BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Farkas Miklósné

MATEMATIKAI FELADATTÁR
VIII.
KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Szerkesztette:
Antos Péter

Műegyetemi Kiadó, 2002.

(Hetedik utánnyomás)

Azonosító: **051411**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu Istvan
Terjedelem: 13 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0020-02

TARTALOMJEGYZÉK

	Feladatok sorszámai	Oldalszámok Feladat	Megoldás
ALAPFOGALMAK			
1. Differenciálegyenletek osztályozása	1-12	5-6	69
2. Differenciálegyenletek megoldásai	13-23	6-7	69-70
3. Görbesereg differenciálegyenlete	24-33	7-8	70-72
ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ..			
4. Szétválasztható változójú és az ilyenre visszavezethető differenciálegyenletek	34-62	9-12	72-80
5. Lineáris és lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek	63-96	13-16	81-88
6. Egzakt differenciálegyenletek Integráló tényező	97-121	16-20	88-92
7. Kezdetiérték feladatok Közelítő megoldások	122-142	20-25	92-99
8. Különböző típusú elsőrendű differenciálegyenletek	143-161	25-26	99-102
9. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazása Ortogonális trajektóriák	162-201	26-32	103-110
MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK			
10. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek	202-213	33-35	111-116
11. Lineáris differenciálegyenletek osztályozása Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek ...	214-255	35-39	116-123
12. Lineáris differenciálegyenletek változó együtthatókkal .	256-277	40-42	123-127
13. Differenciálegyenletek megoldása hatványsor módszerrel, Bessel-függvények	278-285	43-44	127-131
14. Másodrendű differenciálegyenletek alkalmazása		44-47	

	Feladatok sorszámai	Oldalszámok Feladat	Megoldás
DIFFERENCIÁLEGYENLET RENDSZEREK			
15. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszerek	286-304	48-52	131-135
16. Az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ alapmátrix	305-313	52-54	135-138
17. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszerek	314-325	54-57	138-142
18. Egyensúlyi helyzetek osztályozása A fázissík	326-342	57-66	142-145

ALAPFOGALMAK

1. Differenciálegyenletek osztályozása

Az olyan egyenletet, amelyben egy ismeretlen függvény, annak ismeretlen deriváltja, illetve deriváltjai szerepelnek differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha az ismeretlen függvény valós egyváltozós, közönséges a differenciálegyenlet.

Az adott $f : R^2 \to R$ függvénnyel, az $y : R \to R$ ismeretlen függvénnyel, valamint az y' deriváltfüggvénnyel felírt

$$y' = f(x,y)$$

egyenlet elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet.

Az $2yy' = x(y'^2 - 1)$ implicit, mert az y'-t a sík egyetlen résztartományán sem tudjuk kifejezni az x és y egyértékű függvényeként.
Elsőrendű differenciálegyenlet, mert az ismeretlen függvény egyenletben szereplő legmagasabb rendű deriváltja az első derivált. Az n-ed, $(n \geq 1)$, rendű explicit közönséges differenciálegyenlet alakja:

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) .$$

Az n-ed rendű lineáris közönséges differenciálegyenlet

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

ahol f és a_ℓ $(\ell = 0,1\ldots n)$ adott valós egyváltozós függvények.

1-12. Osztályozzuk az alábbi differenciálegyenleteket a következő szempontok szerint:

a) mi az ismeretlen függvény?
b) milyen rendű a differenciálegyenlet?
c) explicit-e a differenciálegyenlet?
d) lineáris-e a differenciálegyenlet?

1. $y' = x^3 + y$
2. $(y')^3 = x^2$
3. $xy' = \sin y$

4. $y' = y''^2 - 1$

5. $(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$

6. $t^2 \ddot{s} - t\dot{s} = 1 - \sin t \qquad t \neq 0.$

7. $\frac{d^3x}{dy^3} = y^2 + 1$

8. $(y'')^{3/2} + y = x$

9. $t\ddot{x} + t^2\dot{x} - (\sin t)\sqrt{x} = t^2 - t + 1$

10. $y' - 5y = e^x$

11. $y' + \frac{1}{\operatorname{tg} x} y = 5\, e^{\cos x}$

12. $y'' + 2y' + y = x \sin x$

2. Differenciálegyenletek megoldásai

Az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet megoldása az $y(x)$ függvény, ha adott I intervallumon

$$(x,y(x)) \in D_f, \qquad x \in I,$$

$$y'(x) \equiv f(x,y(x)), \qquad x \in I.$$

Az $y(x) \equiv y_o \in \mathbb{R}$ állandó, egyensúlyi helyzete, vagy szinguláris megoldása, ha

$$f(x,y_o) \equiv 0 , \qquad x \in I.$$

Egy differenciálegyenletnek általában végtelen sok megoldása van. Egyetlen megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük. Ha a differenciálegyenlet összes megoldása egy c egyparaméteres görbesereggel

$$y = \varphi(x,c)$$

alakban adott, akkor azt általános megoldásnak nevezzük.

13-18. Vizsgáljuk meg megoldásai-e az alábbi differenciálegyenletnek az adott függvények?

(13) $y' = y^2x^3$, $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) = \frac{4}{4-x^4} + c$; $c \in \mathbb{R}$

14. $(y')^4 + y^2 = -1$, $y(x) = x^2 - 1$.

15. $y' + y = 0$, $y(x) = c\,e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$.

16. $y'' + 4y = 0$, $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

17. $y' + 2xy^2 = 0$, $y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

18. $xy'' + y' = 0$, $y(x) = \ln x$

19. Az $y' + y = 0$ differenciálegyenletnek $y(x) = ce^{-x}$; $c \in \mathbb{R}$, az általános megoldása. Határozzuk meg azt a partikuláris megoldását, amely az $y(3) = 2$ kezdeti feltételt kielégíti!

20. Oldjuk meg az $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték feladatot, ha $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ a differenciálegyenlet általános megoldása!

21. A 20. feladatban adott differenciálegyenletnek határozzuk meg azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $y(0) = 1$ és az $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ peremértékeket!

22. A 20. feladatban szereplő differenciálegyenletnek van-e $y(\frac{\pi}{8}) = 0$ és az $y(\frac{\pi}{6}) = 1$ peremértékeket kielégítő megoldása?

23. Válasszuk ki az alábbi függvények közül azokat, amelyek megoldásai az

$y'' - 4y' + 4y = e^x$ differenciálegyenletnek!

a) e^x; b) e^{2x}; c) $e^{2x} + e^x$; d) $xe^{2x} + e^x$;

e) $e^{2x} + xe^x$.

3. Görbesereg differenciálegyenlete

Az $y = u(x,c)$ egyenletet egyparaméteres görbeseregnek nevezzük, ha az u valós kétváltozós függvény folytonosan differenciálható valamely tartományon és $u'_c \neq 0$. Az impli-

cit függvények tételéből következik, hogy a $c(x,y)$ függvény "lokálisan" egyértelműen kifejezhető az $y = u(x,c)$ egyenletből. Az (x,y) ponton áthaladó $y = y(x)$ görbe érintőjének iránytangense:

$$y' = u'_x(x,c(x,y)),$$

a keresett differenciálegyenlet.

24-28. Határozzuk meg azt a differenciálegyenletet, amelyik az adott görbesereghez tartozik!

24. $y = \sin(x + c)$; $c \in \mathbb{R}$.

25. $y = c \sin x$; $c \in \mathbb{R}$.

26. $y = e^{x+c}$; $c \in \mathbb{R}$.

27. $y = c\,x$; $c \in \mathbb{R}$.

28. $(x - c)^2 + y^2 = r^2$, $r>0$ rögzített valós, $c \in \mathbb{R}$.

29. Határozzuk meg azt a differenciálegyenletet, amelynek bármely megoldásgörbéje olyan, hogy annak tetszőlegesen rögzített pontjában az érintő iránytangense a pont koordinátáinak összegével egyenlő!

30. Határozzuk meg azt a differenciálegyenletet, amelynek megoldásgörbéi az origótól egységnyi távolságra, az első síknegyedben haladó negatív iránytangensű egyenesek!

31. Írjuk fel a $2x + y - c = 2\sqrt{x^2 + xy} = 0$ görbesereg differenciálegyenletét! Igazoljuk, hogy a kapott differenciálegyenletnek $y(x) = -x$ olyan megoldása, amely nem egyede a görbeseregnek.

32. Határozzuk meg az $y = c_1(x - c_2)^2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, "kétparaméteres görbesereg" differenciálegyenletét!

33. Írjuk fel az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ körsereg, $a, b \in \mathbb{R}$, differenciálegyenletét!

ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

4. Szétválasztható változójú és az ilyenre visszavezethető differenciálegyenletek

Az $y' = g(x)\,h(y)$ szétválasztható változójú, (vagy szeparálható), differenciálegyenlet. Az

$y(x) \equiv y_0 \in \mathbb{R}$ egyensúlyi helyzete ha $h(y_0) \equiv 0$.

Ha $h(y) \neq 0$, és például g, h folytonos, akkor megoldásokat az

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$$

egyenletből nyerhetünk.

34-38. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat!

34. $y' = \frac{e^x}{y}$; $y(0) = 1$

35. $y' = -\frac{\sin x}{y}$; $y(0) = -2$

36. $(x^2 + 1)dx + \frac{1}{y}\,dy = 0$; $y(-1) = 1$

37. $y' = \frac{x + 1}{y^4 + 1}$; $y(0) = 0$

38. $y' = y^2x^3$; a) $y(0)=0$; b) $y(0) = 1$

39-42. Határozzuk meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldásait!

39. $y' = -\frac{y}{x}$

40. $y' = \frac{x^3(y + 1)}{y(x + 1)}$

41. $y' = \frac{1}{\cos^2 y\sqrt{25 - x^2}}$

42. $xy' - y = y^3, \quad x \neq 0$

- . -

(43.) $y' = y^2 \cos x$; $y(x_o) = y_o$, $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$.

Határozzuk meg a megoldást a kezdetiértékek, x_o és y_o függvényében!

Az $f(x,y)$ függvényt n-ed fokúan (n természetes szám és 0) homogénnek nevezzük, ha $f(tx, ty) = t^n f(x,y)$, $t \in \mathbb{R}$. Így például

$f(x,y) = x^3 + xy^2 e^{\frac{x}{y}}$ 3-ad fokúan homogén,

$f(x,y) = \frac{y + x}{x}$ 0-ad fokúan homogén,

$f(x,y) = \frac{2x + y^2}{xy}$ nem homogén.

44. a) Igazoljuk, hogy az $y' = f(\frac{y}{x})$, $x \neq 0$, 0-ad fokúan homogén differenciálegyenlet az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel szétválasztható változójú differenciálegyenletekre vezethető vissza!

b) Oldjuk meg az

$y' = \frac{y + x}{x}$ differenciálegyenletet!

c) Oldjuk meg $u = \frac{x}{y}$ helyettesítéssel az

$(1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}} (1 - \frac{x}{y})dy = 0$

differenciálegyenletet!

d) Az $(x^2 + y^2)dx - 2xy\ dy = 0$; $y(4) = 0$, kezdetiérték feladat megoldásakor a kezdeti feltételt egyrészt a helyettesítés után, másrészt az integrációs konstans meghatározásával vegyük figyelembe.

45-49. Oldjuk meg az alábbi homogén fokszámú differenciálegyenleteket!

45. $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0, \quad x > 0,$

46. $y' = \frac{2y + x}{x}$

47. $y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

48. $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy$

49. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

50-52. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat!

(50) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$, $y(1) = 1$

51 $y' = \frac{2xy\, e^{(\frac{x}{y})^2}}{y^2 + y^2 e^{(\frac{x}{y})^2} + 2x^2 e^{(\frac{x}{y})^2}}$ $y(0) = 1.$

52. $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ $y(1) = -2;$

53 a) Igazoljuk, hogy az

$y' = f(Ax + By + C)$; $B \neq 0$, $A, C \in \mathbb{R}$,

alakú differenciálegyenletek az

$u = Ax + By + C$

helyettesítéssel szétválasztható változójú differenciálegyenletekre vezethetők vissza!

b) Oldjuk meg az

$(x + y)^2 y' = (x + y + 2)^2$

differenciálegyenletet!

54 a) Igazoljuk, hogy az

$y' = f(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2})$, $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$, $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2.$

differenciálegyenleteket

$\det \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \neq 0$

esetén az $x = u + a_o$ $y = v + b_o$

helyettesítéssel 0-ad fokúan homogén differenciálegyenletre vezethetjük vissza. [(a_o, b_o) megoldása az

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

lineáris egyenletrendszernek].

b) Oldjuk meg az

$$x^2y' = (2x - y + 1)^2$$

differenciálegyenletet!

55 a) Igazoljuk, hogy az 54.a)-ban szereplő differenciálegyenletet az 53. a)-ban szereplő differenciálegyenletre vezethetjük vissza, ha

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = 0,$$

b) Oldjuk meg az

$$y' = -\frac{x + y - 1}{2x + 2y - 3}$$

differenciálegyenletet!

56-62. A következő differenciálegyenletek megfelelő helyettesítéssel szétválasztható változójúra, ill. homogén differenciálegyenletre vezethetők vissza. Keressünk ilyen helyettesítést és oldjuk meg a differenciálegyenleteket!

56 $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$

57 $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$

58 $(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$

59 $y' = \frac{1 - x - y}{2x + 2y - 3}$

60 $y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0$

61 $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$

62 $y' = (y - 4x)^2$

5. Lineáris és lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek

Az $y' + g(x)y = f(x)$, $f, g \in C^0(I)$, elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása az

$$y' + g(x)y = 0$$

homogén differenciálegyenlet általános megoldásának és az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának összege. Ha $y_h(x) \neq 0$ megoldása a homogénnak és $y_{Ip}(x)$ partikuláris megoldása az inhomogénnak, akkor $y_{Ip}(x) + c\, y_h(x) = y_I(x)$ az általános megoldás.

$$y_I(x) = e^{-\int g(x)\,dx} \left(c + \int f(x) e^{\int g(x)\,dx}\, dx\right), \quad x \in I.$$

63-66. Határozzuk meg a következő homogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

(63.) $y' - 5y = 0$

64. $y' + x^2 y = 0$

65. $y' - y \operatorname{tg} x = 0; \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

66. $y' - \frac{y}{x-2} = 0; \qquad x \neq -2$

67-74. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris differenciálegyenleteket!

[67.] $y' = \frac{2}{x} y + x^2 + 1$

68. $y' + \frac{4}{x} y = x^4$

[69.] $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$

70. $y' + 2xy = 4x$

71. $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

72. $y' + y = \sin x$

[73.] $y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3}\, y = 1$

[74.] $y \ln y\, dx + (x - \ln y)\, dy = 0$

75-79. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat!

75. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$; $y(2) = 10$

76. $y' - 3y = 6$, a) $y(0) = 0$; b) $y(0) = -2$

77. $y' + 2xy = 2x^3$, $y(1) = 1$

78. $y' + y \operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x}$, $y(\frac{\pi}{2}) = -4$

79. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$; $y(0) = 1$

80. Oldjuk meg az a és m valós paramétereket tartalmazó

$$y' + ay = e^{mx}$$

differenciálegyenletet!

81. Határozzuk meg az

$$y' + ay = 0$$

differenciálegyenletben az a paraméter értékét úgy, hogy az összes megoldás $x \to +\infty$ esetén zérushoz tartson!

82. Igazoljuk, hogy a következő differenciálegyenletnek $x \to \frac{\pi}{2}$ esetén létezik korlátos megoldása, annak ellenére, hogy az ismeretlen függvény együtthatója, $\frac{2}{\sin 2x}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ esetén nem korlátos.

$$y' = \frac{2}{\sin 2x} y + \frac{1}{\sin x}.$$

83. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y' = \frac{y}{x^2}, \quad x > 0.$$

differenciálegyenletnek nincs olyan megoldása, amely $x \to \infty$ esetén az $y(x) \equiv 0$ egyensúlyi helyzethez tart!

84-87. A következő differenciálegyenletek lineárisak, ha x-et tekintjük függő változónak és y a független változó.
Oldjuk meg a differenciálegyenleteket!

(84) $y' = \dfrac{2y}{6x - y^2}$

85. $y' = \dfrac{y^2}{y^2 + 2xy - x}$

(86) a) Igazoljuk, hogy az

$$y' + g(x)y = h(x)y^{\alpha}, \qquad \alpha \neq 0 \qquad \alpha \neq 1$$

Bernoulli-féle differenciálegyenlet az

$$u(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

helyettesítéssel

$$u' + (1 - \alpha)g(x)u = (1 - \alpha)h(x),$$

lineárisra vezethetjük vissza!

b) Oldjuk meg az

$$y' + y = -\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

differenciálegyenletet!

87-91. Oldjuk meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenleteket!

(87) $y' - \frac{3}{x} y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$

88. $y' - y = x y^5$

[89] $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

(90) $xy' + y = \dfrac{\ln x}{y^3}, \qquad x > 0 .$

91. $y' + 4y = xy^2$ a) $y(0) = 2$, b) $y(0) = 0$.

92-94. Igazoljuk, hogy a következő differenciálegyenletek lineárisra vezethetők vissza az adott helyettesítésekkel! Oldjuk is meg a differenciálegyenleteket!

92. $x^2 \cos y \; y' = 2x \sin y - 1;$ $z = \sin y$

(93) $y' = \dfrac{2}{x + 3} + x e^{-y};$ $z = e^{y}$

94. $y' = \frac{y}{x}(x \sin x - \ln y)$; $z = \ln y$

95. a) Igazoljuk, hogy ha az

$$y' + h(x)y + p(x)y^2 + q(x) = 0$$

Riccati-féle differenciálegyenletnek y_1 megoldása, akkor azt az $y = y_1 + u$ helyettesítéssel Bernoulli-féle egyenletté alakíthatjuk!

b) Oldjuk meg az

$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$$

differenciálegyenletet!

