Magasabbrendű differenciál

Definíció *Ha f k-szor (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor azt mondjuk, hogy*

$$d^k f(\underline{a}, \underline{h}) = d\left(df^{k-1}(\underline{a}, \underline{h})\right)(\underline{a}, \underline{h})$$

az f függvény $\underline{a}$ pontbeli k-adrendű differenciálja $\underline{h}$ megváltozásnál.

Szélsőértékszámítás

Definíció *Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek! Azt mondjuk, hogy f-nek lokális mini-muma (illetve maximuma) van $\underline{a}$-ban, ha $\exists K_a \subset D$, hogy*

$$f(\underline{a}) \leq f(\underline{x}) \qquad (\textit{illetve } f(\underline{a}) \geq f(\underline{x})) \qquad (\underline{x} \in K_{\underline{a}})$$

(Nem szigorú szélsőértéket definiáltunk!)

Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)
Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek! Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, és létezik valamelyik változó szerinti parciális deriváltja, akkor az 0.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists f'_{x_i}(\underline{a})$, és legyen

$$g(x) = f(\underline{a} + x\underline{e_i})!$$

A parciális derivált definíciója szerint g deriválható 0-ban, és

$$g'(0) = f'_{x_i}(\underline{a}).$$

Másrészt g-nek lokális szélsőértéke van 0-ban, így az egyváltozós függvényeknél tanultak szerint

$$g'(0) = 0. \qquad \square$$

Megjegyzés *Ugyanezt iránymenti deriváltakra is elmondhatjuk.*

Következmény *Ha f-nek $\underline{a}$-ban lokális szélsőértéke van, és ott (totálisan) deri-válható, akkor*

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}.$$

Bizonyítás. A f-nek minden parciális deriváltja létezik, az előző tétel miatt ezek mind 0-k, így

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = (0, 0, \ldots, 0) = \underline{0}. \qquad \square$$

A következő példa azt mutatja, hogy a feltétel nem elégséges.

Megjegyzés *Tekintsük az*

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

függvényt!

$$f'_x(x, y) = -2x(y - 2x^2) - 4x(y - x^2), \qquad f'_y(x, y) = (y - 2x^2) + (y - x^2)$$

Mivel mindkettő folytonos, f (totálisan) deriválható, és $\operatorname{grad} f(\underline{0}) = \underline{0}$, *mégis f-nek nincs lokális szélsőértéke $(0, 0)$-ban, mert $f(0, 0) = 0$, ugyanakkor a függvény a $(0, 0)$ pont minden környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is.*

Ugyanis az $y = 2x^2$ parabola feletti pontokban $f(x, y) > 0 \quad (y > 2x^2 > x^2)$. Az $y = x^2$ parabola alatti pontokban szintén $f(x, y) > 0 \quad (y < x^2 < 2x^2)$. A két parabola között $(x^2 < y < 2x^2)$ viszont $f(x, y) < 0$.

Annak ellenére, hogy ennek a kétváltozós függvénynek az origóban nincs lokális szélsőértéke, mégis, ha a felületből az x,y síkra merőleges, az origón átmenő síkokkal kimetszünk felületi görbéket, akkor f-nek minden ilyen felületi görbe mentén lokális minimuma van. Ugyanis a metszetgörbe pontjaiban a függvényérték pozitív, legalábbis az origó egy átszúrt környezetében.

Az egyváltozós függvényeknél látottakhoz képest most más esetek is lesznek. Ahhoz, hogy ezekről beszéljünk, gondoljuk végig a következőt. Egy n-változós függvény második deriváltja a Hesse-mátrix lesz. Ez megfelel egy lineáris operátornak, ami egy vektort egyr észt egy nemnegatív számmal szoroz, másrészt pedig forgat. Ha minden vektor esetén a forgatás szöge hegyesszög, akkor a mátrixot pozitív definitnek, ha mindig tompaszög, akkor negatív definitnek nevezzük. Vagyis a szög koszinuszának előjelét vizsgáljuk, ami megegyezik a vektor és képe skaláris szorzatának előjelével.

