1, Számítsuk ki az alábbi parciális deriváltakat!

$$f(x,y) = g\left(u(x,y), v(x,y)\right) = u^2 - 2ue^v$$

, ahol $u(x,y) = x^2y - 2xy$ és $v(x,y) = \sin(x+y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial f}{\partial y} = ?$

Mo Alkalmazzuk a láncszabályt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

így

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2u - 2e^v)\cdot(2xy - 2y) + (-2ue^v)\cdot\cos(x+y) =$$

$$= \left(2x^2y - 4xy - 2e^{\sin(x+y)}\right)(2xy - 2y) - 2(x^2 - 2xy)e^{\sin(x+y)}\cdot\cos(x+y)$$

ill

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2u - 2e^v)(x^2 - 2x) + (-2ue^v)\cdot\cos(x+y) = \rightsquigarrow$$

2, Adjuk meg a következő felület megadott pontjában az érintősík egyenletét!

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \qquad P(1,1)$$

Mo: Az érintősík egyenlete (x_0, y_0) pontban

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0)$$

így $f'_x(x,y) = 2x + y$, $f'_y(x,y) = x + 2y$

, azaz $z = 3(x-1) + 3(y-1) + 3$, $z = 3x + 3y - 3$

3, Adjuk meg az előbbi függvény megadott pontbeli, megadott irányú iránymenti deriváltját!

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 \quad P(1,1) \quad \underline{v}(3,4)$

b) $f(x,y,z) = x^2 + xz + y^2 + 2z^2 + y \quad P(1,1,1) \quad \underline{v}(2,3,4)$

<u>Mo</u>

$$\partial_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \operatorname{grad} f(\underline{x}_0) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$ összefüggéssel

a) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} \quad \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T$ miatt

$$\partial_{\underline{v}} f(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{22}{5}.$$

b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 2y+1 \\ x+4z \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{(2,3,4)}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\underline{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\underline{k}$

miatt

$$\partial_{\underline{v}} f(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{29}} + \frac{15}{\sqrt{29}} + \frac{20}{\sqrt{29}} = \frac{41}{\sqrt{29}}$$

4) Adjuk meg az előbbi kétváltozós függvény lokális szélsőértékhelyeit és vizsgáljuk meg ezek minőségét!

a) $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

<u>Mo</u>

a) <u>1. lépés</u> : Megadjuk a lehetséges szélsőértékhelyeket.

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 3x^2 + y = 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= x + 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = -3x^2 \quad \Rightarrow x + 27x^4 = 0 \Rightarrow x(1+27x^3) = 0$$

így $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$

Így a lehetséges szélsőértékhelyek

$P_1(0,0)$ és $P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2. lépés: Megvizsgáljuk, hogy az f függvény 2. deriváltja, az ún. Hesse-mátrix milyen definit a fenti pontokban.

$$f''(x,y) \approx H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x,y) & \partial_{12} f(x,y) \\ \partial_{21} f(x,y) & \partial_{22} f(x,y) \end{pmatrix}$$ szimmetrikus mátrix (esetünkben)

Ekkor
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$ miatt

$H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinit ui. a főminormátrix determinánsainak sorozata $0, -$. Így a P_1-ben nyeregpontja van.

$H(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ negatív definit ui. a főminormátrix determinánsainak sorozata $(-, +)$. Így a P_2-ben lokális maximum van.

b) Az a)-hoz hasonló módszerrel

1 lépés:
$$\left.\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 2x + y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= x + 2y - \frac{1}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x^3 + x^2y - 1 = 0 \\ 2y^3 + xy^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$ Kivonva egymásból: $2(x^3 - y^3) + xy(x-y) = 0$

azaz $2(x-y)(x^2+xy+y^2) + xy(x-y) = 0 \Rightarrow$

$(x-y)\left[2x^2 + 2xy + 2y^2 + xy\right] = 0$, azaz

$(x-y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0$

1 eset: $x = y$

Ekkor

$$2x^3 + x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \ y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

2 eset: $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$

Látható, hogy $2x^2 + 3xy + 2y^2 \geq 0$ és az egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = y = 0$

ugyanis $2x^2 + 3y \cdot x + 2y^2 = 0$ esetén

$$D = 9y^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2y^2 = 9y^2 - 16y^2 < 0$$

Így a lehetséges szélsőértékhelyek: $P_1\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$

2 lépés:

$$f''(x,y) \approx H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}, \text{ így}$$

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

A főminormátrix determináns sorozata $(+,+)$, ezért az f függvénynek a P_1-ben lokális minimuma van. (pozitív definit a mátrix)

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2 + 2z + xz + y^2 + 1$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Mo: I.