96. Legyen $h(y)$ differenciálható függvény; $p(x)$ és $q(x)$ folytonos. Igazoljuk, hogy a

$$\frac{dh}{dy}\,\frac{dy}{dx} + h(y)\,p(x) = q(x)$$

differenciálegyenlet $u(x) = h(y(x))$ helyettesítéssel lineárisra vezethetjük vissza! Írjunk fel ilyen differenciálegyenletet!

6. Egzakt differenciálegyenletek — Integráló tényező

A

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \quad \text{egyenletet}$$

egzaktnak nevezzük, ha a bal oldalon valamely $F(x,y)$ valós kétváltozós függvény differenciálja áll. Ha g és h folytonosan differenciálható valós kétváltozós függvény valamely egyszeresen összefüggő tartományon, akkor

$$\frac{\partial g}{\partial y} \equiv \frac{\partial h}{\partial x}$$

szükséges és elégséges feltétele az egzaktságnak.
Az egzakt differenciálegyenlet megoldásait az

$$F(x,y) = C$$

egyenletből nyerhetjük, ahol $C \in \mathbb{R}$ és F értékkészletének tetszőleges eleme.

Ha a

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$$

differenciálegyenlet nem egzakt, de a

$$\mu(x,y)[g(x,y)dx + h(x,y)dy] = 0,$$

az eredetivel ekvivalens differenciálegyenlet már egzakt ($u(x,y) \neq 0$ folytonosan differenciálható), akkor $\mu(x,y)$ integráló tényező, vagy multiplikátor.

Az integráló tényező keresésének néhány módszere:

a) Ha

$$\frac{1}{h}(g'_y - h'_x) = M(x),$$ azaz csak az x változó függvénye, akkor az integráló tényező is x-től függ és

$$\mu(x) = e^{\int M(x)dx}$$

b) Ha

$$\frac{1}{g}(g'_y - h'_x) = N(y),$$ akkor

$$\nu(y) = e^{-\int N(y)dy}$$

integráló tényező.

c) Ha

$$g(x,y) = y\, f_1(xy) \quad \text{és} \quad h(x,y) = x f_2(xy),$$

alakú, akkor

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xg(x,y) - y\, h(x,y)}$$

integráló tényező.

d) A következő táblázattal az integráló tényező speciális alakban való keresésére adunk ötletet. Ez akkor lehetséges, ha a differenciálegyenlet bal oldala tartalmaz az alábbi táblázat első oszlopában szereplő tagokat.

Tagok	Integráló tényező	Teljes differenciálok
$ydx-xdy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$
$ydx-xdy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{ydx-xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$
$ydx-xdy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy-ydx}{xy} = d(\ln\frac{y}{x})$
$ydx-xdy$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = d(\text{arc tg}\ \frac{y}{x})$
$y\,dx-xdy$	$-\frac{1}{x^2}$	$d(xy)$
$ydx+xdy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx+xdy}{xy} = d(\ln xy)$
$ydx+xdy$	$-\frac{1}{(xy)^n}; n>1$	$\frac{ydx+xdy}{(xy)^n} = d(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}})$
$ydy+xdx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{ydy+xdx}{x^2+y^2} = d(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2))$
$ydy+xdx$	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n}; n>1$	$\frac{ydy+xdx}{(x^2+y^2)^n} = d(\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}})$
$aydx+bxdy$ $a, b \in \mathbb{P}$	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(aydx+bxdy) = d(x^a y^b)$

97-104. Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket!

97. $e^y + (x\,e^y - 2y)y' = 0$

98. $2x^3 - xy^2 + (2y^3 - x^2y)y' = 0$

99. $\ln(y^2 + 1)dx + \frac{2y(x - 1)}{y^2 + 1}dy = 0$

100. $2xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0$

101. $y\,e^{xy}\,dx + x\,e^{xy}\,dy = 0$

102. $(y \sin x + xy \cos x)dx + (x \sin x + 1)dy = 0$

103. $y' = \frac{2 + y\,e^{xy}}{2y - x\,e^{xy}}$

104. $(\sin y + y \sin x)dx + (x \cos y - \cos x)dy = 0$

105-114. Oldjuk meg integráló tényező keresésével a következő differenciálegyenleteket!

105. $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0$

106. $y(1 + xy)dx - x\,dy = 0$

107. $e^x \cos x - \sin y + y' \cos y = 0$

108. $y\,dx - x\,dy = 0$

109. $y\,dx + 3x\,dy = 0$

110. $dx - 2xy\,dy = 0$

111. $(2y + xy2)dx + (2x + x^2y)dy = 0$

112. $(-2xy + x)dx + dy = 0$

113. $y^2dx + xy\,dy = 0$

114. $y(1 - xy)dx + x\,dy = 0$

115-117. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat!

115. $x\,dx + [y + 4y^3(x^2 + y^2)]dy = 0; \quad y(0) = 1.$

116. $x^2\,y' + xy + \sqrt{1 - x^2y^2} = 0; \quad y(1) = 0.$

117. $y' = \frac{y - xy^2 - x^3}{x + x^2y + y^3}$; $\quad y(1) = 0.$

118. Tegyük fel, hogy a g és h függvények folytonosan differenciálhatók és $h(y) \neq 0$. Igazoljuk, hogy az

$$y' = g(x)\,h(y)\ ;$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet egzaktként megoldható és írjuk fel a megoldását!

(119) Igazoljuk, hogy a folytonos együtthatós

$$y' + g(x)\, y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet egzakttá tehető!

(120) a) Tegyük fel, hogy $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(y)$, $q_2(y)$ folytonosan differenciálható függvények, valamint $p_2(x) \neq 0$ és $q_1(y) \neq 0$. Igazoljuk, hogy a

$$p_1(x)\, q_1(y)\,dx + p_2(x)\, q_2(y)\,dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakttá tehető!

b) Használjuk a táblázatot a következő differenciálegyenlet megoldásához!

α) $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

β) $(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0$

7. Kezdetiérték feladatok—Közelítő megoldások

Legyen $T \subset D_f$ és $f(x,y)$ folytonos függvény a T tartományon.
Az

$$y' = f(x,y);\quad y(x_o) = y_o,\quad (x_o, y_o) \in T$$

feladat <u>elsőrendű kezdeti érték probléma</u>,

D_f az f függvény értelmezési tartománya.

Ha x_o-nak létezik olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, és a kezdetiérték-problémának olyan $y(x)$ megoldása, hogy bármely másik megoldás azonosan egyenlő $y(x)$-szel az $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ intervallumon, akkor a k.é.p. <u>lokálisan egyértelműen</u> oldható meg.

Például az

$$y' = \sqrt{|y|}\ ,\quad y(2) = 1 \quad \text{k.é.p-nak}$$

$y(x) = (\frac{x}{2})^2$ lokálisan egyértelmű megoldása, ($\delta < 2$-nek választható). Az

$$y' = \sqrt{|y|} \quad , \quad y(0) = 0$$

k.é.p-nak nincs lokálisan egyértelmű megoldása. Az $x_o = 0$ pont bármely környezetében megoldások például az $y_1(x) \equiv 0$ (egyensúlyi helyzet) és az

$$y_2(x) = \begin{cases} (\frac{x}{2})^2, & x \geq 0 \\ 0 , & x < 0 \end{cases}$$

függvények.

Az $f(x,y)$ függvény a T tartományon kielégíti az y változóra vonatkozó Lipschitz-féle feltételt, ha T minden (x_o, y_o) pontjához található annak olyan K környezete és olyan e környezettől függő $L > 0$ állandó, hogy fennáll az

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

(x,y_1) , $(x,y_2) \in K$ egyenlőtlenség.

A Cauchy–Lipschitz-féle egzisztencia és unicitástétel

Ha a folytonos $f(x,y)$ függvény a T tartományon teljesíti az y változóra vonatkozó Lipschitz-féle feltételt, akkor a k.é.p. lokálisan egyértelműen megoldható.

A Lipschitz-féle feltétel biztosan teljesül, ha $f(x,y)$ y szerint parciálisan differenciálható és $f'_y(x,y)$ T-n folytonos.

Ha több megoldás van, akkor a Lipschitz-féle feltétel nem teljesül. A fordított állítás nem igaz, az

$$y' = \begin{cases} y \ln |y| , & y \neq 0 ; \quad y(0) = 0 \\ 0 , & y = 0 \end{cases}$$

k.é.p. esetén az $(x_o, y_o) = (0,0)$ pontnak bármely környezetében felvéve a $(0,y)$, $(0,0)$ pontokat az

$$\frac{y \ln|y| - 0}{y - 0} = \ln|y| \text{ nem korlátos}$$

$y \to 0$ esetén,

azaz nincs L Lipschitz-állandó. Az $y(x) \equiv 0$ egyensúlyi helyzet azonban egyértelmű megoldás.

Ha $f(x,y)$ a T tartományon folytonos és annak minden (x_o,y_o) pontjában teljesíti a Lipschitz-féle feltételt, akkor a k.é.p. egyértelmű megoldása T határától-határáig folytatható egyértelműen. Az így folytatott megoldást teljes megoldásnak nevezzük.

(121.) Legyenek $g(x)$ és $f(x)$ valamely I intervallumon folytonos függvények! Igazoljuk, hogy tetszőlegesen rögzített $x_o \in I$ esetén az

$$y' + g(x)y = f(x) \qquad y(x_o) = y_o$$

elsőrendű lineáris k.é.p. egyértelműen megoldható!

122-124. Vizsgáljuk meg, hogy eleget tesznek-e az alábbi függvények az adott tartományokon a Lipschitz-féle feltételnek!

(122.) $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$; $\quad T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0 \}$.

(123.) $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2}$; $\quad T = \mathbb{R}^2$.

124. $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2}$; $\quad T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |y| < 1 \}$

125-128. Létezik-e teljes megoldása a következő kezdetiérték feladatoknak?

(125.) $y' = \sqrt{1 - y^2}$; $\qquad y(x_o) = y_o$; $\qquad |y_o| \leq 1$.

(126.) $y' - \frac{y}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$; $\qquad y(x_o) = y_o$; $\qquad 0 < x_o < \frac{\pi}{2}$.

Folytassuk a vizsgálatot a $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ intervallumon!

(127.) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ $\qquad y(x_o) = y_o$

(128.) $y' = \sqrt{|y|}$ $\qquad y(0) = 1$

129. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatot!

$$xy' - 2y = 0 \qquad y(1) = 1$$

(130.) Legyen $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$. A 112. feladatban adott

$$f(x,y) = \begin{cases} y \ln|y|, & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$$

függvényről azt állítottuk, hogy az $\mathbb{R}^2$ tartományon nem elégíti ki a Lipschitz-féle feltételt. Így például az $(x_o,y_o) = (0,0)$

pont környezetében sem. Létezik-e teljes megoldása az

$$y' = f(x,y); \quad y(0) = 0,$$

kezdetiérték feladatnak?

131-136. Oldjuk meg Picard-féle közelítő módszerrel a következő kezdetiérték feladatokat:

131. $y' = xy$; $y(0) = 1.$

132. $y' = -\frac{y}{x}$; $y(1) = 1, \quad x > 0.$

133. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 1.$

134. $y' = x + y^2$; $y(0) = 1$

135. $y' = x + y^2$; $y(0) = 0$

136. $y' = \cos^2(y + 1)$; $y(0) = \frac{\pi}{2} - 1$

- . -

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (a,b) pontbeli Taylor-sora a pont bizonyos környezetében $f(x,y)$-hoz konvergál, akkor az

$$y' = f(x,y) ; \qquad y(a) = b$$

k.é.p. megoldásának Taylor-sora is a megoldáshoz konvergál az "a" pont bizonyos környezetében. A megoldás "a" pontbeli deriváltjait a következőképpen is megkaphatjuk:

$$y'(a) = f(a,b)$$

$$y''(a) = f'_x(a,b) + f'_y(a,b)\, y'(a)$$

$$y'''(a) = y''_{xx}(a,b) + 2 f''_{xy}(a,b)\, y'(a) + f''_{yy}(a,b)\, y'^2(a) + f'_y(a,b)\, y''(a)$$

$$\vdots$$

$$T_3(x) = b + f(a,b)(x-a) + \frac{f_x(a,b) + f'_y(a,b) f(a,b)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 .$$

és e Taylor polinommal közelítjük a megoldást. Gyakran helyettesítjük a közelítést az ún. hatványos módszerrel. Ez a módszer azon alapszik, hogy bizonyos feltételek mellett a kezdetiérték feladatnak van egy és csak egy analitikus megoldása, azaz olyan megoldása, amelyet konvergens hatványsor összegfüggvényeként kaphatunk meg. Így például igaz a következő:

I. tétel. Ha az

$$y' = g(x)\, y\,, \qquad y(a) = b$$

kezdetiérték feladatban

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k,\ |x - a| < r,\quad r > 0,$$

akkor a kezdetiérték feladatnak létezik

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (x-a)^k,\ |x - a| < r,$$

alakú teljes megoldása, ahol φ_k, $k = 0,1,\ldots,$ a hatványsor valós együtthatója. A megoldás közelítésére a részletösszegeket használjuk.

II. Tétel Ha az

$$y' = f(x,y)\ ; \qquad y(a) = b,$$

kezdetiérték feladatban $f(x,y)$ analitikus a

$$T = \{(x,y) : |x - a| < \alpha,\ |y - b| < \beta\},$$

$0 < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < +\infty$, zárt négyszögön, azaz létezik olyan abszolút konvergens kettőssor, amely ott előállítja, vagyis

$$f(x,y) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} c_{k\ell} (x - a)^k (y - b)^\ell,$$

és

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty} c_{k\ell}\, \alpha^k \beta^\ell$$

konvergens, akkor a kezdetiérték feladatnak az

$|x - a| < \varrho$,

$$\left[\varrho = \alpha\left(1 - e^{-\frac{\beta}{2M\alpha}}\right), \quad M = \max_{(x,y)\in T} |f(x,y)|\right],$$

intervallumban létezik egy és csak egy

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (x - a)^k, \quad |x - a| < \varrho, \quad \text{alakú}$$

analitikus megoldása. A teljes megoldás közelítésére a részletösszegeket használjuk.

137-142. Oldjuk meg hatványsor módszerrel a következő feladatokat!

(137.) $y' = e^{x^2} y$; $y(0) = 1$

(138.) $y' = x - 2y + y^2$; $y(1) = 1.$

(139.) $y' = \frac{y}{10(1 - x)} + \frac{x^2}{10}$; $y(0) = 0.$

140. $y' = y + \frac{1}{x}$; $y(1) = 1.$

(141.) $y' = x^2 + y$; $y(0) = y_o$

(142.) $y' = \frac{2x - y}{1 - x}$; $y(0) = y_o.$

8. Különböző típusú elsőrendű differenciálegyenletek

143-153. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

(143.) $(x^2 - xy + y^2)dx + x^2 dy = 0.$

(144.) $(1 + x^2)(1 + y^2)dx - xy\, dy = 0.$

145. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$

146. $y' = \operatorname{tg}(y - x).$

(147.) $y' = e^{x+2y} + 1.$

148. $y' = 2x + 3y.$

149. $y' = \frac{x - y}{x}$

150. $x^2\,dy + (xy + x^2 + 1)dx = 0$

151. $y' + 2xy = 2x^3$

152. $(1 + x^2)y' + xy = x^3y^3$

153. $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

154-161. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat!

154. $(x^2 + y^2)dx + xy\,dy = 0;$ $y(1) = -1$

155. $xy' = x^2 + y^2\ ;$ $y(1) = 1$

156. $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0;$ $y(1) = 1$

157. $y' = \sin(5x + 2y) - \frac{1}{2};$ a) $y(0) = 0;$ b) $y(0) = \frac{\pi}{12}$

158. $y' = \frac{1}{x + y + 1}\ ;$ $y(0) = 0$

159. $y' = \frac{7x - 3y - 7}{-3x + 7y + 3}\ ;$ $y(0) = 1$

160. $(y^2 - 1)dx - (2y + xy)dy = 0;$ $y(x_0) = y_0,$ ill. $x(y_0) = x_0$

161. $2(xy + x - y - 1)dx + (2x - x^2)dy = 0;$ $y(x_0) = y_0,$ ill. $x(y_0) = x_0$

9. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazása
Ortogonális trajektóriák

162. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amely bármely egyedének tetszőlegesen rögzített $P(x,y)$ pontjában húzott érintője az Y-tengelyt a $Q(0, 2xy^2)$ pontban metszi!

163. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amely áthalad a $P(3,1)$ ponton, és amelynek bármely érintője olyan pontban metszi az Y-tengelyt, hogy az a pont felezi az érintési pont és az X-tengely közé eső szakaszt!

164. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amely bármely egyedének tetszőleges pontjához tartozó normálisa átmegy az origón!

165. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amely bármely egyedének tetszőleges $P(x,y)$ pontjához tartozó normálisának az X-tengelyig terjedő darabja ugyanakkora, mint a pontnak az origóból mért távolsága!

166. Egy origón áthaladó görbe tetszőleges $P(x,y)$ pontján keresztül húzzunk práhuzamosakat az X, ill. Y-tengellyel. $(x>0,\ y>0)$. Az így kapott téglalapot a görbe 2 olyan részre osztja, amelyek területének aránya 1:3. Határozzuk meg a görbét!