Definíció *Az* $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *kvadratikus mátrixot pozitív (negatív) definitnek nevezzük, ha minden* $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ *esetén*

$$(\underline{x}, \underline{\underline{A}}\underline{x}) > 0 \qquad \big((\underline{x}, \underline{\underline{A}}\underline{x}) < 0\big)\,.$$

Ha a $>$ *(illetve* $<$*) helyett* $\geq$ *(illetve* $\leq$*) szerepel, akkor pozitív (illetve negatív) szemidefinitnek nevezzük a mátrixot.*

Végül azt mondjuk, hogy a mátrix indefinit, ha nem szemidefinit.

Megjegyzés $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *pontosan akkor indefinit, ha* $\exists x, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, *amire*

$$(\underline{x}, \underline{\underline{A}}\underline{x}) < 0 < (\underline{y}, \underline{\underline{A}}, \underline{y}).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan adunk elégséges feltételt lokális szélsőértékre. Valójában ez most egy szükséges feltételt is tartalmaz.

A tétel bizonyításához itt nem ismertetett eszközökre lenne szükség, ezért a tétel bizonyítását mellőzzük.

Tétel *Legyen* f *kétszer (totálisan) deriválható* $\underline{a}$*-ban!*

Ha $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ *és a Hesse-mátrix pozitív definit, akkor* f*-nek* $\underline{a}$*-ban lokális minimuma van.*

Ha $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ *és a Hesse-mátrix negatív definit, akkor* f*-nek* $\underline{a}$*-ban lokális maximuma van.*

Ha a Hesse-mátrix indefinit, akkor f*-nek* $\underline{a}$*-ban nincs lokális szélsőértéke.*

A következő, a definitség eldöntéséhez jól használható módszerhez szükséges a sarokminor fogalma.

Definíció *Az* $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix k-adik sarok determinánsa a bal felső* $k \times k$*-s aldetermin áns, amit* D_k *val jelölünk.*

Tétel *Az* $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix pontosan akkor pozitív definit (illetve szemidefinit), ha minden sarok determináns pozitív, azaz* $D_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ *(illetve ha minden sarok determin áns nem negatív, azaz* $D_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$*).*

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix pontosan akkor negatív definit (illetve szemidefinit), ha a sarok determinánsok váltakozó előjelűek, azaz* $(-1)^k D_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$ *(illetve ha* $(-1)^k D_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$*).*

A fenti tétel könnyen megjegyezhető, ha felhasználjuk, hogy a Hesse-mátrix szimmetrikus, így van sajátvektorokból álló ortonormált bázisa, amiben a mátrix diagonális, átlóban a sajátértékekkel. Ha csupa pozitív (illetve nem negatív) sajátérték van, akkor D_k-k mind pozitívak (illetve nem negatívak). Ha csupa negatív sajátérték van, akkor D_k-k váltakozó előjelűek.

Példa *Van-e lokális szélsőértéke az*

$$f(x, y) = xy$$

függvénynek?

Megoldás:

$$|f''(x, y)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

ezért $f''(x, y)$ indefinit, így sehol sincs lokális szélsőérték.

Az

$$f'_x = y = 0 \qquad f'_y = x = 0$$

egyenletrendszer megoldása az origó, így a szükséges feltétel csak itt teljesül, tehát csak itt lehetne lokális szélsőérték. Azokat a pontokat, ahol az első derivált 0 szokás extremális pontoknak hívni, vagyis az $f(x, y) = xy$ függvénynek az origó extremális pontja. Azokat az extremális pontokat, ahol a második derivált indefinit nyeregpontnak hívjuk, tehát az $f(x, y) = xy$ függvénynek az origó nyeregpontja.

Példa *Keressük meg az*

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 1$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás:

$$f'_x = 3x^2 - 3, \qquad f'_y = 3y^2 - 3, \qquad f'_z = 3z^2 - 3$$

A függvény mindenütt értelmezett, és parciálisan deriválható mindhárom változó szerint, így ahol lokális szélsőérték van, ott

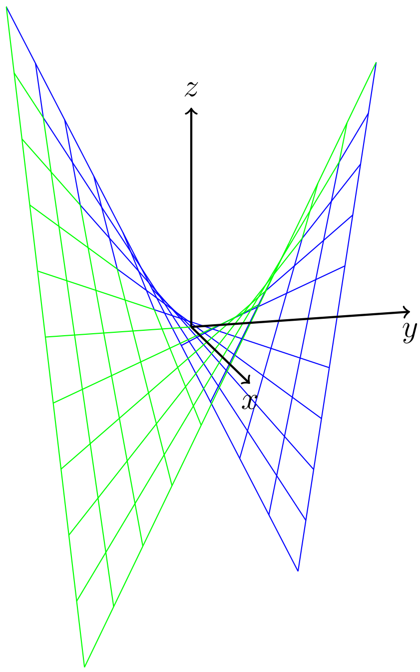
$$f'_x = f'_y = f'_z = 0$$

kell legyen. Az egyenletrendszernek 8 megoldása van, nevezetesen

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Csak ebben a 8 pontban lehet szélsőérték.

