Definíció. *Jacobi-mátrixnaknevezzük egy n-változós függvény elsőrendűparciális deriváltjaittartalmazómátrixot.*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Definíció. *Legyen f(x), $x \in D(\subset \mathbb{R}^n)$ n-változós függvény, melynek létezik minden másodrendű parciális deriváltja az $a \in D$ pontban. Hesse-mátrixnak nevezzük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból alkotott négyzetes mátrixot.*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Feltételes szélsőérték probléma

A feltételes szélsőérték keresésekor úgy keressük az adott $f(x)$ függvény szélsőértékét, hogy közben egy, vagy több feltételnekis teljesülniekell.

Tétel. **(Lagrange-féle multiplikátor-módszer)** *Legyen f(x), $x \in D(\subset \mathbb{R}^n)$ n-változós függvény folytonosan differenciálhatóaz $a \in D$ pontban, továbbá g_i, $\forall i = 1...m$ folytonosan differenciálhatófüggvények, melyek értelmezve vannak az a pontban, és teljesülrá, hogy $g_i(a) = 0$, valamint $g_i'(a)$ Jacobi-mátrix sorvektorai lineárisan függetlenek. Ha f-nek feltételes szélsőértéke van az a-ban a $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0,\ \dots,\ g_m(x) = 0$ feltétel mellett, akkor az $L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \dots + \lambda_m g_m(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ Lagrange függvény összes parciális deriváltja eltűnik az a pontban:*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0,\ (i = 1, 2 \dots n).$$

Megjegyzés. A tételbenszereplő λ_i skalároka Lagrange-multiplikátorok,amelyekközül legalább az egyik nem nulla.

Kidolgozott feladatok

Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szélsőértékhelyét a $g(x, y) = x + y = 10$ feltétel mellett.

Megoldás:

Elsőként felírjuk a Lagrange-függvényt, majd meghatározzuk az elsőrendű parciális deriváltakat, amiket egyenlővé teszünk nullával.

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 10).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0. \tag{3.2}$$

A (3.1) és (3.2) egyenletekből lehetséges szélsőérték helyeket kapunk, de ezek még függnek a bevezetett λ multiplikátortól:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \tag{3.3}$$

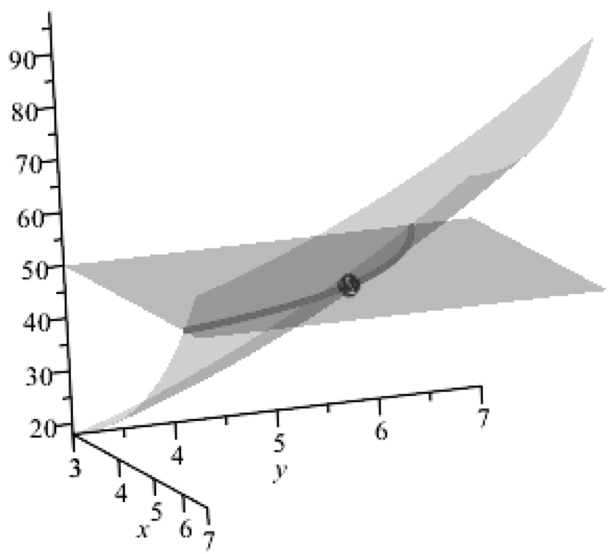
$$y = \frac{-\lambda}{2}. \tag{3.4}$$

A (3.3), (3.4) formulákból következik, hogy $-\dfrac{\lambda}{2} = x = y$, továbbá az $x+y = 10$ feltétel miatt $x = y = 5$.

Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szélsőértékeiaz $x + y = 10$ feltétel mellett az $(x, y) = (5, 5)$ pont, aminek értéke:

$$f(5, 5) = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50.$$

Ez az érték a függvény minimuma, mivel a feltételnek megfelelő (x, y) pontpárokat behelyettesítve 50-nél nagyobb értékeket kapunk.



Példa. Határozzuk meg az $f(x, \ y) = x+2y$ függvény szélsőérték helyét a $g(x, \ y) = x^2 + y^2 = 4$ feltétel mellett. Elsőként felírjuk a Lagrange-függvényt, majd meghatározzukaz elsőrendűparciális deriváltakat.