167. Egy görbe érintőjét a következőképpen szerkesztjük meg: tetszőleges $P(x,y)$ pontját összekötjük az O origóval; az OP egyenesre merőlegest rajzolunk a P pontban; e merőleges X -tengellyel való R metszéspontjával, PR szakaszt rajzolunk és az X-tengelyen levő QR vetületét az origóból rámérjük az X-tengelynek ugyanarra az oldalára, ahol a Q és R pont van. Az így nyert S ponttal az SP egyenes a görbe P ponthoz tartozó érintője. Határozzuk meg a görbe egyenletét!

168. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre az X-tengely, az érintő és az origóból az érintési ponthoz húzott szakasz egyenlő szárú háromszöget alkot!

169. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre teljesül, hogy tetszőleges P pontjukhoz tartozó érintő Y-tengelyen levő R pontja és a P pont X-tengelyen levő merőleges vetületi Q pontja olyan egyenest határoz meg, amely merőleges az OP egyenesre!

170. Határozzuk meg az $xy = c$ hiperbolasereg ortogonális trajektóriaseregét!

171. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ körsereg orgogonális trajektóriaseregét!

172. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c-\lambda} = 1$ görbesereg $(\lambda, c \in \mathbb{R})$ ortogonális trajektóriaserege önmagának!

173. Határozzuk meg a polárkoordinátásan adott $r=c(1 + \cos\varphi)$ görbesereg ortogonális trajektóriáit!

174-179. Határozzuk meg az alábbi görbeseregek differenciálegyenletét, az ortogonális trajektóriák differenciálegyenletét és a trajektóriákat!

174. $y = cx^2$.

175. $y = c\,e^x$.

176. $y = c(x + 1)e^x$.

177. $x^2 + cy^2 = 4$

178. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, (a és b pozitív állállandók!

179. $(x^2 + y^2)^2 = c^2(x^2 - y^2)$.

(180) Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = c$ koncentrikus körsereget 45°-ban metsző görbesereget!

Fizikai alkalmazások

181-184. A hőmérséklet-változás problémái.
Newton lehűlési törvénye szerint egy test lehűlési sebessége arányos a test és a közeg közötti hőmérséklet különbséggel. Legyen T a test hőmérséklete T_m a környezet közegének állandó hőmérséklete. A lehűlési törvény; (a fizikai modell első közelítése)·

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \quad \text{ill.} \quad \frac{dT}{dt} + kT = kT_m.$$

(181) A kemencéből kivett 100 ^oC hőmérsékletű kenyér az állandó 25 ^oC hőmérsékletű helyen 20 s múlva 60 ^oC-os lesz. Mennyi idő múlva hűl le a kenyér 30 ^oC-ra?

(182) Egy 100 ^oC hőmérsékletű testet 0 ^oC hőmérsékletű helyre viszünk 20 min. múlva a test hőmérséklete 50 ^oC-ra változik.
a) Hány ^oC-ra változott 10 min. alatt a test hőmérséklete?
b) Mennyi idő múlva lesz 25 ^oC a test hőmérséklete?

183. Egy 50 ^oC hőmérsékletű testet 100 ^oC hőmérsékletű helyre teszünk. 5 min. után a test hőmérséklete 60 ^oC.
a) Mennyi idő múlva hűl le 75 ^oC-ra a test hőmérséklete?
b) Hány ^oC-ra változik 20 min. után a test hőmérséklete?

184. Egy ismeretlen hőmérsékletű testet 30 ^oC hőmérsékletű helyre viszünk. 10 min. után 0 ^oC hőmérsékletű a test 20 min. után 15 ^oC-ra melegszik fel. Határozzuk meg a kezdeti hőmérsékletet!

- . -

185-189. A szaporodás és fogyás problémái

Legyen $N(t)$ valamely objektum t időpillanatbeli mértéke, amely szaporodik vagy fogy. Tegyük fel, hogy a $\frac{dN}{dt}$ változási sebesség arányos a jelenlevő N értékkel. (Ha N diszkrét és egész értékű, úgy a jelenlegi modell csak közelítésre alkalmas.)
A matematikai modell:

$$\frac{dN}{dt} = kN, \qquad k \text{ az arányossági tényező.}$$

(185) Valamely radioaktív anyag tömege a t_o időpillanatban n_o. Határozzuk meg az $N(t)$ tömegfüggvényt, ha a bomlási sebesség arányos a tömeggel és az arányossági tényező az anyagra jellemző felezési időből számítható. Tegyük fel, hogy a felezési idő 1600 év.

186. Valamely város népességének növekedési sebessége arányos a jelenleg élők számával. Két év után megkétszereződött e szám és három év után már 20 000 volt a lélekszám. Mennyi volt eredetileg?

187. Egy baktériumkultúra növekedési sebessége arányos a jelenlevővel. Egy óra múlva 1000 "csoportot", három óra múlva 3000 "csoportot" figyeltek meg. Határozzuk meg tetszőleges t időpillanatban a jelenlevő "baktériumcsoportok" számát és az eredeti számot!

(188) Egy ország népessége 50 év alatt megkétszereződik. Mennyi idő alatt lesz háromszoros a népesség, ha a növekedési sebesség arányos a lélekszámmal?

189. Egy radioaktív anyag bomlási sebessége arányos a tömegével. Két óra múlva a jelenlegi 50 milligramm 10%-kal csökkent. Határozzuk meg az $N(t)$ tömegfüggvényt! Mikor lesz fele ekkora a tömeg?

-.-

190-192. Tömegpont mozgása nehézségi erő és légellenállás hatására.

Tegyük fel, hogy a test m tömege állandó és a g gravitációs erő is konstans.
Newton második törvénye szerint az F erőre

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

érvényes, ahol v a test sebessége.

190. Ejtőernyős ugrásnál a légellenállás arányos az esés sebességének négyzetével. Határozzuk meg a végsebességet!

191. Egy 64 kg-os testet 100 m magasból 10 m/s sebességgel eldobunk. Tegyük fel, hogy a légellenállás arányos a test sebességével. A végsebesség 128 m/s. Határozzuk meg a test $v(t)$ sebességét és $x(t)$ helyét!

192. Egy elhanyagolható tömegű rugó függőlegesen függ. Ha egy m tömegű test v_o m/s sebességgel nehezedik a rugó szabad végére, akkor nincs x megnyúlás. Határozzuk meg a v sebességet x függvényében!

- . -

193. Egy motorcsónak állóvízben 20 km/h egyenletes sebességgel halad. Ha a motort kikapcsoljuk, 40 s múlva a sebessége 8 km/h. Mekkora lesz a sebessége a kikapcsolástól számított 2s múlva? Tegyük fel, hogy a surlódási erő arányos a sebességgel.

- . -

194-196. Oldódási problémák.
Egy tartályban, V l víz van és benne y_o kg só van feloldva. Egy csövön v_1 l/s sebességgel olyan víz folyik bele, amelyben u kg/l só van feloldva. Legyen a sókoncentráció minden pillanatban ugyanaz. Teljes keveredés után az oldat, egy másik csövön v_2 l/s sebességgel folyik ki. Legyen $y(t)$ a t. időpillanatban a tartályban levő sómennyiség. Változási sebessége:

$$\frac{dy}{dt} = v_1 u - \frac{v_2}{V + (v_1 - v_2)t} y ,$$

ahol $\frac{v_2 y}{V + (v_1 - v_2)t}$ az a sebesség l/s -ben, amelyel a só elhagyja a tartályt. A kezdeti feltétel: $y(0) = y_o$.

194. Egy tartályban 100 l vízben 7,5 kg só van feloldva. Egy csövön 3 l/s sebességgel tiszta víz folyik bele, egy másik csövön 2 l/s sebességgel folyik ki az oldat. Mennyi só lesz a tartályban 1,5 óra múlva?

195. Egy tartályban kezdetben 100 l vízben 1 l só van feloldva. Egy csövön 3 l/s sebességgel olyan víz folyik bele, amelyben 1 kg/l só a koncentráció. Ugyanilyen sebességgel hagyja el az oldat a tartályt egy másik csövön. Mennyi a t időpillanatban a tartályban levő sómennyiség és melyik időpillanatban lesz 2 kg só a tartályban?

(196.) Egy 50 l-es tartály kezdetben 10 l vizet tartalmaz. Egy csövön 4 l/s sebességgel olyan víz folyik bele, amelyben 1 kg/l só van feloldva. Az oldat 2 l/s sebességgel hagyja el a tartályt. Határozzuk meg azt az időt, amikor a tartály megtelik és ebben az időpillanatban azt, hogy mennyi só van a tartályban!

197-201. Elektrotechnikai problémák.
Az alapegyenlet, amely az $i(t)$ áramerősség időben való változását leíró fizikai törvény matematikai modellje, az

$$L\frac{di}{dt} + R\,i(t) = U$$

differenciálegyenlet, ahol U(volt) az elektromotoros erő, R(ohm) az ellenállás és L az önindukciós együttható. (Ugyanis az önindukció elektromotoros ereje arányos az áramerősség növekedési sebességével. Az arányossági tényező L. Az áramkör zárásakor két ellentétes elektromotoros erő működik: az áramkör U feszültsége és az önindukció $-L\frac{di}{dt}$ elektromotoros ereje. Ezek algebrai összege $V = E - L\frac{di}{dt}$ Ohm-törvénye szerint

$$i = \frac{V}{R}, \quad \text{azaz} \quad i = \frac{E - L\frac{di}{dt}}{R}).$$

197. Az elektromos áramkörben $U = 5$ Volt, $R = 50$ ohm, $L = 1$ henry. Határozzuk meg az áramerősséget!

[198.] Egy áramkörben a feszültség: $U = 300$ (volt), az ellenállás: $R = 150$ (ohm), az önindukciós együttható $L = 30$ (henry). Az áramkör zárásának pillanata után mennyi idővel éri el az i áramerősség maximumának 99%-át?

[199.] Az R ellenállású L önindukciós áramkörben a periodikus $U = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ elektromotoros erő hat, ahol T a periódus, $a > 0$ állandó U maximális értéke. Határozzuk meg az $i(t)$ áramerősséget, ha a kezdeti feltétel $i(0) = 0$.

200. Az elektromos áramkörben $U = 3 \sin 2t$; $R = 10$ ohm; és $L = 0{,}5$ henry; $i(0) = 6$. Határozzuk meg az időben változó áramerősséget!

[201.] Az U egyenfeszültségű és R ellenállású áramkörbe bekötik a c kapacitású kondenzátort. Határozzuk meg a kondenzátor q töltését valamely, a bekapcsolás utáni t időpillanatban!

- . -

MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

10. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Explicit másodrendű esetben:

1. Ha az ismeretlen függvény hiányzik, azaz ha

   $y'' = f(x, y')$,

   akkor $y' = u$ helyettesítéssel,

   $u' = f(x, u)$.

   A kapott differenciálegyenlet elsőrendű.

2. Ha a független változó hiányzik, azaz ha

   $y'' = f(y, y')$,

   akkor $y'(x) = u(y(x))$ helyettesítéssel

   $$y'' = \frac{du}{dy} y' = \frac{du}{dy} u.$$

   Most $u(y) \neq 0$-ra

   $$\frac{du}{dy} = \frac{1}{u} f(y, u).$$

   A kapott differenciálegyenlet elsőrendű.

202-213. Oldjuk meg a következő hiányos másodrendű differenciálegyenleteket!

202. $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$

203. $y'' = (y')^3 + y'$

204. $y\,y'' + (y')^2 = y^2$

205. $y'' = e^{2y}$ $\quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

206. $y'' = (y')^2 \sin x$

207. $y\,y'' + (y')^2 = 2$

208. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

209. $x\,y'' - y' = -\frac{2}{x} - \ln x, \quad x > 0$.

210. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = \frac{2}{x^3}$, $x > 0$.

211. $y\,y'' = 2(y')^2 - 2y'$, $y \neq 0$.

212. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

213. A két végén felfüggesztett, csak a saját súlyával terhelt kötél "megoldásgörbéje" a

$$k\,y'' = 1 + y'^2, \qquad k > 0$$

differenciálegyenletnek. Határozzuk meg a megoldásgörbe egyenletét!

Legyenek $f(x)$ és $a_\ell(x)$, $(\ell = 0,1,\ldots n-1;\ n \geq 1)$, folytonos függvények valamely I intervallumon. Az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_o(x)y = f(x)$$

lineáris differenciálegyenlet inhomogén, ha $f(x) \not\equiv 0$, $x \in I$.

Ha $f(x) \equiv 0$, akkor homogén a differenciálegyenlet.

Ha a homogén differenciálegyenlet $a_\ell(x)$ együtthatói folytonosak, akkor megoldásai között található pontosan n számú lineárisan független, $y_1(x)$, $y_2(x)$ ... $y_n(x)$, és bármely más megoldás ezek lineáris kombinációja, azaz

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x), \qquad c_i \in \mathbb{R},$$

az általános megoldás.

Ha az $y_i(x)$ függvények megoldásai valamely folytonos együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletnek, akkor lineáris függetlenségüknek szükséges és elégséges feltétele, hogy a Wronszki-féle determinánsuk

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

az I intervallum egyetlen pontjában sem.

Ha az $a_\ell(x) \equiv a_\ell$ függvények állandók, akkor az

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_o = 0$$

homogén lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletnek az

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_o = 0$$

polinomegyenlet karakterisztikus egyenlete.

Ha a karakterisztikus egyenletnek a

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$$

számok, (valós vagy komplex számok), gyökei rendre $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$, $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n$, multiplicitással, akkor az általános megoldás n számú lineárisan független függvénye a következő:

$$e^{\lambda_k x}, \quad x e^{\lambda_k x}, \quad x^2 e^{\lambda_k x}, \quad \ldots \quad x^{m_k - 1} e^{\lambda_k x},$$

$k = 1, 2, \ldots \ell$. Az Euler-formulával valós megoldásokat nyerhetünk belőlük. Ha $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex gyök, akkor $e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$ valós része és képzetes része is megoldás.

11. Lineáris differenciálegyenletek osztályozása — Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek

214-219. Állapítsuk meg a következő differenciálegyenletek rendjét!
Lineárisak-e a differenciálegyenletek?

214. $2xy'' + x^2y' - (\sin x)y = 2$

215. $y\,y''' + xy' - y = x^3$

216. $y'' - y = 0$

217. $y^{(IV)} + xy = e^{-x^2}$

218. $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$

219. $y^{(IV)}\,y^{(3)} = 1$

220-225. Oldjuk meg a következő másodrendű állandóegyüttható homogén lineáris differenciálegyenleteket!

220. $y'' - y' - 2y = 0$

221. $y'' - 7y' = 0$

222. $y'' - 5y = 0$

223. $y'' + 4y' + 5y = 0$

224. $y'' + 4y' + 4y = 0$

225. $y'' - 3y' - 5y = 0$

226-229. Oldjuk meg a következő homogén lineáris differenciálegyenleteket!

226. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

227. $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$

228. $y^{(IV)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$

229. $y^{(VI)} - 5y^{(V)} + 16y''' + 36y'' - 16y' - 32y = 0$

- . -

230-231. Állapítsuk meg, hogy a következő függvények az adott intervallumon lineárisan függetlenek-e!

(230.) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos 2x$, $y = (-\infty, +\infty)$.

(231.) Az $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = |x^3|$ függvények megoldásai az $y'' - \frac{2}{x} y' = 0$ differenciálegyenletnek a $(-1, 1)$ intervallumon. $W[x^3, |x^3|] \equiv 0$, $-1 < x < 1$. Következik-e ebből, hogy a függvények lineárisan összefüggők?

A partikuláris megoldás keresése az állandók variálásával

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása, hasonlóan az elsőrendű esethez, az inhomogén partikuláris megoldásának és a homogén összes megoldásának az összege.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével meghatározhatjuk. Legyen az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x) y = f(x) \qquad x \in I$$

folytonos együtthatós inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek általános megoldása.

$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$. A $c_1,\ldots,c_n$ állandókat helyettesítjük ismeretlen $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ függvényekkel. A partikuláris megoldás létezik

$$y_{I_p}(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n(x)$$

alakban. A $c_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots. n$, függvények deriváltjait a következő egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\begin{bmatrix} y_1(x), & y_2(x),\ldots,y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x),\ldots,y_n'(x) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (n-1) & (n-1) \quad (n-1) \\ y_1(x) & y_2(x),\ldots,y_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer együttható mátrixának determinánsa sehol nem zérus, mert az a Wronski-féle determináns.

A partikuláris megoldás keresése próbafüggvénnyel

Az

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_oy = f(x); \quad f \in C^o(I),$$

állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet $y_{I_p}(x)$ partikuláris megoldását, speciális $f(x)$ függvény esetén, kereshetjük olyan tagok összegeként, amelyek konstans szorzótól eltekintve az $f(x)$ függvényből, illetve a deriváltjainak tagjaiból adódnak. Így, ha

(a) $f(x) = p_n(x)$ n-ed fokú, $n \geq 0$, polinom,

akkor a partikuláris megoldás lehet, hogy

$$y_{I_p}(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_o$$

alakú, ahol az $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ valós számokat, azaz a határozatlan együtthatókat a differenciálegyenletbe való behelyettesítés után, együttható összehasonlítással kaphatjuk meg.

(b) $f(x) = e^{\alpha x}\, p_n(x)$, ahol α adott állandó,

$$y_{I_p}(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_o).$$

Ez az eset, ha $\alpha = 0$, akkor azonos az (a) esettel.

(c) $f(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \sin \beta x$, ahol α és β adott állandók.

$$y_{I_p}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \, (A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_o) +$$

$$+ e^{\alpha x} \cos \beta x \cdot (B_n x^n + \ldots + B_1 x + B_o)$$

A_i, B_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ a keresett állandók.

