa kétváltozós függvény esetére:

$$f(x, y) = e^{2x} \cos 2y + x^2 - y^2.$$

Ekkor

$$f'_x(x, y) = 2e^{2x} \cos 2y + 2x, \quad f'_y(x, y) = -2e^{2x} \sin 2y - 2y,$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x} \cos 2y + 2,$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^{2x} \cos 2y - 2,$$

f''_{xx} és f''_{yy} a tiszta másodrendű parciális deriváltak.

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4e^{2x} \sin 2y,$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4e^{2x} \sin 2y.$$

f''_{xy} és f''_{yx} a vegyes másodrendű parciális deriváltak.

A másodrendű parciálisak újra kétváltozós függvények! Vegyük észre, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, tehát az eredmény nem függ a differenciálás sorrendjétől. Ez nem véletlen. Látni fogjuk, hogy elég "szép" függvény esetén ez mindig így van. (Young tétel.)

Másképpen vegyük észre, hogy most a tiszta másodrendű parciális deriváltak összege minden (x, y) pontban nullát ad, azaz $f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = 0$. Tehát f megoldása az úgynevezett síkbeli Laplace-differenciálegyenletnek:

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Ha ez a tulajdonság teljesül, a függvényt *harmonikus függvénynek* nevezzük. Tehát a síkbeli Laplace egyenlet megoldásai a harmonikus függvények. Nagy szerepet játszanak az ilyen függvények a komplex függvénytanban és a potenciálméletben. És most általánosságban is definiáljuk a másodrendű parciális deriváltakat!

3.84. Definíció A $g(\underline{x}) = f'_{x_i}(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}}$ n -változós függvény x_j változó szerinti parciális derivált függvényét az f i -edik és j -edik változója szerinti másodrendű parciális deriváltjának nevezzük (ha létezik). A következő jelöléseket használjuk:

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = D_{ij} f.$$

Magasabbrendű parciális deriváltak értelemszerűen definiálhatók.

Ha $i = j$, akkor tiszta, különben vegyes másodrendű parciális deriváltról beszélünk.

Definíció Ha f (totálisan) deriválható valamely $K_{\underline{a}}$ -ban, és (elsőrendű) parciális deriváltjai (totálisan) deriválhatók $\underline{a}$ -ban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer (totálisan) deriválható $\underline{a}$ -ban.

Magasabbrendű deriválhatóság értelemszerűen definiálható.

A következő példa mutatja, hogy a magasabbrendű parciális deriváltak definíciójában fontos a változók sorrendje, ettől függhet a vegyes másodrendű parciális derivált.

Példa Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0)! \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

és

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

így

$$f'_x(0, y) = -y \quad \text{és} \quad f'_y(x, 0) = x,$$

ezért

$$f''_{xy}(0, 0) = -1 \quad \text{és} \quad f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

A következő tétel azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett, nem kell a deriválás sorrendjére figyelni.

Tétel (Young) Ha f kétszer (totálisan) deriválható $\underline{a}$ -ban, akkor $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right|_{\underline{a}} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\underline{a}}.$$

Az r -szeres folytonos deriválhatóságot az egyváltozós esethez hasonlóan az r -edik derivált folytonosságaként lehetne definiálni, de az ehhez szükséges fogalmakra nincs szükségünk, ha a következő definíciót mondjuk.

Definíció Azt mondjuk, hogy f r -szer folytonosan deriválható a $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, ha r -edrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak D -n.

Jelölés: $f \in C_D^r$.

Megjegyzés Ha $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f \in C_D^r$, és $\underline{a} \in D$, akkor f r -szer deriválható $\underline{a}$ -ban.

Ha $q \leq r$, akkor $C_D^r \subset C_D^q$.

Következmény Ha $f \in C_{K_{\underline{a}}}^r$, akkor f -nek az r -edrendű parciális deriváltjai közül mindazok megegyeznek, amelyek csak a deriválások sorrendjében különböznek egymástól.