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Elsőrendű parciális deriváltak, amiket egyenlővé teszünk nullával:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2y\lambda = 0. \tag{3.6}$$

Az (3.5) és (3.6) egyenletekből lehetséges szélsőértékhelyeket kapunk, de ezek még függnek a bevezetett λ multiplikátortól:

$$x = \frac{-1}{2\lambda}, \tag{3.7}$$

$$y = \frac{-1}{\lambda}. \tag{3.8}$$

A (3.7) és (3.8) értékeket a feltételbe visszahelyettesítve kapunk a λ-ra megfelelő értékeket, amiket a parciális deriváltakba beírva megkapjuk a keresett (x, y) helyet:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}, \tag{3.9}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{4}. \tag{3.10}$$

Mindkét λ esetén vissza kell helyettesítenünk a parciális deriváltakba, hogy az összes lehetséges szélsőértékhelyet megkapjuk:

- $\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}$ esetén:

$$1 + 2x\frac{\sqrt{5}}{4} = 0, \tag{3.11}$$

$$2 + 2y\frac{\sqrt{5}}{4} = 0. \tag{3.12}$$

A (3.11) és (3.12) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk az egyik lehetséges szélsőérték helyet:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right).$$

- $\lambda_2 = -\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ esetén hasonlóan járunk el:

$$1 + 2x\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0, \tag{3.13}$$

$$2 + 2y\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0. \tag{3.14}$$

A (3.13) és (3.14) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a másik lehetséges szélsőértékhelyet:

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

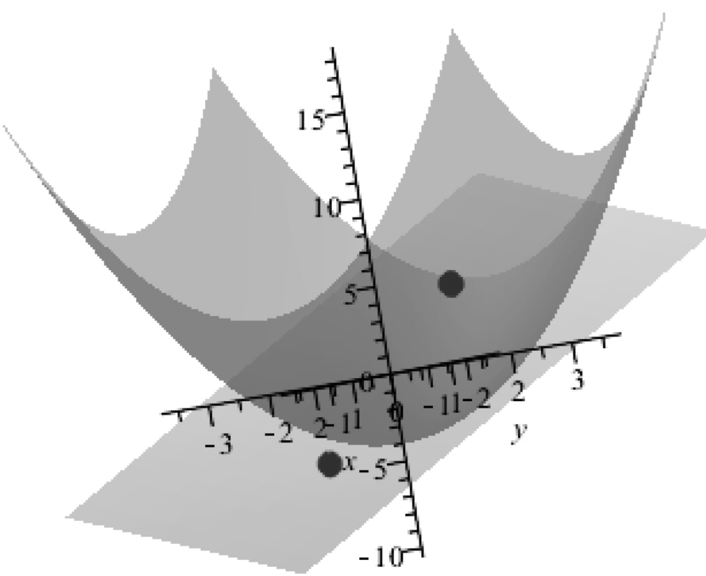
Az $f(x, y) = x + 2y$ függvénynek a $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$ feltétel mellett az $(x_1, y_1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ és $(x_2, y_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ pontokban van szélsőértéke, aminek értékei:

- (x_1, y_1) esetében minimuma van:

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} + 2\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{-10}{\sqrt{5}} \approx -4,47.$$

- (x_2, y_2) esetében maximuma van:

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4,47.$$



Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy$ függvény szélsőértékét a $g(x, y) = 3x^2 + y^2 = 6$ feltétel mellett. Először a Lagrange-függvényt írjuk fel, majd kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$L(x, y) = xy + \lambda(3x^2 + y^2 - 6). \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda 6x = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda 2y = 0. \tag{3.17}$$

A (3.16) és a (3.17) egyenleteket rendezve kapjuk az alábbi összefüggést:

$$y = -\lambda 6x, \tag{3.18}$$

$$x = -\lambda 2y. \tag{3.19}$$

Felhasználva a (3.19) formulát, y-ra a következő egyenlőséget kapjuk:

$$y = 12\lambda^2 y. \tag{3.20}$$

Ha y nulla, akkor a (3.19) miatt x-nek is nullának kell lennie, de ez nem teljesítené a feltételt, így $y \neq 0$. Tehát a (3.20) egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$12\lambda^2 = 1.$$

Helyettesítsük be a (3.18) egyenletet a feltételbe, majd hozzuk megfelelő alakra:

$$3x^2 + (-\lambda 6x)^2 = 6$$
$$3x^2 + 36\lambda^2 x^2 = 6,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$3x^2 + 3(12\lambda^2)x^2 = 6. \tag{3.21}$$