Az $y_{I_p}(x)$ próbafüggvény a fenti alakban nem lehet partikuláris megoldása az inhomogén differenciálegyenletnek, ha valamely tagját állandó szorzótól eltekintve tartalmazza az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldása. Ebben az esetben a próbafüggvényt

$$y^*_{I_p}(x) = x^m y_{I_p}(x)$$

alakban keressük, ahol m az a legkisebb természetes szám, amelyre $y^*_{I_p}(x)$-nek nincs közös tagja a homogén differenciálegyenlet általános megoldásával. Ha $m \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy rezonancia lépett fel.

A fentieket más formában is megfogalmazhatjuk: ha az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek a $\lambda = (\alpha + i\beta)$ szám m-szeres gyöke, akkor az inhomogén differenciálegyenletnek létezik $y^*_{I_p}(x) = x^m y_{I_p}(x)$ alakú megoldása, ahol $y_{I_p}(x)$ az (a), (b), (c) esetben felírt függvény.

232-236. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

232. $y'' - 2y' = e^x \sin x$

233. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

234. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$

235. $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + x e^{2x}$

236. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x.$

237-244. Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek partikuláris megoldását próbafüggvény segítségével!

(237.) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

(238.) $y'' - y' = 4x^2$

239. $y'' - y' - 2y = \sin 2x$

240. $y' - 5y = 2e^{5x}$

241. $y''' - 6y'' + 11\,y' - 6y = 2x\,e^{-x}$

242. $y' - 5y = x^2\,e^x - x\,e^{5x}$

243. $y' - 5y = (x - 1)\sin x + (x + 1)\cos x$

244. $y' - y = \sin x + \cos 2x$

- . -

245-246. Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek partikuláris megoldását az állandók variálásával!

(245.) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

246. $y'' + 4y = \sin^2 2x$

- . -

247-255. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat!

247. $y'' - y' - 2y = 4x^2 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$

248. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

249. $y'' + 4y' + 8y = \sin x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

250. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0; \quad y(\pi) = 0$

$y'(\pi) = 0$

$y''(\pi) = 1$

251. $y'' + y = x; \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = 1$

252. $y'' + 4y = \sin^2 2x; \quad y(\pi) = 0; \quad y'(\pi) = 0$

253. $y'' + y = 0; \quad y(2) = 0; \quad y'(2) = 0$

254. $y''' = 12; \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = 0; \quad y''(1) = 0$

255. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin 2t + \cos 2t; \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$

12. Lineáris differenciálegyenlet változó együtthatókkal

A változó együtthatós lineáris differenciálegyenlet megoldására általános módszert nem ismerünk. Másodrendű esetben, ha ismerünk egy megoldást, az állandók variálásának módszere alkalmazható az általános megoldás megkereséséhez.

256-257. Oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenleteket, ha ismerjük az $y_1(x)$ megoldást!

256. $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0;$ $\quad y_1(x) = x$

257. $\sin^2 x \; y'' - 2y = 0;$ $\quad y_1(x) = \operatorname{ctg} x$

- . -

258. Igazoljuk, hogy az

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 6x \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

differenciálegyenletnek van három lineárisan független $\varphi(x) = x^r$, (r egész szám), alakú megoldása!

259. Igazoljuk, hogy $\ln x$ megoldása az

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 6x \frac{dy}{dx} + 12\,y = 12 \ln x - 4, \quad x > 0,$$

differenciálegyenletnek! Írjuk fel az általános megoldást!

260-263. Határozzuk meg azokat a differenciálegyenleteket, amelyeknek általános megoldásai a következő függvények!

260. $y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

261. $y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x\, e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$

262. $y_H(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{5x}}{12}$

263. $y_H(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x, \quad x > 0.$

- . -

Az $a_o, a_1, \ldots, a_n$ állandókkal felírt

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} +$$

$$+ a_o y = f(x),$$

differenciálegyenlet-, ahol $f(x)$ folytonos függvény - Cauchy-féle lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. ($n = 2$ esetén Euler-féle). Az $x = e^z$ helyettesítéssel állandó együtthatósra vezethetjük vissza.

(264) Oldjuk meg az

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Cauchy-féle differenciálegyenletet!

(265) $y_1(x) = x$ megoldása az

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 0, \quad x \neq 0$$

differenciálegyenletnek. Határozzuk meg az általános megoldást!

266. $y_1(x) = e^{2x}$ megoldása az

$$(x - 2) \frac{d^2 y}{dx^2} - (4x - 7) \frac{dy}{dx} + (4x - 6) y = 0$$

differenciálegyenletnek. Határozzuk meg az általános megoldást!

[267] Oldjuk meg az

$$a x^2 y'' + b x y' + cy = 0$$

Euler-féle differenciálegyenletet, ahol a, b, c állandók!

268. Írjuk fel az

$$x^2 y'' - xy' - 15y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

269. Oldjuk meg az

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$$

differenciálegyenletet!

270. Oldjuk meg az

$$x^2 y'' + 3x y' + y = 0$$

differenciálegyenletet!

271. Oldjuk meg az

$$x^2y'' - xy' + y = 8x^3$$

inhomogén Euler-féle differenciálegyenletet!

272-273. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

272. $y^{(4)} \cdot y^{(3)} = 1, \qquad y^{(3)} > 0.$

273. $(2x - 3)y''' - (6x - 7)y'' + 4xy' - 4y = 8;$

$$y_1(x) = -2.$$

- . -

Az $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

differenciálegyenlet esetében, ha

a) $a_1(x) + x\, a_0(x) = 0$, akkor $y(x) = x$ megoldás;

b) $m^2 + ma_1(x) + a_0(x) = 0$; $m \in \mathbb{R}$; akkor $y(x) = e^{mx}$ megoldás.

274-276. Az előbbi állításaink felhasználásával oldjuk meg a következő feladatokat!

(274) $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x - 1$

(275) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = (x^2 + x - 1)e^{2x}$

(276) $(x - 2)y'' - (4x - 7)y' + (4x - 6)y = 0$

- . -

(277) Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyek bármely pontjában a normálisnak a görbepont és az X -tengely közötti szakasza egyenlő hosszúságú a pontbeli görbületi sugárral.

13. Differenciálegyenletek megoldása hatványsor módszerrel. Bessel-függvények

Magassabbrendű lineáris differenciálegyenletek megoldásait csak kivételes esetekben lehet elemi függvénnyel megadni. Így például több fontos műszaki-fizikai feladat vezet a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (1 - \frac{p^2}{x^2})y = 0, \quad p \in \mathbb{R},$$

alakú másodrendű, úgynevezett Bessel-féle differenciálegyenletre, amelynek nem elemi függvények a megoldásai. A p paraméter minden értékéhez két alapmegoldás tartozik, amelyeket p-edrendű Bessel-függvényeknek nevezünk. Közülük az, amely az $x = 0$ helyen korlátos $J_p(x)$ elsőfajú p indexű a másik pedig az $Y_p(x)$ másodfajú p indexű Bessel-függvény. A megoldásokat hatványsor alakjában kereshetjük.

278. Határozzuk meg a $p = n$ (n természetes szám) indexű elsőfajú Bessel függvényt, azaz keressük meg az

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

differenciálegyenletnek $J_n(x)$ partikuláris megoldását!

279. Állítsuk elő az

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

differenciálegyenletnek $J_o(x)$-tól lineárisan független másik megoldását!

280-283. Oldjuk meg "hatványmódszerrel" a következő differenciálegyenleteket!

280. $y'' - x^2y' - y = 0$

281. $y'' - 2x^2y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$

282. $x\,y'' - y' + x^2y = 0$

283. $(x^2 - x + 1)\,y'' + 3xy' - 2y = 0$

- . -

284. x^2, $x^2 - x$, 2 polinomokkal felírt

$$x^2\,y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$$

differenciálegyenletnek $x = 0$ szinguláris pontja, mert az y'' együtthatója $x^2 = 0$, ha $x = 0$. Igazoljuk, hogy nincs $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ alakú, (nem triviális), megoldása!

(285) A $2x\,y'' + (x + 1)y' + 3y = 0$ differenciálegyenletnek $x = 0$ szinguláris pontja, mert $2x = 0$, ha $x = 0$. Igazoljuk, hogy a szinguláris pont reguláris, azaz van x hatványai szerint haladó megoldás!

14. Másodrendű differenciálegyenletek alkalmazása

Anyagi részecske mozgásegyenletei

1. Egyenesvonalú mozgás az m tömegű részecske x helyzetétől függő $g(x)$ erő hatására:
A mozgásegyenlet, amely a szabad rezgés differenciálegyenlete:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = g(x); \qquad x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = v_o .$$

Az általános megoldás:

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - v_o^2\right] = \int_{x_o}^{x} g(x)dx.$$

2. Egyenesvonalú mozgás rugalmas visszatérítő erő és csillapítás hatása alatt:
A rugóerő $-kx$, $k > 0$,
A sebességtől függő fékezőerő $-\beta v = -\beta\frac{dx}{dt}$, $\beta > 0$.
A mozgásegyenlet, amely a csillapított szabad rezgés differenciálegyenlete:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + k\,x = 0.$$

Az általános megoldás:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} .$$

a) $\beta^2 > 4\,km$ esetén $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

A mozgás típusa <u>lecsengés.</u>

b) $\beta^2 < 4\,km$ esetén

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left[c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t\right].$$

A mozgás típusa <u>oszcilláló jellegű lecsengés</u>.

c) $\beta = 2\sqrt{km}$ esetén

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + c_2 t e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}.$$

A mozgás típusa <u>kritikus csillapítású lecsengés.</u>

3. Egyenesvonalú mozgás rugalmas visszatérítő erő esetén <u>periodikus külső erő</u> hatására:
A mozgásegyenlet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = F_o \sin \omega t.$$

Általános megoldása

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{F_o \sin \omega t}{m\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}$$

ha $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ha $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, akkor rezonancia van:

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \frac{F_o}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\,t \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Az utolsó tag minden határon túl <u>növekvő amplitúdójú rezgést</u> jelent.

4. Tömegpont kényszerített rezgése csillapítással:
A mozgásegyenlet, amely a <u>csillapított szabad rezgés, kényszerített rezgésének</u> differenciálegyenlete:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin \omega t.$$

Egy partikuláris megoldás:

$$x_{I_p}(t) = F_o \frac{(k - m\omega^2)\sin \omega t - \beta\omega \cos \omega t}{(k - m^2)^2 + \beta^2 \omega^2} =$$

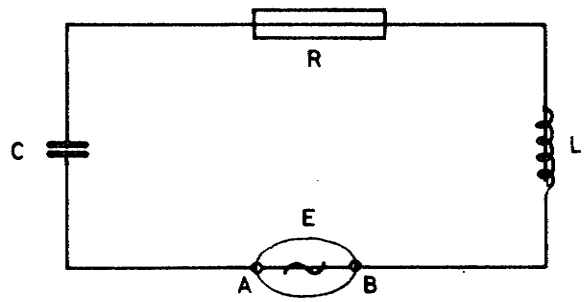
$$= \frac{F_o}{\sqrt{(k - m^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \sin (\omega t - \psi),$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\beta\omega}{k - m\omega^2} .$$

A témakör feladatai a Villamosmérnöki Kar Dr. Sztopa Gyula szerkesztette; Mechanika Példatár II. kötet, J. 5-961. számában találhatók.

Áramkörök differenciálegyenlete

Tekintsük a következő rezgőkört:



01. ábra

Legyen a c kapcacitású kondenzátor feszültsége a rajta átmenő áram erőssége i, a rezisztencia R és a tekercs önindukciós tényezője L. Feltesszük, hogy periodikus feszültség, $E = E_o \sin \omega t$, hat az áramfejlesztő A és B kapcsai között.

A rezgés differenciálegyenlete:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{c} = E_o \sin \omega t,$$

illetve

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = E_o \sin \omega t.$$

A mechanikai és elektromos rezgések analógiáját is megfigyelhetjük. A megfelelő mennyiségek a következők:

inerciaerő	önindukciós tényező
csillapítás	rezisztencia
rugalmas visszatérítés	a kapacitás reciproka
külső mechanikai erő	feszültség

A témakör feladatai a Villamosmérnöki Kar, Dr. Fodor György szerkesztette; Villamosságtan Példatár I.; J. 5-1119. számában találhatók a következő részekben:

II. fejezet	Általános áramú hálózatok.
	2.3 Lineáris invariáns hálózatok.
IV. fejezet	Lineáris hálózatok analízise.
	4.1 Vizsgálat az időtartományban.

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK RENDSZEREK

15. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszerek

Legyen $\underline{\underline{A}}$ n-edrendű mátrix, $n \geq 2$ természetes szám.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer.
Van n-számú lineárisan független $\underline{x}_1(t), \ldots \underline{x}_n(t)$ megoldása, azaz alaprendszere.

$$\underline{\underline{X}}(t) = [\underline{x}_1(t), \ldots \underline{x}_n(t)]$$

alapmátrix.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\,; \quad x(t_o) = x_o$$

kezdetiérték feladat. Ha

$$\underline{\underline{X}}(t_o) = \underline{\underline{E}},$$

akkor a $\underline{\underline{X}}(t)$ alapmátrix, rezolvensmátrix.
Ha az $\underline{\underline{A}}$ együttható mátrix egyszerű struktúrájú, azaz van n számú lineárisan független sajátvektora, akkor

$$\underline{\underline{X}}(t) = [e^{\lambda_1 t}\,\underline{s}_1, e^{\lambda_2 t}\,\underline{s}_2, \ldots e^{\lambda_n t}\,\underline{s}_n],$$

ahol λ_i és $\underline{s}_i$ összetartozó sajátérték és sajátvektor, $i = 1,\ldots n$.
Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix nem egyszerű struktúrájú, akkor az alapmátrix saját- és fővektorokkal írható fel. Legyen az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékhez tartozó vektorszéria: $\underline{h}_1, \ldots \underline{h}_k$, vagyis álljanak fenn az

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{h}_1 = \underline{h}_1, \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{h}_2 = \lambda\underline{h}_2 + \underline{h}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}\,\underline{h}_k = \lambda\underline{h}_k + \underline{h}_{k-1}$$

egyenlőségek. Legyen

$$\underline{\omega}_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,\underline{h}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\,\underline{h}_2 + \ldots + \underline{h}_r,$$

$$(r = 1,\ldots,k).$$

Ekkor

$$\underline{x}_r(t) = \underline{\omega}_r(t)\, e^{\lambda t} \qquad r = 1,\ldots,k$$

k -számú lineárisan független megoldás. ($\underline{x}_r(0) = \underline{h}_r$).
Az alaprendszert a következőképpen kereshetjük: legyenek

$$\underline{h}_1,\ \underline{h}_2,\ldots\underline{h}_{k_1};\quad \underline{h}_{k_1+1},\underline{h}_{k_1+2},\ldots\underline{h}_{k_1+k_2};\ \ldots$$

a λ_1; λ_2 ... sajátértékekhez tartozó vektorszériák. Az alaprendszert az

$$\underline{x}_1(t) = \underline{h}_1\, e^{\lambda_1 t} \ldots,\quad \underline{x}_{k_1}(t) = \underline{\omega}_{k_1}(t)\, e^{\lambda_1 t},$$

$$\underline{x}_{k_1+1}(t) = \underline{h}_{k_1+1}\, e^{\lambda_2 t},\ldots,\ \underline{x}_{k_1+k_2}(t) =$$

$$= \left(\frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!}\,\underline{h}_{k_1+1} + \ldots + \underline{h}_{k_1+k_2}\right) e^{\lambda_2 t}$$

megoldások adják.

286-300. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszereket!

(286.) $\dot{x} = 2x + y$, ahol $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

$\dot{y} = 3x + 4y.$

(287.) $\dot{x} = x - y$

$\dot{y} = y - 4x.$

(288.) $\dot{x} = x + y$

$\dot{y} = 3y - 2x.$

(289.) $\dot{x} = -x - 5y$

$\dot{y} = x + y.$

(290.) $\dot{x} = 2x + y$

$\dot{y} = 4y - x.$

291. $\dot{x} = 2y - 3x$

$\dot{y} = y - 2x.$

292. $\dot{x} = y + z$
$\dot{y} = 5x + y - z$
$\dot{z} = y + z.$

293. $\dot{x} = 2x + y$
$\dot{y} = y$
$\dot{z} = 3z.$

294. $\dot{x} = y + z$
$\dot{y} = z + x$
$\dot{z} = x + y.$

295. $\dot{x} = - x + y + z$
$\dot{y} = x - y + z$
$\dot{z} = x + y - z$

296. $\dot{x} = x - y - z$
$\dot{y} = x - y$
$\dot{z} = x - z.$

297. $\dot{x} = 2x + y$
$\dot{y} = 2y + z$
$\dot{z} = 2z.$

298. $\dot{x} = -x + y$
$\dot{y} = 2y + z$
$\dot{z} = 2z.$

299. $\dot{x} = y$
$\dot{y} = 0$
$\dot{z} = z.$

300. $\dot{x} = 0$
$\dot{y} = 0$
$\dot{z} = 0.$

- . -

301-304. Differenciálegyenletre való visszavezetéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket!

301. $\frac{dy}{dx} = z$; $z(x)$, $y(x)$ az ismeretlenek.
$\frac{dz}{dx} = - y$ $z, y: \quad R \rightarrow R.$

302. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} y.$

303. $\frac{dy}{dx} = y + z$

$\frac{dz}{dx} = y + z + x.$

304. $\frac{dx}{dt} = y$

$\frac{dy}{dt} = z$

$\frac{dz}{dt} = x.$

16. Az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ alapmátrix

Az $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ állandó együtthatós, homogén lineáris dirferenciálegyenlet alapmátrixa az

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}}t + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n t^n,$$

minden $\underline{\underline{A}}$ n-edrendű mátrixra konvergens végtelen mátrixhatványsor.