Például, ha f kétváltozós függvény és $f \in C_{K_{\underline{a}}}^3$, akkor

$$f_{xxy}'''(\underline{a}) = f_{xyx}'''(\underline{a}) = f_{yxx}'''(\underline{a}).$$

Vagy ha f háromváltozós függvény és $f \in C_{K_{\underline{a}}}^3$, akkor

$$f_{xyz}'''(\underline{a}) = f_{xzy}'''(\underline{a}) = f_{yxz}'''(\underline{a}) = f_{yzx}'''(\underline{a}) = f_{zxy}'''(\underline{a}) = f_{zyx}'''(\underline{a}).$$

Magasabbrendű differenciálok

Másodrendű esetben fogjuk látni, hogy a Hesse-mátrixot tekinthetjük másodrendű deriváltaknak, de ettől magasabbrendű totális derivált értelmezése nehézkes lenne. Ehelyett a magasabbrendű differenciálokkal foglalkozunk.

Az f $\underline{a}$ -ban deriválható függvény $\underline{a}$ pontbeli differenciálja a $\underline{h}$ megváltozásnál:

$$df(\underline{a}, \underline{h}) = f'_{x_1}(\underline{a})h_1 + f'_{x_2}(\underline{a})h_2 + \dots + f'_{x_n}(\underline{a})h_n = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a})h_i = \text{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h}.$$

Kétváltozós függvény esetén $\underline{a} = (x, y)$ és $\underline{h} = (h_1, h_2)$ jelöléssel

$$df(\underline{a}, \underline{h}) = f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2.$$

Háromváltozós függvény esetén pedig $\underline{a} = (x, y, z)$ és $\underline{h} = (h_1, h_2, h_3)$ jelöléssel

$$df(\underline{a}, \underline{h}) = f'_x(x, y, z)h_1 + f'_y(x, y, z)h_2 + f'_z(x, y, z)h_3.$$

Például $f(x, y, z) = xy^3 + xyz$ esetén

$$df(\underline{x}, \underline{h}) = (y^3 + yz)h_1 + (3xy^2 + xz)h_2 + xyh_3.$$

Ez egy $2n = 6$ -változós függvény.

Másodrendű differenciál

Az elsőrendű differenciálban rögzítsük a $\underline{h}$ vektort! Ekkor ennek az $\underline{a}$ -tól függő függvénynek is vehetjük az $\underline{a}$ -beli differenciálját $\underline{h}$ megváltozás mellett. (Természetesen csak akkor, ha az elsőrendű parciálisak differenciálhatók. Ezt úgy érhetjük el, ha például feltesszük, hogy f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak.) Tehát a másodrendű differenciál az elsőrendű differenciál elsőrendű differenciálja.

Definíció Ha f kétszer (totálisan) deriválható $\underline{a}$ -ban, akkor azt mondjuk, hogy

$$d^2 f(\underline{a}, \underline{h}) = d(df(\underline{a}, \underline{h}))(\underline{a}, \underline{h})$$

az f függvény $\underline{a}$ pontbeli másodrendű differenciálja $\underline{h}$ megváltozásnál.

Kétváltozós függvény esetén $\underline{a} = (x, y)$ és $\underline{h} = (h_1, h_2)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} d^2 f(\underline{a}, \underline{h}) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} (f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2) \cdot h_2 = \\ &= (f''_{xx}(x, y)h_1 + f''_{yx}(x, y)h_2) \cdot h_1 + (f''_{xy}(x, y)h_1 + f''_{yy}(x, y)h_2) \cdot h_2 = \\ &= f''_{xx}(x, y) \cdot h_1^2 + 2f''_{xy}(x, y) \cdot h_1 h_2 + f''_{yy}(x, y) \cdot h_2^2. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy Young-tétele miatt $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$.

Ha (x, y) -t rögzítjük, akkor $d^2 f(\underline{a}, \underline{h})$ kvadratikus függvénye (csak másodfokú tagokból álló polinomja) a h_1, h_2 változóknak. A kifejezés mátrixosan felírva jobban átlátható:

$$d^2 f(\underline{a}, \underline{h}) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \underline{h}^T \underline{\underline{H}} \underline{h}.$$

$\underline{\underline{H}}$ neve: Hesse-féle mátrix, lásd $\underline{\underline{H}}$ szimmetrikus mátrix.