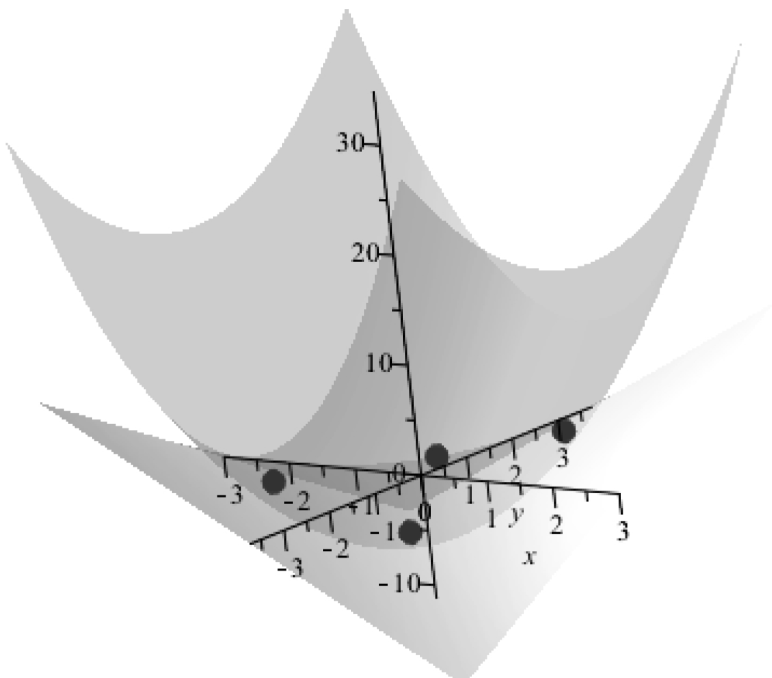
Mivel $12\lambda^2 = 1$, ezért (3.21) a következőt jelenti:

$$3x^2 + 3x^2 = 6. \tag{3.22}$$

(3.22)-ból következik,hogy $x = \pm 1, y = \pm\sqrt{3}$.
Az $f(x, y) = xy$ függvény szélsőértékhelye és annak értéke a $g(x, y) = 3x^2 + y^2 = 6$ feltétel mellett a következők:

$$f(1, \sqrt{3}) = \sqrt{3}, \qquad f(1, -\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$
$$f(-1, \sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \qquad f(-1, -\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

Az $(x, y) = (1, \sqrt{3})$ és a $(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$ pontokban maximuma, míg a $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$ és a $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ pontokban pedig minimuma van.



Példa. Keressük meg az $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ szélsőértékét a $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ feltétel mellett. A Lagrange-függvény felírása után meghatározzuk a parciális deriváltakat:

$$L(x, y, z) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \tag{3.23}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + 4\lambda y = 0, \tag{3.24}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6\lambda z = 0. \tag{3.25}$$

A (3.25) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $\lambda = 0$ vagy $z = 0$.

- Elsőként nézzük meg azt az esetet, amikor $\lambda = 0$. Ebben az esetben, a (3.23) és a (3.24) formulákból következik, hogy $x = 0$ és $y = 0$. Így a feltételből azt kapjuk, hogy $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$(x_2, y_2, z_2) = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

- Másodszor nézzük meg azt az esetet, amikor a $\lambda \neq 0$. A (3.25) egyenletből következik, hogy $z = 0$. Mivel a z változó csak a feltételben szerepel, így további esetszétválasztásra van szükségünk.

  1. Ha $x = 0$. Ekkor a feltételből következik, hogy $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz

  $$(x_3, y_3, z_3) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$
  $$(x_4, y_4, z_4) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

  1. Ha $x \neq 0$. Ebben az esetben a (3.23) egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\lambda = 1$. Ezzel együtt (3.24) csak akkor igaz, ha $y = 0$. Ezeket a feltételbe visszahelyettesítve megkapjuk az utolsó két szélsőértékhelyet:

  $$(x_5, y_5, z_5) = (1, 0, 0),$$
  $$(x_6, y_6, z_6) = (-1, 0, 0).$$

Végeredményben kapott szélsőértékhelyek, és ott a függvény értéke:

$$f\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0, \qquad f\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$
$$f\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad f\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f(1, 0, 0) = 1, \qquad f(-1, 0, 0) = 1.$$

Példa: Határozzuk meg az $f(x, y, z) = x + y + 2z$ függvény szélsőértékhelyét a $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$ feltétel mellett. Először felírjuk a Lagrange függvényt a λ

multiplikátor bevezetésével, majd meghatározzuk az x, y, és z szerinti parciális deriváltakat:

$$L(x, y, z) = x + y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3). \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda = 0, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2z\lambda = 0. \tag{3.29}$$

A (3.27), (3.28) és a (3.29) által alkotott egyenletrendszert elvégezve kapuk egy lehetséges (x, y, z) szélsőérték helyet, de ezek függnek λ-tól:

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \tag{3.30}$$

$$y = -\frac{1}{2\lambda}, \tag{3.31}$$

$$z = -\frac{1}{\lambda}. \tag{3.32}$$

Ezeket a feltételbe visszahelyettesítve kapunk λ-ra két megfelelő értéket:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{3.33}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.34}$$

A (3.33) és (3.34) segítségével megkapjuk a feltételt kielégítő szélsőértékhelyeket:

1. $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén:

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right).$$

2. $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén:

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right).$$

Ebben a két pontban a függvény értéke a következő:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \text{ ami a függvény maximuma,}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = -3\sqrt{2}, \text{ ami pedig a függvény minimuma.}$$