Az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ mátrix meghatározása Lagrange-féle és Hermite-féle interpolációs polinommal a következőképpen történik:

Ha az $\underline{\underline{A}}$ együttható mátrixnak n számú $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértéke van, akkor

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = L(\underline{\underline{A}}, t),$$

ahol $L(\lambda, t)$ a t paramétert tartalmazó legfeljebb (n-1)-ed fokú Lagrange-féle interpolációs polinomja λ-nak Alappontjai a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértékek.

Felírása történhet határozatlan $\ell_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots n$ együtthatókkal:

$$L(\lambda,t) = \ell_{n-1}(t)\,\lambda^{n-1} + \ldots + \ell_1(t)\,\lambda + \ell_o(t) ,$$

amelyeket az

$$L(\lambda_k, t) = e^{\lambda_k t}, \qquad k = \ ,2,\ldots,n,$$

egyenletrendszerből határozhatunk meg.
Ha az $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrix sajátértékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\ell$$

rendre

$$m_1, m_2, \ldots, m_\ell$$

multiplicitással, $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n)$,

akkor Hermite-féle

$$H(\lambda, t) = h_{n-1}(t)\,\lambda^{n-1} + \ldots + h_1(t)\lambda + h_o(t)$$

legfeljebb n-1-edfokú interpolációs polinomot írhatunk fel és a $h_i(t)$, $i = 0, \ldots n-1$ együtthatókat a

$$H^{(i)}(\lambda_k,t) = t^i e^{\lambda_k t}, \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, \ell \\ i = 0, 1, \ldots, m_k-1, \end{matrix}$$

(azaz a $H(\lambda,t)$ polinom λ szerinti i-edik deriváltjának a λ_k helyen vett értékével felírt), egyenletrendszerből nyerhetjük.

305-309. Oldjuk meg az alábbi állandóegyüttnato differenciálegyenlet rendszereket az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ alapmátrix megkeresésével!

305. $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}$

306. $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$

307. $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$

308. $\dot{\underline{x}} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \underline{x}$

309. $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

- . -

310-313. Határozzuk meg az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ mátrixot, az alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrixokhoz!

310. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

311. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

312. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

313. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- . -

17. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer

Az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \qquad \underline{x}(t_o) = \underline{x}_o$$

kezdetiérték feladat megoldása:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_o)}\,\underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\,f(\tau)\,d\tau\,.$$

Legyen az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{f}(t)\,; \qquad \underline{x}(t_o) = \underline{x}_o$$

rezolvensmártirxa: $\underline{\underline{X}}(t)$; $\underline{\underline{X}}(t_o) = \underline{\underline{E}}$.

A kezdetiérték feladat megoldása az állandó vektor variálásával

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{X}}(t)\,\underline{x}_o + \underline{\underline{X}}(t) \int_{t_o}^{t} \underline{\underline{X}}^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\,.$$

314-322. Oldjuk meg a következő állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszereket!

(314) $\dot{x} = y + 2e^t$

$\dot{y} = x + t^2$

315. $\dot{x} = 4x + y - e^{2t}$

$\dot{y} = y - 2x$

316. $\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$.

317. $\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}$.

318. $\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}$

310. $\dot{x} = -5x - y + e^t$

$\dot{y} = x - 3y + e^{2t}$

320. $4\dot{x} + 9\dot{y} + 11x + 31y = e^t$

$3\dot{x} + 7\dot{y} + 8x + 24y = e^{2t}$

321. $\frac{dx}{dt} = y$

$\frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}$.

(322) $\frac{dx}{dt} = y - \cos t$

$\frac{dy}{dt} = -x + \sin t$.

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek átalakítása elsőrendű lineáris rendszerré

Az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_o(x)y = f(x)$$

$$y(x_o) = y_o\,, \qquad \underline{y}_o = \begin{bmatrix} y_o \\ y_o' \\ \vdots \\ y_o^{n-1} \end{bmatrix}$$
$$y'(x_o) = y_o'\,,$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}\,.$$

kezdetiérték feladathoz az

$$y_1 = y \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y}(x_o) = \underline{y}_o$$
$$y_2 = y'$$
$$\vdots$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

jelölésekkel az

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_o(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet rendszer tartozik. Innen

$$\underline{y}(x) = \underline{\underline{W}}(x)\underline{y}_o + \underline{\underline{W}}(x) \int_{t_o}^{x} \underline{\underline{W}}(\tau)^{-1} \underline{f}(\tau)\,d\tau\,,$$

amelynek első koordinátája a megoldás
$\underline{\underline{W}}(x)$ a Wronski-féle mátrix. Első sorában a homogén differenciálegyenlet n számú

$$y(x)_1\,, \qquad y(x)_2, \ \dots \ y(x)_n$$

lineárisan független megoldása áll. A kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} y(x)_k\, y_o^{(n-1)} + \int_{x_o}^{x} \frac{\det \underline{\underline{W}}(\tau, x)}{\det \underline{\underline{W}}(\tau)}\, f(\tau)\,d\tau\,,$$

ahol det $\underline{\underline{W}}(\tau, x) =$

$$\begin{bmatrix} y(\tau)_1, & y(\tau)_2, & \dots & y(\tau)_n \\ y'(\tau)_1, & y'(\tau)_2, & \dots & y'(\tau)_n \\ \vdots & \vdots & & \\ y(\tau)_1^{(n-2)} & y(\tau)_2^{(n-2)} & \dots & y(\tau)_n^{(n-2)} \\ y(x)_1 & y(x)_2, & \dots & y(x)_n \end{bmatrix}$$

A képlet levezetését és feladatokat Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai c. könyvében találhatunk. (Műszaki Könyvkiadó.)

323-325. Oldjuk meg a következő feladatokat differenciálegyenlet rendszerekre való átírás segítségével!

323. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = e^t; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -4$

324. $\ddot{x} + x = 3; \quad x(\pi) = 1, \quad \dot{x}(\pi) = 2$

325. $\ddot{x} = -2\dot{x} - 5y + 3; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$

$\dot{y} = \dot{x} + 2y \quad y(0) = 1$

18. Egyensúlyi helyzetek osztályozása — A fázissík

Legyen $\underline{\underline{A}} = [a_{ik}]$, $i,k = 1,2,;$ másodrendű mátrix. Az $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ differenciálegyenlet rendszernek $\underline{x} \equiv \underline{0}$ egyensúlyi helyzete, mert kielégíti az

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = 0$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = 0$$

egyenletrendszert. A differenciálegyenlet rendszerből differenciálegyenletet kapunk az $x = x_1$, $y = x_2$ jelölésekkel

A $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}\,x + a_{22}\,y}{a_{11}\,x + a_{12}\,y}$ differenciálegyenletnek az origó szinguláris pontja.

A 2 ismeretlenes elsőrendű differenciálegyenlet rendszer megoldásai szemléltethetők a 3 dimenziós tér görbéivel. Adott $\underline{x}(t)$ megoldás esetén a $t \in I$ értékhez hozzárendeljük a

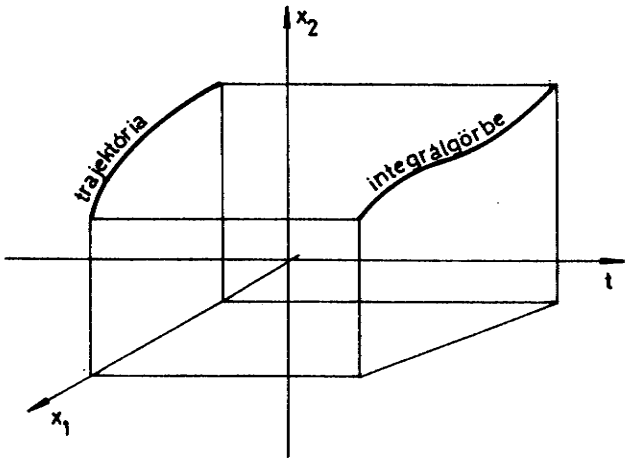
$(t, \underline{x}(t)) \in \mathbb{R}^3$ vektort.

Állandó együtthatós differenciálegyenlet rendszernél jó szemléltetést kapunk akkor is, ha a megoldásgörbét "levetítjük" az utolsó 2 koordináta terére, a differenciálegyenlet rendszer "fázisterére". A vetített 2 dimenziós görbét <u>trajektóriának</u> nevezzük. Ebben az esetben az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

megoldásgörbéjének pontjai a $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ pontok a trajektória pontjai az $(x_1, x_2) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontok,azaz a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$ differenciálegyenlet megoldásai.



02. ábra

Az $\dot{x}_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2$

$\dot{x}_2 = a_{22}\,x_1 + a_{22}\,x_2, \quad a_{ik} \in \mathbb{R} \quad i,k = 1,2,\ldots$

differenciálegyenlet rendszer fázistrajektóriáinak képe függ az a_{ik} együtthatóktól, illetve az $A=(a_{ik})$ mátrix sajátértékeitől.

Tegyük fel először, hogy az A mátrix λ_1, λ_2 sajátértékei zérustól és egymástól különbözőek. Az $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ lineárisan független sajátvektorokkal az

$$\underline{x}(t) = c_1 \underline{s}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \underline{s}_2 e^{\lambda_2 t}$$

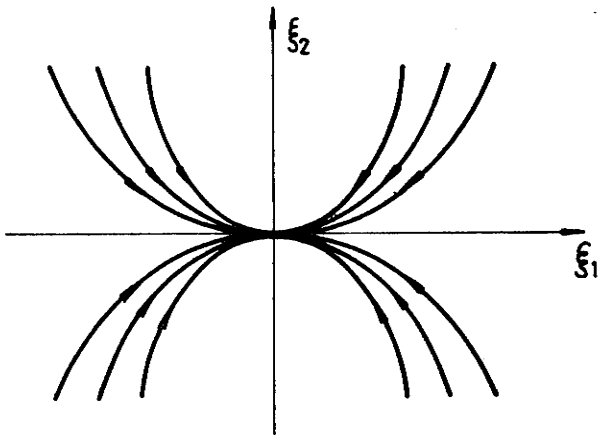
általános megoldást írhatjuk fel. Az $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ bázisban, a trajektória

$$(\xi_1, \xi_2) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

pontjai $t \to +\infty$ esetén λ_1 és λ_2 előjeleitől függően "mozognak".

I. Csomópont

a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ esetén a pozitív abszcissza és az ordinátatengelyen a mozgás a kooordináta-rendszer kezdőpontja felé irányul. Az első negyedben bármelyik trajektórián a mozgó pont, $t \to +\infty$ esetén, az origóhoz aszimptotikusan közeledik. Ekkor az origó stabilis csomópont.



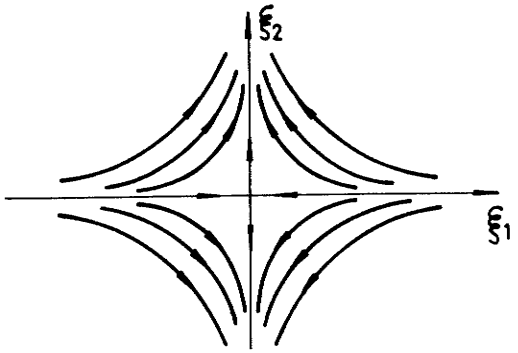
I. ábra
Stabilis csomópont

(A rajzon feltételeztük, hogy $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ merőlegesek.)

b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ esetén a nyilak fordított irányúak. Az origó labilis csomópont.

II. Nyeregpont. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

A mozgás az abszcissza-tengelyen az origó felé, az ordináta tengelyen attól távolodva történik. A fázistrajektóriák alkotják a nyerget. Az origó a nyeregpont.



II. ábra
Nyeregpont

Ha a sajátvektorok nem merőlegesek, akkor az ábrák affin transzformációval torzulnak. Részletes magyarázatot és rajzot L. Sz. Pontrjagin: Közönséges differenciálegyenletek című könyvében találunk.

III. Fókusz- és örvénypont, vagy centrum

A $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$ komplex sajátértékek esetén a valós alaprendszer

$$\underline{x}_1(t) = \mathrm{Re}\, e^{\lambda_1 t}\, \underline{s}_1, \quad \underline{x}_2(t) = \mathrm{Im}\, e^{\lambda_1 t}\, \underline{s}_1.$$

Az $\underline{s}_1 = \underline{v}_1 + i\,\underline{v}_2$; $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ valós vektorokkal

$$\xi_1(t) = c_1\, e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2\, e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

$$\xi_2(t) = c_2\, e^{\alpha t} \cos \beta t - c_1\, e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Helyettesítsük a $c_1 = a \cos \varphi$, $c_2 = -a \sin \varphi$ állandókat. Ekkor az (r,t) rendszerben

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = a^2\, e^{2\alpha t} = r^2,$$

$$r = |a|\, e^{\alpha t}$$

a) $\alpha = 0$ esetén

$$r = |a|$$

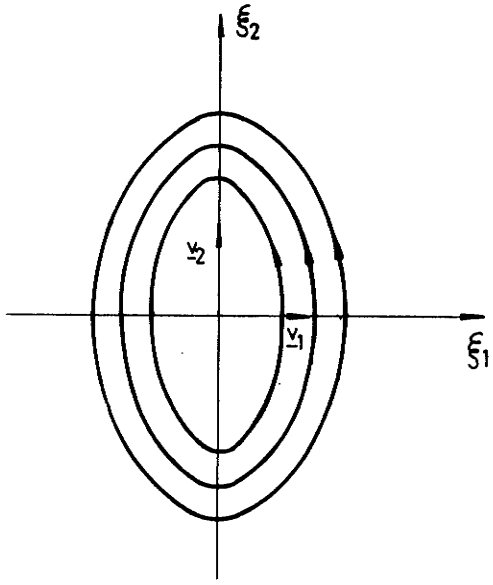
ellipszis. Az origó stabilis centrum, vagy örvénypont.

b) $\alpha > 0$ esetén $r = |a|\, e^{\alpha t}$ spirális

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = \infty,$$

Az origó labilis fókusz.

c) $\alpha < 0$ esetén, $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$, az origó stabilis fókusz. (Aszimptotikusan stabilis. A mozgás az origó felé történik.)



III.a) ábra
Centrum

A zérustól és egymástól különböző sajátértékek az $[a_{ik}]$ mátrix elemeinek kis változtatásával létrejöhetnek. Így az $[a_{ik}]$ mátrix elemeinek kis megváltoztatása nem módosítja a fázissík képét. Kivételt képez az $\alpha = 0$, (III.a), eset. Az $[a_{ik}]$ mátrix elemeinek kis megváltoztatása eredményezheti az $\alpha = 0$ egyenlőség megszűnését és a centrum stabilis vagy labilis fókuszba megy át.

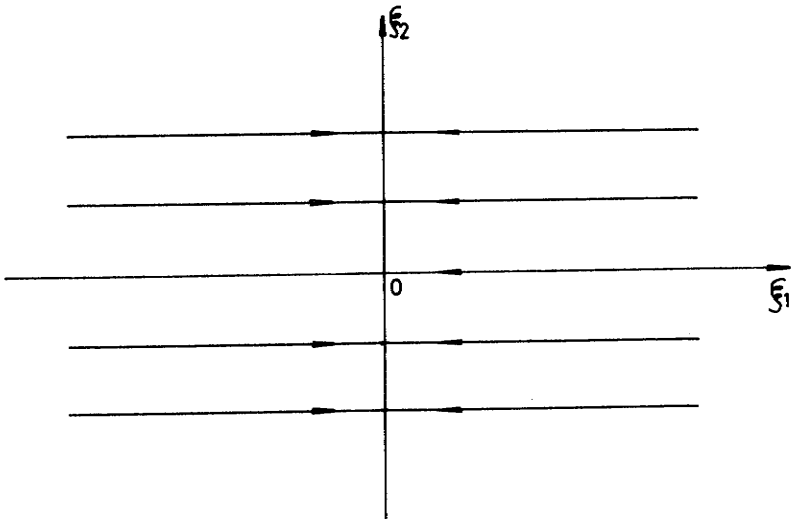
2.a) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ esetén

$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s}_1 + c_2 \underline{s}_2$ az általános megoldás.

$\xi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

$\xi_2(t) = c_2$.

A mozgás a $\xi_2 = c_2$ állandó egyeneseken megy végbe. A $\xi_1 = 0$ egyenes minden pontja egyensúlyi helyzet. A $\lambda_1 < 0$ esetet a 2.a) ábrán látjuk.



2.a) ábra

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ esetén az általános megoldás lehet $\underline{x}(t) = \underline{c}$ és a sík minden pontja egyensúlyi helyzet, vagy ha fővektorokkal dolgozunk,

$\underline{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\underline{h}_1 + c_2 \underline{h}_2$.

A mozgás a $\xi_2 = c$ egyeneseken megy végbe. A $\xi_2 = 0$ egyenes minden pontja egyensúlyi helyzet.

326-330. A következő differenciálegyenleteknek az origó egyensúlyi helyzete. Határozzuk meg a típusát és vázoljuk a trajektóriákat!

326. $\dot{x}_1 = x_1$
$\dot{x}_2 = x_2$

327. $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1$

328. $\dot{x}_1 = x_1$
$\dot{x}_2 = -x_2$

329. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2$

330. $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$

331. Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}\,, \quad \underline{A} = [a_{ik}]\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots n.$$

differenciálegyenlet rendszert. Igazoljuk, hogy ha az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus egyenlete valamennyi gyökének a valós része negatív, (vagyis a gyökök a bal oldali nyilt komplex félsíkba esnek), akkor a homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer bármely megoldása $t \to +\infty$ esetén a $\underline{0}$ egyensúlyi helyzethez tart.

332. Igazoljuk, hogy az alábbi differenciálegyenlet rendszer minden megoldása $t \to +\infty$ esetén a $\underline{0}$ egyensúlyi helyzethez tart!