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 6y, \quad f''_z z = 6z, \text{ és } f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yx} = f''_{yz} = f''_{zx} = f''_{zy} = 0.$$



$$f(x, y) = xy$$

A másodrendű parciálisak mind folytonosak, így f mindenütt kétszer (totálisan, sőt folytonosan) deriválható, és a Hesse-mátrix

$$f''(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{bmatrix}.$$

Ez szerencsénkre éppen diagonális mátrix. Pozitív definit az $(1, 1, 1)$ pontban, itt lokális minimum van. Negatív definit a $(-1, -1, -1)$ pontban, itt lokális maximum van. Indefinit a másik 6 pontban, így ezekben nincs lokális szélsőérték.

Az előző példában 6 darab nyeregpont volt.

Tétel *Legyen (x, y) belső pontja D_f-nek úgy, hogy f kétszer (totálisan) derivál-ható $(x,$ $y)$-ban, és jelölje $\underline{\underline{H}}$ az f Hesse-mátrixát a-ban!*

Ha $f'(x, y) = 0$ és $\det(\underline{\underline{H}}) > 0$, akkor itt van lokális szélsőérték, méghozzá ha

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) > 0, & \text{akkor lokális minimum} \\ f''_{xx}(x, y) < 0, & \text{akkor lokális maximum.} \end{cases}$$

Ha $\det(\underline{\underline{H}}) < 0$, akkor itt nincs lokális szélsőérték.

Megjegyzés *A Hesse-mátrix szimmetriája miatt ha* $\det(\underline{\underline{H}}) > 0$, *akkor* $f''_{xx} = 0$ *nem lehet, továbbá ilyenkor* f''_{xx} *és* f''_{yy} *azonos előjelű.*

Ha $f' = 0$ *és* $\det(\underline{\underline{H}}) = 0$, *akkor a tétel alapján nem derül ki, van-e szélsőérték.*

Példa *Keresse meg az* $f(x, y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ *függvény lokális szélsőértékeit!*

Megoldás:

$$f'_x = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \qquad f'_y = 3y^2 - 3 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1.$$

$P_1 = (1, 1)$ *és* $P_2 = (1, -1)$ *pontokban lehet lokális szélsőérték.*

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 12y$$

$D(1, 1) = 12 > 0$ *és* $f''_{xx}(1, 1) > 0$, *így* $P_1 = (1, 1)$ *lokális minimumhely, a lokális minimum* $f(1, 1) = -3$.

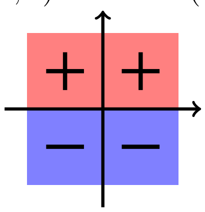
$D(1, -1) = -12 < 0$, *így* $P_2 = (1, -1)$*-ben nincs lokális szélsőérték, ez egy nyeregpont.*

Példa *Határozza meg az* $f(x, y) = x^2y^3$ *lokális szélsőértékeit!*

Megoldás: $f'_x = 2xy^3 = 0$ *és* $f'_y = 3x^2y^2 = 0$ *miatt* $x = 0$ *vagy* $y = 0$. *Tehát az* $(x, 0)$ *és a* $(0, y)$ *pontokban lehet lokális szélsőérték*

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{vmatrix} = 12x^2y^4 - 36x^2y^4 = -24x^2y^4$$

$D(x, 0) = 0$ *és* $D(0, y) = 0$, *így nem tudunk dönteni.*



Az x *tengely pontjaiban nincs lokális szélsőérték A függvényérték itt* 0 *és e pontok bármely környezetében a függvény felvesz pozitív és negatív értéket is. Az* y *tengely pontjaiban (az origót kivéve) van lokális szélsőérték:*

$(0, y), y > 0$ *pontokban lokális minimum van.*

$(0, y), y < 0$ *pontokban lokális maximum van.*