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 f(x,y,z) &= 2x + y + z = 0 \\ \partial_2 f(x,y,z) &= x + 2y = 0 \\ \partial_3 f(x,y,z) &= 2z + 2 + x = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow P_1\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Így a lehetséges szélsőértékhely $P_1\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

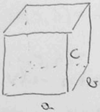
II.

$$H(x,y,z) \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. A főminormátrix determináns sorozata $(+,+,+)$, ezért a mátrix pozitív definit, azaz P_1-ben lokális minimumhelye van.

6.) Határozzuk meg annak a derékszögű hasábnak a maximális térfogatát, amely éleinek összege adott ℓ !

Mo:



$V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$

és $4(a+b+c) = \ell \Rightarrow c = \frac{1}{4}(\ell - 4b - 4a)$

Így $V(a,b) = a \cdot b \frac{1}{4}(\ell - 4b - 4a)$ függvény szélsőértékét kell meghatározni.

I. $\left.\begin{aligned} V'_a(a,b) &= \frac{1}{4} b\ell - b^2 - 2ab = 0 \\ V'_b(a,b) &= \frac{1}{4} a\ell - 2ab - a^2 = 0 \end{aligned}\right\}$

Így $\left.\begin{aligned} b\ell - 4b^2 - 8ab &= 0 \\ a\ell - 8ab - 4a^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ Kivonva egymásból:

$\ell(a-b) - 4(a^2 - b^2) = 0$, azaz $(a-b)(\ell - 4(a+b)) = 0$

a) $a = b \Rightarrow \frac{1}{4} a\ell - a^2 - 2a^2 = 0 \Rightarrow 3a^2 = \frac{1}{4} a\ell \quad /:a$

$a = \frac{\ell}{12}$ így a kritikus pont $P_1\left(\frac{\ell}{12}, \frac{\ell}{12}\right)$

b) $\ell = 4(a+b) \Rightarrow$ ekkor a $c = 0$ ↯

II. $V''(a,b) \sim H(a,b) = \begin{pmatrix} -2b & \frac{1}{4}\ell - 2b - 2a \\ \frac{1}{4}\ell - 2b - 2a & -2a \end{pmatrix}$

$H(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\ell}{6} & -\frac{1}{12}\ell \\ -\frac{1}{12}\ell & -\frac{\ell}{6} \end{pmatrix}$ A főminormátrix determinánsainak sorozata $(-,+)$, így a mátrix negatív definit, ezért a $P_1\left(\frac{\ell}{12}, \frac{\ell}{12}\right)$-ben maximális hely van.

Ekkor a $V(a,b) = \left(\frac{\ell}{12}\right)^3$

7) Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott feltételek mellett:

a) $f(x,y)=xy \qquad x^2+y^2=1$

b) $f(x,y)=x+y \qquad x^2+xy+y^2=3$

Mo: A feladatot Lagrange-féle multiplikátor-elv segítségével fogjuk megoldani.

a) Felírjuk a Lagrange-függvényt:

$$L(x,y,\lambda):=\underbrace{x\cdot y}_{f(x,y)}+\lambda\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\text{A feltételi egyenlet 0-ra}}$$

redukált alakja.

Ekkor a szükséges feltétel miatt:

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x,y,\lambda)=y+2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=x+2\lambda y=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-1=0 \end{array}\right\} \quad \lambda=-\frac{y}{2x}=-\frac{x}{2y} \quad (\text{Tfh } x,y\neq 0)$$

Így $2y^2=2x^2$, azaz $x=\pm y$. Így $x^2+x^2-1=0$

$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

W-tétel miatt elegendő vizsgálni az $f(P_i)$ $i=1..4$-et

$f(P_1)=\frac{1}{2} \quad f(P_2)=-\frac{1}{2} \quad f(P_3)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad f(P_4)=\frac{1}{2}$

Így $\max f(x,y)=\frac{1}{2}$, $\min f(x,y)=-\frac{1}{2}$.

b)
$$L(x,y,\lambda) = x+y+\lambda(x^2+xy+y^2-3)$$

$$\left.\begin{aligned} L'_x(x,y,\lambda) &= 1+2\lambda x+\lambda y = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) &= 1+\lambda x+2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+y^2+xy-3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = -\frac{1}{2x+y} = -\frac{1}{x+2y}$$

(Feltehető, hogy $2x+y \neq 0$, $x+2y \neq 0$)

Így $x+2y = 2x+y \iff x=y$

$\Rightarrow x^2+x^2+x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

A kritikus pontok $P_1(1,1)$ $P_2(-1,-1)$

W-tételt alkalmazva:

$f(P_1) = 2$ $f(P_2) = -2$, így

P_1-ben max, P_2-ben min hely.

$\max f(x,y) = 2$, $\min f(x,y) = -2$,