$\dot{x}_1 = -x_1 + x_3$

$\dot{x}_2 = -2x_2 - x_3$

$\dot{x}_3 = x_2 - x_3$

333. Igazoljuk, hogy az

$\dot{x} = -7x + y; \qquad x(0) = 3$

$\dot{y} = -2x - 5y \qquad y(0) = -5$

kezdetiérték feladat megoldása $(0, +\infty)$-ban korlátos!

334. Igazoljuk, hogy az

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2$$

differenciálegyenlet rendszer bármely megoldása $t \to +\infty$ esetén az azonosan zérus egyensúlyi helyzethez tart!

335. Igazoljuk, hogy az

$$\dot{x}_1 = -7x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2$$

differenciálegyenlet rendszer bármely megoldása $t \to +\infty$ esetén az azonosan zérus egyensúlyi helyzethez tart!

336-340. Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenlet rendszereket!

336. $\dot{x}_1 = x_1 + (2 - t)x_2 + t^2 + t$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{t}x_1 + (\frac{1}{t} - 1)x_2 + t \; ; \qquad t > 0$$

337. $\dot{x}_1 = t\, x_1 + (1 - t^2)x_2$

$$\dot{x}_2 = x_1 - t\, x_2$$

338. $\dot{x}_1 = x_2 + \mathrm{tg}^2 t - 1$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1 + \mathrm{tg}\, t$$

339. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \frac{1}{\cos t}$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

340. $\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 15e^t \sqrt{t}$$

341-342. Oldjuk meg a következő másodrendű explicit differenciálegyenlet rendszereket!

341. $\ddot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2$

$$\ddot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$

342. $\ddot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2$

$$\ddot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

MEGOLDÁSOK

A megoldást a c_1 és c_2 ismeretlent tartalmazó

$y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$

$y'(0) = 2c_1 \cos 0 - 2c_2 \sin 0 = 1$

lineáris egyenletrendszer megoldása után kapjuk, amelyből $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$ adódik.

(21.) Nincs ilyen megoldás.
A $c_2 = 1$ és a $c_2 = -2$ ellentmondást kapjuk a peremfeltételekből.

22. $y((x) = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} (\sin 2x - \cos 2x)$

23. a) ; c); d)

3. Görbesereg differenciálegyenlete

[24]. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

$y = \sin (x + c)$-ből, $u(x,c) = \sin(x + c)$.

$u'_c(x,c) = \cos(x + c) \neq 0$ például, ha

$-\frac{\pi}{2} < x + c < \frac{\pi}{2}$.

Egyenletünk tehát görbesereg, ha minden rögzített c-re csak " π hosszúságú szakaszt" veszünk. Mivel

$y' = \cos(x + c)$ és $c = \arcsin y - x$,

ezért a keresett differenciálegyenlet

$y' = \cos(x + \arcsin y - x) = \cos(\arcsin y)$, vagyis

$y' = \sqrt{1 - y^2}$.

25. $y' = y \frac{\cos x}{\sin x}$, $0 < x < \pi$,

26. $y' = y$, $x \in \mathbb{R}$.

27. $y' = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

(28.) $y^2 y''^2 + y^2 = r^2$, $-r + c < x < r + c$, $|y| < r$.

Az $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ implicit függvényt deriváljuk x szerint. Innen $c = y y' + x$, amelyet az eredeti egyenletbe behelyettesítünk és a fenti differenciálegyenletet kapjuk.

29. $y' = x + y$

30. $(y - xy') = 1 + y'^2$; $x > 0, \quad y > 0.$
Az egyenesek egyenlete a tetszőlegesen rögzített (x_o, y_o) pontban: $y - y_o = y'(x_o)(x - x_o)$.
Mivel az egyenesek az egységsugarú origó középpontú negyedkör érintői,

$$x_o^2 + y_o^2 = 1,$$

$$y'(x_o) = -\frac{x_o}{y_o}.$$

Innen x_o és y_o kifejezhető, és az egyenes egyenletébe helyettesítve kapjuk a differenciálegyenletet.

31. $y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}$. $x > 0 \quad x > -y$ vagy
$x < 0$ és $y < -x$

A differenciálegyenletet deriválással kapjuk a görbeseregből:

$$2 + y' - \frac{2x + y + xy'}{\sqrt{x^2 + x\,y}} = 0,$$

vagy átalakítás után:

$$y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}.$$

Behelyettesítésekkel igazolhatjuk az állításokat: a görbesereg egyenletből $2x - x - c = 0$-ból $x = c$ adódik, tehát nincs olyan állandó c, amelyre $y = -x$ egy görbeegyed lenne, viszont ha az $y = -x$ függvényt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, akkor $-1 = -1 + \sqrt{-1 = -1}$ igazolja, hogy az megoldásgörbe.

32. $2\,y\,y'' = y'^2$.
Differenciáljuk az $y = c_1(x - c_2)^2$ függvényt kétszer:
$y' = 2c_1(x - c_2)$; $y'' = 2c_1$. A c_1 és c_2 konstansok kiküszöbölésének eredménye a differenciálegyenlet.

33. $y''^2 - (1 + y'^2)^3 = 0.$
Kétszeri differenciálás után,

$$x - a = y' \frac{(1 + y'^2)}{y''}; \quad y - b = \frac{-(1 + y'^2)}{y''}$$

felhasználásával, az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ egyenlet adja a differenciálegyenletet.

4. Szátválasztható változójú és az ilyenre visszavezethető egyenletek

34. $y(x) = \sqrt{2e^x - 1}$, $x > \ln \frac{1}{2}$.

I. megoldás.

$\int y\, dy = \int e^x dx + c$, azaz

$y^2 = 2e^x + k$, $k = 2c$.

Felhasználva a kezdeti feltételt

$1^2 = 2e^0 + k$, vagy $k = -1$.

Mivel a kezdeti feltételben $y_0 = 1 > 0$, ezért a megoldás $y = + \sqrt{2e^x - 1}$; $2e^x - 1 > 0$ vagy $x > \ln \frac{1}{2}$. $2e^x - 1 = 0$ nem lehetséges, mert a differenciálegyenlet $\frac{e^x}{y}$ jobb oldala, azaz y', $y = 0$ esetén nem létezik.

II. megoldás.

$\int_{y_0=1}^{y} t\, dt = \int_{x_0=0}^{x} e^u\, du$, mert $(x_0, y_0) = (0,1)$ a kezdeti érték. Integrálás után

$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = e^x - 1$,

ami a keresett megoldás implicit alakja.

35. $y(x) = -\sqrt{2 + 2\cos x}$, $x \neq \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

36. $y(x) = e^{-\frac{1}{3}(x^3+3x+4)}$

37. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{y^5}{5} - y = 0$

38. a) $y(x) = 0$ egyensúlyi helyzet ($y' = y^2x^3$ jobb oldala: $y^2 x^3 \equiv 0$, ha $y \equiv 0$).

Ekkor $y' = 0$, így a differenciálegyenletbe behelyettesítve az $y(x) \equiv 0$ függvényt, mindkét oldalon 0 áll.

b) $y(x) = \frac{4}{4 - x^4}$; $x \neq \pm \sqrt[4]{4}$.

A megoldás $y \neq 0$ esetén:

$$\int_1^y \frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^x u^3\,du.$$

39. a) $y(x) \equiv 0$ egyensúlyi helyzet, ui. $y' = -\frac{y}{x} = 0$, ha $y \equiv 0$, $x \neq 0$.

b) $|y(x)| = \frac{c}{|x|}$ $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, ui.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k = \ln c \text{ -vel}$$

$\ln |y| = \ln \frac{c}{|x|}$ -ből kapjuk a megoldást.

40. a) $y(x) \equiv -1$ egyensúlyi helyzet, ui. $y' = \frac{x^3(y + 1)}{y(x + 1)} = 0$, ha $y = -1$.

b) $-y + \ln\left|\frac{y + 1}{x + 1}\right| + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x = c$, $x \neq 1$, $y \neq -1$, $y \neq 0$.

41. $\frac{1}{2}(y + \sin y \cos y) - \arcsin \frac{x}{5} = c$, $|x| < 5$, $\cos y \neq 0$.

42. a) $y(x) \equiv 0$ egyensúlyi helyzet.

b) $x = \frac{cy}{\sqrt{1 + y^2}}$ $x \neq 0$.

A differenciálegyenlet szeparálható, hiszen átrendezve adódik az $y' = \frac{y(y^2 + 1)}{x}$ alak. Az $\int \frac{-y}{y^2 + 1}dy +$ $+ \int \frac{1}{y}\,dy + k = \int \frac{1}{x}\,dx$

egyenletből kapjuk a megoldást. ($k = \ln c_1$, $c = \pm c_1$).

43. a) $y_1(x) \equiv 0$, ha $y_o = 0$. egyensúlyi helyzet.

b) $y_2(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_o} + \sin x_o - \sin x}$, ha $y_o \neq 0$.

A megoldás értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$, ha $\left|\frac{1}{y_o} + \sin x_o\right| > 1$.

Ha $\left|\frac{1}{y_o} + \sin x_o\right| \leq 1$, akkor a megoldás értelmezési tartománya az x_o pontot tartalmazó olyan leghosszabb intervallum, amelynek egyetlen x pontjában sem igaz, hogy $\left|\frac{1}{y_o} + \sin x_o\right| = \sin x$.

44. a) Alkalmazzuk az

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y' = u'x + u$$

helyettesítést. Így az

$$u'x + u = f(u),$$

illetve az

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szeparálható differenciálegyenletet kapjuk.

b) $y(x) = x \ln |cx|$.

$$u = \frac{y}{x}, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x| + k.$$

Legyen $k = \ln c$. Ezzel

$$\frac{y}{x} = \ln|c\,x|.$$

c) $x + 2y\, e^{\frac{x}{y}} = c, \quad c > 0.$

$$A\ (1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}\ (1 - \frac{x}{y})dy = 0.$$

differenciálegyenlet 0-ad fokú homogén.

$v = \frac{x}{y}$ helyettesítéssel, $dx = v\,dy + y\,dv$,

$$(1 + 2e^{v})(v\,dy + y\,dv) + 2e^{v}(1 - v)dy = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{1 + 2e^{v}}{v + 2e^{v}}\,dv = 0, \quad y \text{ a független változó.}$$

$$\ln|y| + \ln(v + 2e^{v}) = \ln c,$$

amely a $v = \frac{x}{y}$ helyettesítés után a megoldás implicit alakja.

d) $4x = x^2 - y^2$.

Első megoldás:

Az $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$; $y(4) = 0$ kezdetiérték feladatból az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel az új kezdetiérték feladat:

$u' = \frac{1}{x} \frac{1 - u^2}{2u}$; $u(4)=0$. Szétválasztva

$\int_0^u \frac{2u}{1 - u^2}\, du = \int_4^x \frac{1}{x}\, dy$, azaz

$- \ln(1 - u^2) = \ln \frac{x}{4}$; $\frac{1}{1 - u^2} = \frac{x}{4}$; $1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{4}{x}$;

$x^2 - y^2 = 4x$

Második megoldás: a helyettesítés után

$\int \frac{2u}{1 - u^2} = \int \frac{1}{x}\, dx$.

$- \ln(1 - u^2) + k = \ln x$; $k \in \mathbb{R}$; $k = \ln c$,

$\frac{c}{|1 - u^2|} = x$; $\frac{c\, x^2}{|x^2 - y^2|} = x$

Mivel $y(4) = 0$, ezért $x^2 > y^2$ és $c = 4$.

45. $cx = e^{\arcsin \frac{y}{x}}$ $x > 0$.

$x\, dy - y\, dx - \sqrt{x^2 - y^2}\, dx = 0$, $x > 0$

A differenciálegyenlet elsőfokúan homogén. A $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel, $dy = v\, dx + x\, du$

$x \cdot du - \sqrt{1 - v^2}\, dx = 0$,

$\arcsin v - \ln|x| = \ln c$ $k > 0$

$\arcsin \frac{y}{x} = \ln (c|x|)$, ha $x > 0$, akkor

$c\, x = \arcsin \frac{y}{x}$.

46. $y(x) = c\, x^2 - x$

47. $y^4 = c\, x^8 - x^4$, $c > 0$

48. $y = x\, \mathrm{tg}\, (\ln cx)$.

49. $2cy = c^2 x^2 + 1$.

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{A_1u + B_1v}{A_2u + B_2v}\right)$$

differenciálegyenletet kapjuk.

b) $\frac{y - 1 - 4x}{y - 1 - x} = c\,x^3$.

$$y' = \frac{(2x - y + 1)^2}{x^2}$$

$$2x - y + 1 = 0$$

$$x = 0$$

lineáris egyenletrendszerből $(x_o, y_o) = (0,1)$.

Az

$$x = u$$
$$y = v + 1$$

transzformációval

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{2u - v}{u}\right)^2$$

A

$$z = \frac{v}{u}$$

helyettesítéssel

$$z'\,u + z = (2 - z)^2,$$

ezért

$$\int \frac{dz}{(z - 4)(z - 1)} = \int \frac{du}{u}.$$

Innen

$\frac{1}{3} \ln \frac{z - 4}{z - 1} = \ln k|u|$, $c = k^3$ és $u > 0$, akkor

$$\frac{z - 4}{z - 1} = c\,u^3.$$

Visszahelyettesítéssel

$$\frac{y - 1 - 4x}{y - 1 - x} = c\,x^3.$$

55. a) $\det \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = 0$ esetén,

ha

$= \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ létezik, akkor a differenciálegyenlet

$$y' = f\left(\alpha - \frac{\alpha C_2 - C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right)$$

alakú lesz, a számláló és nevező $A_2x + B_2y + C_2$-vel való osztása után.

Ha $\beta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$ létezik, akkor differenciálegyenlet

$$y' = f\left(\frac{1}{\beta - \frac{\beta C_1 - C_2}{A_1 x + B_1 y + C_1}}\right)$$

alakú lesz, a számláló és a nevező $A_1x + B_1y + C_1$-gyel való osztása után.
Mindkét esetben az 53. példában megismert típusra vezettük vissza a differenciálegyenletet.

b) $x + 2y + \ln(x + y - 2) = c$

$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0.$

Az $y' = -\frac{x + y - 1}{2x + 2y - 3}$ feladatból az

$u = x + y - 1, \qquad u' = 1 + y'$

helyettesítéssel az

$$u' = \frac{u - 1}{2u - 1}$$

szeparálható differenciálegyenletet nyerjük. Ha $u - 1 > 0$, akkor

$2u + \ln(u - 1) = x + c$ az

$u = x + y - 1$ helyen az eredeti differenciálegyenlet megoldása.

56 $x + y + 2\ln(2 - x - y) = c \cdot x + y < 2.$

Az $y' = -\frac{x + y}{3(x + y) - 4}$ differenciálegyenletben $u = x + y$ helyettesítéssel adódó

$$u' = \frac{2u - 4}{3u - 4}$$

egyenlet szeparálható.

57. $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = c.$

Az $y' = \frac{2x - 5y + 3}{2x + 4y - 6}$ differenciálegyenletből

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{és a} \quad \begin{aligned} 2x - 5y + 3 &= 0 \\ 2x + 4y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer egyértelmű $(x_o, y_o) = (1, 1)$ megoldásával

$x = u + 1$
$y = v + 1$

a helyettesítés. Ez a

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u - 5v}{2u + 4v},$$

homogén differenciálegyenletre vezet. Ezt szeparálhatóra visszavezetve a fenti megoldást kapjuk.

(58.) $\ln\left[4y^2 + (x - 1)^2\right] + \text{arc tg}\,\frac{2y}{x - 1} = c$;

$x = u + 1$

$y = v$ a helyettesítés.

(59.) $x + 2y + \ln(x + y - 2) = c$;

$u = x + y$ a helyettesítés.

(60.) $\ln\,(4y^2 + (x - 1)^2) + \text{arc tg}\,\frac{2y}{x - 1} = c$

$u = xy$ a helyettesítés.

(61.) $x = c\,y\,e^{xy}$; $c > 0$.

$u = xy$ a helyettesítés.

(62.) $\frac{y - 4x + 2}{y - 4x - 2} = c\,e^{-4x}$

$\frac{dy}{dx} = (y - 4x)^2$-hez a javasolt helyettesítés

$v = y - 4x$.

Ekkor

$dy = 4dx + dv$,

ahonnan

$4\,dx + dv = v^2\,dx$, $\qquad dx - \frac{dv}{v^2 - 4} = 0$.

Ezért

$x + \frac{1}{4}\ln\frac{v + 2}{v - 2} = c_1$, $\qquad \ln\frac{v + 2}{v - 2} = \ln c - 4x$; $\ln c = c_1$,

$\frac{v + 2}{v - 2} = c\,e^{-4x}$ és így $\frac{y - 4x + 2}{y - 4x - 2} = c\,e^{-4x}$

5. Lineáris és lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek

(63.) $y(x) = c\,e^{5x}$.

A differenciálegyenlet szeparálható is.

$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx, \quad \ln|y| = 5x + k, \quad y = c\,e^{5x}, \quad c = \pm e^{k}, \quad k \in \mathbb{R}.$

64. $y(x) = c\,e^{-\frac{x^3}{3}}$.

65. $y(x) = \frac{c}{\cos x}$.

66. $y(x) = c(x - 2)$.

67. $y(x) = x^2(c + x - \frac{1}{x})$. $\quad c \in \mathbb{R}$.

$y' = \frac{2}{x}y$ a homogén differenciálegyenlet; ez szeparálható.

$\int \frac{dy}{y} = \int 2\,\frac{dx}{x}$,

ahonnan, ha $x > 0$ és $y > 0$,

$\ln y = 2 \ln x + \ln c = \ln c\,x^2, \quad c > 0.$

Tehát az általános megoldás:

$y(x) = c\,x^2$.

Keressük az inhomogén egyenlet megoldását!

$y_{I_p}(x) = c(x)x^2$ alakban, (az állandó variálásával).

$y'_{I_p}(x) = c'(x)\,x^2 + 2c(x)x.$

Az $y' = \frac{2}{x}\,y + x^2 + 1$ inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve:

$c'(x)\,x^2 + 2\,c(x)x = \frac{2}{x}\,c(x)\,x^2 + x^2 + 1,$

összevonás után:

$c'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$,

innen

$c(x) = x - \frac{1}{x}$.

Ezért

$$y_{I_p}(x) = (-\frac{1}{x})x^2 = x^3 - x.$$

Tehát

$$y_I(x) = y_H(x) + y_{I_p}(x) = x^2(c + x - \frac{1}{x}).$$

68. $y(x) = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5.$

69. $y = (x - 2)^3 + c(x - 2).$

Az egyenletet átrendezve

$$y' = \frac{1}{x - 2}y + 2(x - 2)^2, \qquad x \neq 2.$$

Innen

$$y_I(x) = e^{\int \frac{dx}{x-2}}(c + 2(x - 2)^2 e^{-\int \frac{dx}{x-2}} dx) =$$

$$= (x - 2)(c + (x - 2)^2).$$

70. $y(x) = c\, e^{-x^2} + 2$

71. $y(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 6x^2 - 4x \ln x + cx), \quad x \neq 0.$

72. $y(x) = c\, e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$

73. $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + c\, x^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$

Az $y' = \frac{3x^2 - 2}{x^3}y$ homogén differenciálegyenlet általános megoldását az

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3x^2 - 2}{x^3} dx$$

egyenletből kapjuk: $\ln|y| = 3 \ln|x| + \frac{1}{x^2} + k.$

így például, ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor

$$y = c\, x^3 e^{\frac{1}{x^2}}, \quad c > 0.$$

A c állandó variálásával az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását

$$y_{I_p}(x) = c(x)x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$$

alakban keressük: Ekkor

$$y'_{I_p}(x) = c'(x)x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + c(x)\left[3x^2\, e^{\frac{1}{x^2}} + x^3 \frac{-2}{x^3}\, e^{\frac{1}{x^2}}\right],$$

és az inhomogén differenciálegyenletből helyettesítés után:

$$c'(x)x^3 e^{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Ebből $c(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$ és $y_{I_p}(x) = \frac{1}{2}x^3$.

Az általános megoldás: $y_I(x) = cx^3\, e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{2}x^3$.

$c \in \mathbb{R}$, ha az $x>0$, $y<0$, ill. a többi esetet is figyelembe vesszük.

74. $2x \ln y = \ln^2 y + 2c. \quad y>0.$

Az egyenletet átrendezve

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y}x = \frac{1}{y}.$$

Innen

$$x_I(y)\; e^{-\int \frac{dy}{y\ln y}} \left(c + \int \frac{1}{y}\, e^{\frac{dy}{y\ln y}}\, dy\right),$$

$$x_I(y) = \frac{1}{\ln y}\left(c + \int \frac{\ln y}{y}\, dy\right),$$

azaz

$$x = \frac{1}{\ln y}\left(c + \frac{1}{2}\ln^2 y\right).$$

75. $y(x) = 2(1 + x^2) + (1 + x^2)(x - 2).$

Az egyenletet átrendezve

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2}y + 1 + x^2.$$

A kezdetiérték feladat megoldása:

94. $y = e^{-\cos x} + \frac{c+\sin x}{x}$

95. a) A Bernoulli-féle differenciálegyenlet:

$$u' + (h + 2p\,y_1)u = -p\,u^2.$$

b) $y(x)' = -\frac{1}{x} + \frac{1}{cx - x\ln x}$; $y_1 = -\frac{1}{x}$.

96. $\frac{du}{dx} + p(x)\,u = q(x)$ a lineáris differenciálegyenlet,

$u = h(y)$; $u' = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx}$.

Például: $y'\cos y + x \sin y = 1$.

6. Egzakt differenciálegyenletek — Integráló tényező

97. $x\,e^y - y^2 = c$.

Most

$g(x,y) = e^y$ és $h(x,y) = x\,e^y - 2y$.

Mivel $\frac{\partial g}{\partial y} \equiv \frac{\partial h}{\partial x}$, létezik olyan $F(x,y)$ valós kétváltozós függvény, amelyre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\,e^y - 2y.$$

Vonalintegrálással,

$$F(x,y) = \int_0^x g(x,0)\,dx + \int_0^y h(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^x dx + \int_0^y x\,e^y - 2y = x + x\,e^y - x - 2y .$$

Tehát

$F(x,y) = x\,e^y - 2y = c$ a megoldás.

A másik megoldási módszer a 100. feladat megoldásában látható.

98. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = c$

99. $(x - 1)\ln(y^2 + 1) = c$

100. $y = \frac{c}{x^2 + 1}$.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$g(x,y) = 2xy, \quad h(x,y) = 1 + x^2.$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2x = \frac{\partial h}{\partial x}$, tehát a differenciálegyenlet egzakt, azaz: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$ és $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + x^2$.

Ezért

$F(x,y) = \int 2xy\,dx + \varphi(y) = x^2y + \varphi(y)$

alakú. Innen

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + x^2$, amelyből

$\frac{d\varphi}{dy} = 1$, tehát $\varphi(y) = y + k_1$.

Tehát

$F(x,y) = x^2y + y + k_1$

így a megoldásra

$xy + y + k_1 = k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. A $k_2 - k_1 = c$ jelöléssel

$x^2y + y = c$, amelyből $y = \frac{c}{x^2 + 1}$.

(A differenciálegyenlet szeparálható is.)

101. $e^{xy} = c$.

102. $x\,y \sin x + y = c$.

103. $2x + e^{xy} - y^2 = c$.

Írjuk fel a differenciálegyenletet a következő alakban:

$(2 + y\,e^{xy})dx + (x\,e^{xy} - 2y)dy = 0$.

$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{xy} + xy\,e^{xy} = \frac{\partial h}{\partial x}$, tehát a differenciálegyenlet egzakt.

104. $x \sin y - y \cos x = c$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$g(x,y) = \sin y + y \sin x; \quad h(x,y) = x \cos y - \cos x.$

A differenciálegyenlet egzakt, mert

$\frac{\partial g}{\partial y} = \cos y + \sin x = \frac{\partial h}{\partial x}$.

$F(x,y) = \int_{x_o}^{x} g(x,y_o)dx + \int_{y_o}^{y} h(x,y)dy, \quad (x_o,y_o) = (0,0).$

Ezért

$F(x,y) = \int_{0}^{x} 0\,dx + \int_{0}^{y} (x\cos y - \cos x)dy =$

$= x\sin y - y\cos x = c$

105. $\frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{1}{y} = c.$

A $g(x,y) = y^2(x - 3y)$ és $h(x,y) = 1 - 3xy^2$ jelöléssel,

$\frac{\partial g}{\partial x} \neq \frac{\partial h}{\partial y}$, ezért a differenciálegyenlet nem egzakt.

Mivel

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}}{g} = \frac{-3y^2 - 2y(x - 3y) + 3y^2}{y^2(x - 3y)} = -\frac{2}{y},$$

azaz csak az y változótól függ, ezért létezik y-tól függő multiplikátor:

$$\nu(y) = e^{+\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}.$$

A $\nu(y)$-nal beszorzott

$$(x - 3y)dx + (\frac{1}{y^2} - 3x)dy = 0$$

differenciálegyenlet már egzakt és

$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{1}{y} = c$ a megoldás.

106. $x^2 + \frac{2x}{y} = c; \qquad \nu(y) = \frac{2}{y^2}.$

107. $\sin x + e^{-x}\sin y = c; \quad \mu(x) = e^{-x}.$

108. $y = c\,x, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}$ és $u(x,y) = -\frac{1}{xy}$ integráló tényezők. Mindkettő kiolvasható az útmutató d) részéből.

a)-val $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$

109. $y^3 = \frac{c}{x}$, $\nu(y) = y^2$ az integráló tényező.

110. $y^2 = \ln|c\,x|$, $\nu(y) = e^{-y^2}$.

111. $x^2y^2 - \frac{x^3y^3}{3}\,y^3 = c$, $\mu(x,y) = xy$

112. $y = c\,e^{x^2} + \frac{1}{2}$, $\mu(x) = e^{-x^2}$

113. $y = \frac{c}{x}$, $\nu(y) = \frac{1}{y}$.

114. $y = -\frac{1}{x \ln|cx|}$, $\mu(x,y) = -\frac{1}{x^2\,y^2}$.

115. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + y^4 = 1$.

116. $\arcsin(xy) + \ln x = 0$, $\mu(x,y) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2y^2}}$

integráló tényező, amelyet az $x^2y' + xy + \sqrt{1 - x^2y^2} = 0$ differenciálegyenlet tagjaiból sejtettünk meg.
$|xy| \leqslant 1$; $x > 0$.

117. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

118. $F(x,y) = -\int g(x)\,dx + \int \frac{1}{h(y)}\,dy = c$

$-g(x)dx + \frac{1}{h(y)}dy = 0$ formában egzakt differenciálegyenlet.

119. A $\big(g(x)y - f(x)\big)dx + dy = 0$ differenciálegyenletnek

$\mu(x) = e^{\int g(x)\,dx}$ integráló tényezője.

120. a) $\mu(x,y) = \frac{1}{p_2(x)q_1(y)}$ az integráló tényező.

b) α) $-\frac{1}{xy} = \ln(x) - y + c$.

$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$ átalakítása integráló tényező táblázatának felhasználásához. (Lásd 7. sor.)

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = \frac{1}{x}\,dx - 1\,dy.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$-\frac{1}{xy} = \ln x - y + c.$$

β) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = c$.

Az $(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0$
differenciálegyenlet átalakításai:

$$y\,dx + x\,dy + \frac{y^3}{x}(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Az integráltényező kereséséhez használt táblázatból

$$d(xy) + \frac{y^3}{x} y^2\, d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Az $\frac{y^5}{x}\, d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ integráltényezője $\frac{1}{x^2y^2}$.

Differenciálegyenletünk:

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2} + \frac{1}{x^2y^2}\,\frac{y^5}{x}\, d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

A táblázatból az első tag:

$d\left(-\frac{1}{xy}\right)$; számítással a 2. tag: $d\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$.

7. Kezdetiérték feladatok — Közelítő megoldások

121. A lineáris

$$y' = -g(x)y + f(x) \; ; \qquad y(x_o) = y_o$$

k.é.p. $-g(x)y + f(x)$ függvénye folytonos és a differenciálegyenlet jobb oldalának y szerinti parciális deriváltja is folytonos. Ezzel a Lipschitz-féle feltétel és vele együtt a megoldás létezése és egyértelműsége is teljesül.
Teljes megoldás van a folytonossági intervallumon.

122. Igen, mert az $f(x,y)$ és az $f'_y(x,y)$ függvények folytonosak a T tartományon.

123. Nem, mert például az origó tetszőleges K környezetében, van olyan $P_1(0,0)$, $P_2(0,y)$, $y \neq 0$ pontpár, amelyre

$$\left| \frac{\sqrt[3]{y^2}}{y} \right| = \left| \frac{1}{y^{1/3}} \right|$$

Lipschitz-féle hányados tetszőlegesen nagy számnál is nagyobb lehet, ha y elég kicsi.

124. Igen.

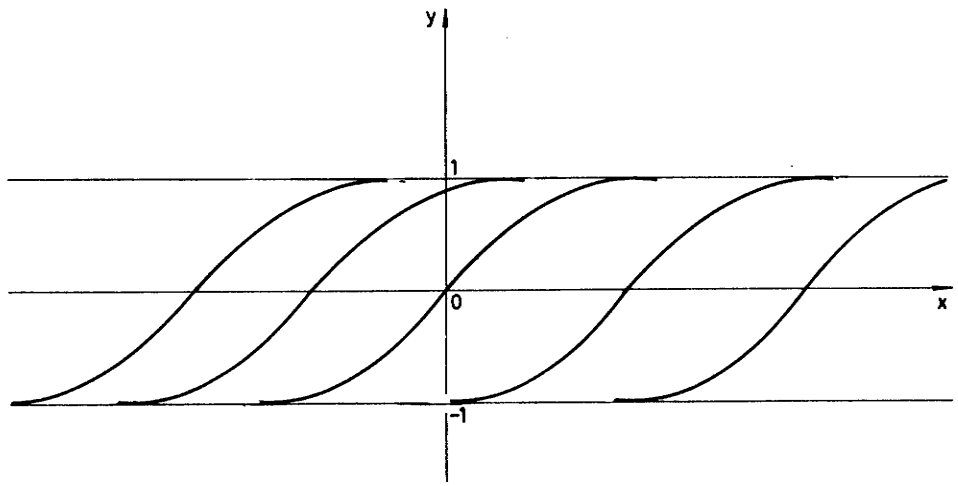
125. Ha $|y_o| < 1$, akkor a 124. példa szerint teljes megoldás van;

$y(x) = \sin (x - x_o + \arcsin y_o)$,

$x_o - \frac{\pi}{2} - \arcsin y_o < x < x_o + \frac{\pi}{2} - \arcsin y_o$.

$y_o \equiv 1$, vagy $y_o \equiv -1$, egyensúlyi helyzetek.

Az egyensúlyi helyzetek nem egyértelműen adottak, mert amint azt az alábbi ábrán is láthatjuk, tetszőlegesen rögzített pontjukhoz található olyan c állandó, hogy a $\varphi(x) = \sin (x + c)$ megoldással folytathatók.



125. feladat ábrája

Megfigyelhetjük, hogy az $(x_o, 1)$, illetve $x_o, -1)$ $x_o \in \mathbb{R}$ pontoknak nincs olyan környezete, amelyben az $f(y) = \sqrt{1 - y^2}$ függvény kielégítené a Lipschitz-féle feltételt.

126. Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor a differenciálegyenlet folytonos együtthatós inhomogén lineáris, tehát minden $0 < x_o < \frac{\pi}{2}$ esetén van teljes megoldása

$y(x) = c \sin x - 2; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ha $x \neq 0$, akkor a $y_1(x) = c \sin x - 2$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

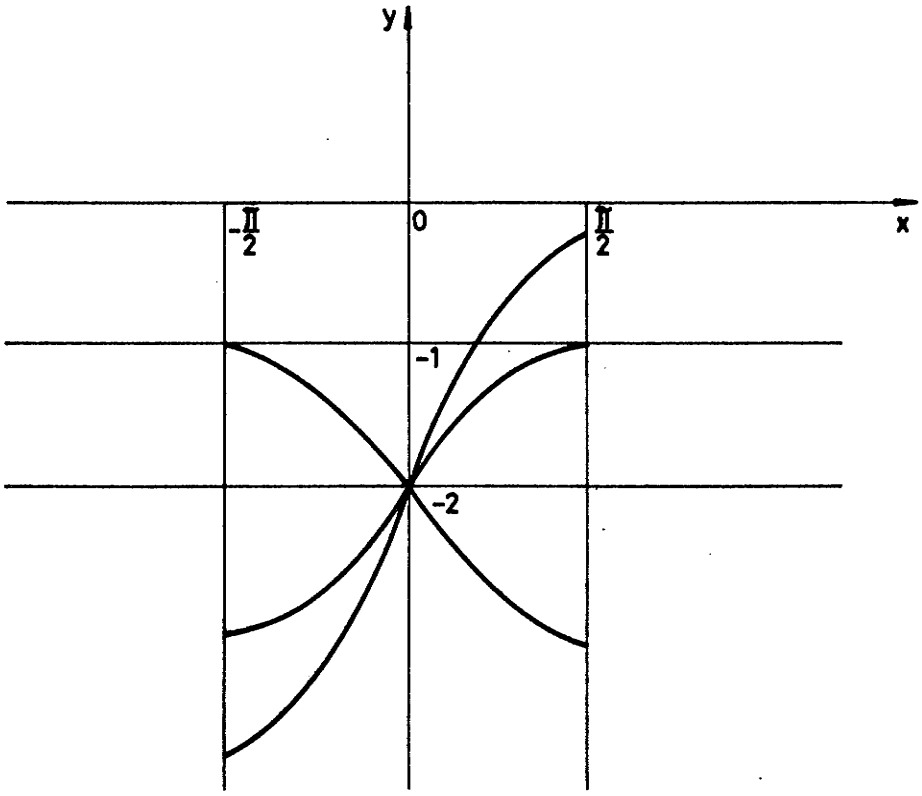
illetve a $y_2(x) = c \sin x - 2$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $c \in \mathbb{R}$, függvények teljes megoldások. Mivel minden megoldásfüggvény $x = 0$ esetén is értelmezett és értéke -2, tehát az

$y' \operatorname{tg} x - y = 2; \quad y(0) = -2,$

kezdetiérték feladatnak végtelen sok megoldása van, azaz az

$y(x) = c \sin x - 2, \quad c \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$

függvények bármelyike megoldás. A $P(0, y_o)$, $y_o \neq -2$ pontokon át nem halad megoldásgörbe.



126. feladat ábrája

(127) a) $y(x) = (x - c)^3$, $c = -x_o + y_o^{\frac{1}{3}}$, ha $y_o \neq 0$.

b) $y(x) \equiv 0$ egyensúlyi helyzet, megoldás, ha $y_o = 0$.
Az $(x, 0)$ pontokon át még lokálisan egyértelmű megoldás sem halad.

128. $y(x) = (\frac{x}{2} + 1)^2$, $x > -2$. Lokálisan egyértelmű megoldás.

$$\int_1^y \frac{1}{u}\,du = \int_0^x dt$$

$$2\sqrt{y} - 2 = x$$

$$\sqrt{y} = 1 + \frac{x}{2} > 0; \quad x > -2.$$

129. $y(x) = x^2$

130. Igen, az $y(x) \equiv 0$ egyensúlyi helyzet. A differenciálegyenlet szétválasztható változójú és az összes többi megoldás

$$y(x) = \pm e^{ce^x}, \quad c > 0, \quad \text{alakú.}$$

131. A differenciálegyenlet szétválasztható változójú és teljes megoldása

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

A Picard-féle módszer illusztrálása miatt szukcesszív approximációval is megoldjuk a feladatot.
Az $f(x,y) = xy$ és az $f'_y(x,y) = x$ folytonos függvények az $\mathbb{R}^2$ tartományon, tehát a Cauchy–Lipschitz-féle egzisztencia- és unicitástétel szerint minden kezdetiérték esetén létezik teljes megoldás. Jelenleg $(x_o, y_o) = (0,1)$, tehát a közelítő függvények a következők:

$$\varphi_o(x) = 1,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x t(1 + \frac{t^2}{2})\,dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6},$$

Teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}(\frac{x^2}{2})^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{\frac{x^2}{2}} = y(x) \qquad n = 0,1,\ldots$$

132. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln x)^k}{k!} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad x>0.$

133. $y(x) \sim \varphi_2(x) = 1 + x + x^2 + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}$

Az egzisztencia és unicitás teljesül, mert

$f(x,y) = x^2 + y^2$ és $f'_y(x,y) = 2y$

folytonos függvények.

$\varphi_o(x) = 1$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x f(x, \varphi_o(x))\,dx = 1 + \int_0^x (x^2 + 1)\,dx =$$

$$= 1 + x + \frac{x^3}{3}.$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x x^2 + \left(1 + x + \frac{x^3}{3}\right)^2 dx$$

$\varphi_{n-1}(x)$ nem részletösszege $\varphi_n(x)$-nek.

134. $y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots$

135. $y(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{351}x^{13/2} + \frac{1}{729}x^9, \ldots$

136. $y(x) = \frac{\pi}{2} - 1.$

137. $y(x) \quad 1 + x + \frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{3} \ldots$

Keressük a megoldást

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k; \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k\, x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{\ell+1}(\ell + 1)x^{\ell}$$

alakban, $-\infty < x < \infty$.

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i ;$$

$a_i = \frac{1}{i!}$, ha i páros,

$a_i = 0$, ha i páratlan.

A hatványsorokat a differenciálegyenletbe helyettesítve, Cauchy-féle szorzást végzünk, majd együttható összehasonlítást a következő azonosságból:

$$c_{l+1}(l+1)x^l \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{l} a_k c_{l-k} \right) x^l$$

$c_1 = a_o c_o$

$2c_2 = a_o c_1 + a_1 c_o$

$3c_3 = a_o c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_o$,

.
.
.

A $c_o = 1$ kezdeti feltételből következik, hogy

$c_1 = a_o c_o = 1$

$c_2 = \frac{1}{2} a_o c_1 = \frac{1}{2}$

$c_3 = \frac{1}{3}(a_o c_2 + a_2 c_o) = \frac{1}{3}$,

.
.
.

(138) $y(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^5}{20}$.

$y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x-1)^k$; $y'(x) = (x-1) + (y-1)^2$

átalakítással kezeljük a differenciálegyenletet.

(139) A II. Tétel jelöléseit használjuk.

$$f(x,y) = \frac{y}{10(1-x)} + \frac{x^2}{10} .$$

$a = b = 0$. Legyen $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

$$M = \frac{\frac{1}{2}}{10 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{4 \cdot 10} = \frac{1}{8} \quad \text{és} \quad \varrho = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}}}\right) < 0{,}5$$

A kezdetiérték feladat átrendezése után együttható összehasonlítást végzünk. A

$$10(1 - x)y' = y + x^2 - x^3$$

differenciálegyenletbe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k x^{k-1}$$

behelyettesítésével a

$$10 \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1} - 10 \sum_{k=1}^{\infty} c_k k\, x^k =$$

$$= x - x^3 + c_o + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, x^k$$

azonosságból felírhatjuk, hogy

$$10\, c_1 = c_o$$

$$10\, c_2\, 2 - 10\, c_1 = c_1$$

$$10\, c_3\, 3 - 10\, c_2 2 = 1 + c_2$$

$$10\, c_4\, 4 - 10\, c_3 3 = -1 + c_3$$

$$10\, c_{n+1}(n + 1) - 10\, c_n\, n = c_n, \qquad n \geq 3.$$

Ebből a következő rekurzív formulát kapjuk:

$$c_{n+1} = \frac{10\, n + 1}{10(n + 1)}\, c_n\,,$$

amellyel $y(x)$ közelíthető az $|x| < 0{,}5$ intervallumon.

140. $y(x) = 1 + 2(x - 1) + \frac{1}{2!}(x - 1)^2; \qquad (0 < x < 2).$

(141) $y(x) = c\,e^x - x^2 - 2x - 2. \quad c = (2 + y_o).$

Az

$y(x) = c_o + c_1x + \ldots + c_n x^n + \ldots$

függvényt behelyettesítve

$y' - x^2 - y = (c_1 - c_o) + (2c_2 - c_1)x +$

$+ (3\,c_3 - c_2 - 1)x^2 + \ldots$

$(n\,c_n - c_{n-1})x^{n-1} + \ldots \quad = 0.$

Innen

$c_n = \frac{1}{n}\,c_{n-1}, \quad$ ha $\quad n \geq 4, \quad$ illetve

$c_n = \frac{1}{n!}(2 + y_o) \qquad n \geq 3. \qquad (-\infty < x < +\infty).$

(142) $y(x) = c_o + c_1x + \ldots + c_nx^n + \ldots$

behelyettesítése után

$c_n = \frac{n - 2}{n}\,c_{n-1} \qquad n \geq 2, \quad$ illetve

$c_n = \frac{2}{n(n - 1)}\,.$ így

$$y(x) = y_o(1 - x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n - 1)}\,x^n.$$

Hányadoskritériummal bizonyítható, hogy $|x| < 1$ a konvergenciatartomány.

8. Különböző típusú elsőrendű differenciálegyenletek

(143) $y(x) = x\,\mathrm{tg}(c - \ln x). \qquad x > 0\,.$

A differenciálegyenlet homogén 2. -fokú.

$u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel, az

$\int \frac{du}{1 + u^2} = -\int \frac{dx}{x} + c,$ integrálegyenletből

$u = \mathrm{tg}(c - \ln x).$

(144) $y(x) = \pm\sqrt{cx^2e^{x^2} - 1}$; $\qquad x^2e^{x^2} > \frac{1}{c}$; $c > 0$

egyenlet által adott (értelmezési tartománnyal).
A differenciálegyenlet szeparálható.

145. $cy^3 - y^2 + x^2 = 0$

146. $2\ln(\mathrm{tg}(y - x) - 1) - \ln(\mathrm{tg}^2(y - x) + 1) - 2y = c.$

(147) $y(x) = -\frac{1}{2}\ln(ce^{-2x} - \frac{2}{3}e^x)$. $c > 0$, $x < \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}c$.

Próbáljuk az $u = e^{-2y}$ helyettesítést!

148. $y(x) = ce^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$

149. $y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}$

A differenciálegyenlet lineáris és $y' = f(\frac{y}{x})$ típusú is.

(150) $xy + \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| = c$

A differenciálegyenlet integráló tényezője

$u(x) = \frac{1}{x}$.

151. $y(x) = (x^2 - 1) + c\,e^{-x^2}$.

(152) $y(x) = 1/[-(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + c(x^2 + 1) - 1]^{\frac{1}{2}}$.

Az $(1 + x^2)$ függvénnyel való osztás után a differenciálegyenlet Bernoulli típusú. $n = 3$ és így
$z = y^{-2}$ helyettesítéssel

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2x}{1 + x^2}z = -\frac{2x^3}{1 + x^2}.$$

Innen

$$y^{-2} = z = -(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + c(x^2 + 1) - 1.$$

(153) $-\frac{1}{xy} = \ln x - y + c$

Az integráló tényező $\mu(x,y) = \frac{1}{(xy)^2}$.

154. $x^4 + 2x^2y^2 = 3.$

155. $y(x) = 1 + 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 + \frac{10}{3!}(x - 1)^3 +$
$+ \frac{38}{4!}(x - 1)^4 + \ldots,$
aminek véges részletösszegével közelíthetjük a megoldást.
$1 < x < 2.$

156. $x = e^{1-\frac{x}{y}}$.

157. a) $2\,\mathrm{tg}(\frac{5}{2}x + y) + 1 = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6})$.

b) $y(x) = \frac{\pi}{12} - \frac{5}{2}x$.

158. $y - \ln(x + y + 2) = -\ln 2$.

159. $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = 0$.

(160) (i) $(x_o, y_o) = (-2, 1)$, illetve $(-2, -1)$ pontmegoldások.

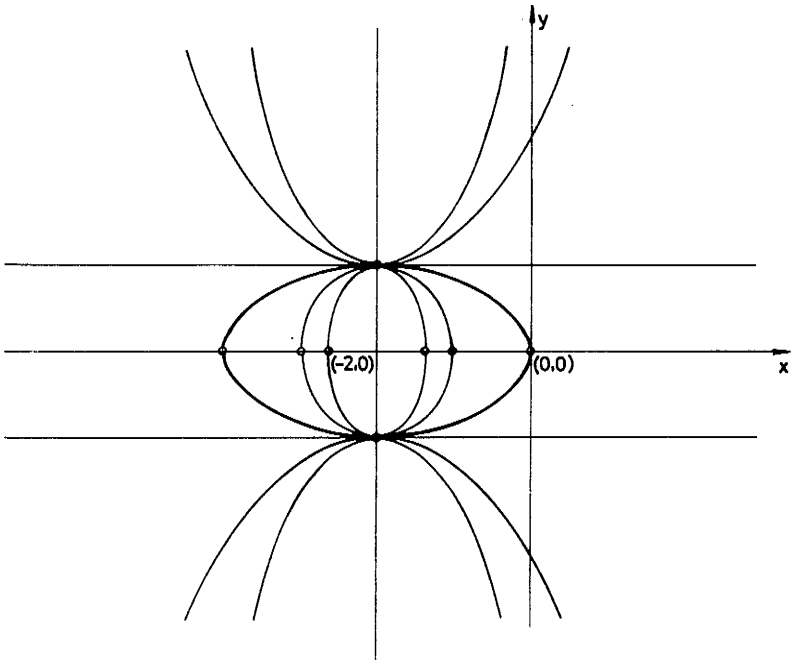
(ii) Az $y'(2y + xy) = (y^2 - 1)$ differenciálegyenletnek $y(x) \equiv \pm 1$ megoldásai egyensúlyi helyzetek. A $\frac{dx}{dy}(y^2 - 1) = y(2 + x)$ differenciálegyenletnek $x(y) \equiv -2$ egyensúlyi helyzete.

(iii) Ha $|y_o| > 1$ és $x_o \neq -2$, akkor az $y' = \frac{y^2 - 1}{y(2 + x)}$ differenciálegyenletből az $\sqrt{y^2 - 1} = c(2 + x)$ hiperboladarabok a megoldásgörbék.
Ha $|y_o| < 1$ és $y_o \neq 0$, akkor az $\sqrt{1 - y^2} = (2 + x)$ ellipszisdarabok a megoldásgörbék. Lásd a 160. ábrát, ahonnan a geometriai értelemben vett megoldásgörbék is láthatók.

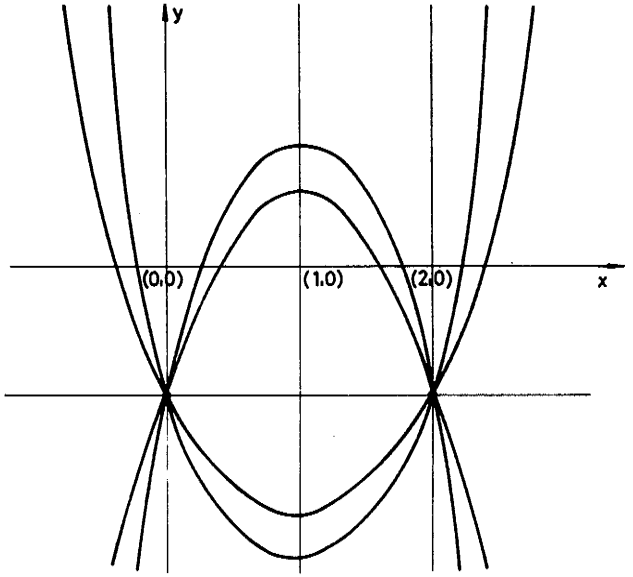
(161) (i) A $2(x - 1)(y + 1)dx + x(2 - x)dy = 0$ differenciálegyenletnek $(x_o, y_o) = (0, -1)$, illetve $(2, -1)$ pontmegoldásai.

(ii) Az $y'(x(2 - x) = 2(1 - x)(y + 1)$ differenciálegyenletnek $y(x) \equiv -1$ egyensúlyi helyzete.
A $\frac{dx}{dy}\ 2(x - 1)(y + 1) = x(x - 2)$ differenciálegyenletnek $x(y) \equiv 0$; illetve $x(y) \equiv -2$ az egyensúlyi helyzeteik.

(iii) Ha $x_o \neq 0$ és $x_o \neq -2$ és $y_o \neq -1$, akkor $y' = \frac{2(1 - x)(y + 1)}{x(2 - x)}$ differenciálegyenlet egyértelműen megoldható és a geometria értelemben adott megoldásgörbék a 161. ábrán láthatók.



A 160. feladat ábrája



A 161. feladat ábrája

9. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazása — Ortogonális trajektóriák

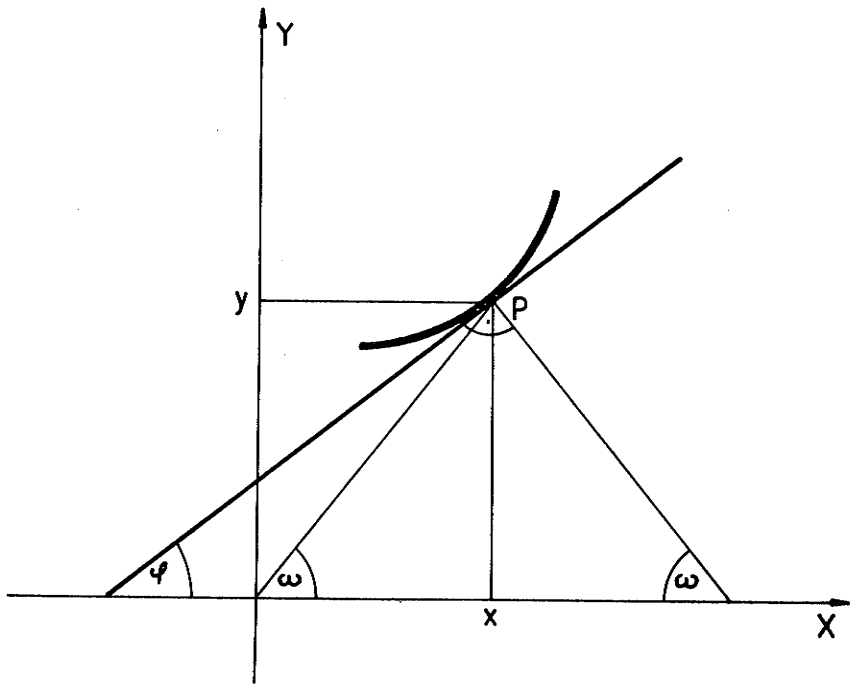
162. $y' = \frac{y - 2x\,y^2}{x}$; $x - x^2y = cy$

163. $y' = \frac{y}{2x}$; $y(3) = 1$; $y(x) = 3\sqrt{x}$ a megoldás.

164. $x^2 + y^2 = c$. $c > 0$.

165. $y^2 - x^2 = c$.

A 165. ábrán látható, hogy $\overline{PO} = \overline{PN}$ és $\overline{PT}$ $\overline{PN}$.
$y' = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\omega = \frac{x}{y}$ a görbesereg differenciálegyenlete.



A 165. feladat ábrája

166. $y^3 = cx$.

$3(\text{mes } OAP) = \text{mes } OPB$,

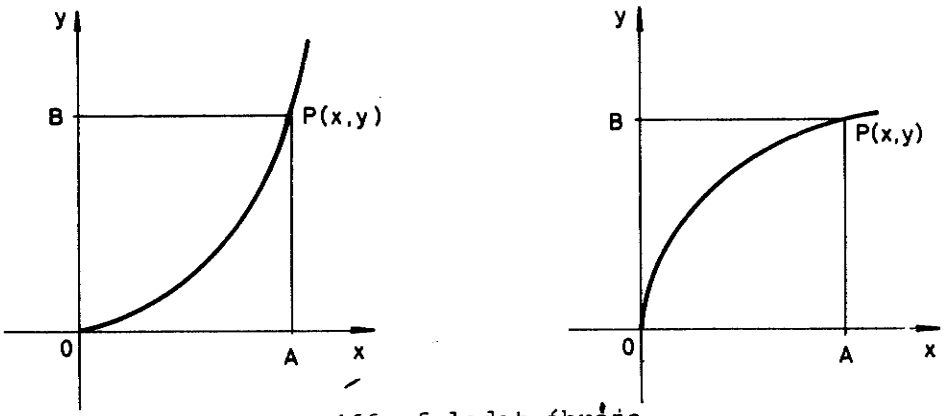
azaz

$$3\int_0^x y\,dx \equiv x\,y - \int_0^x y\,dx; \qquad 4\int_0^x y\,dx \equiv xy.$$

Differenciálunk x szerint:

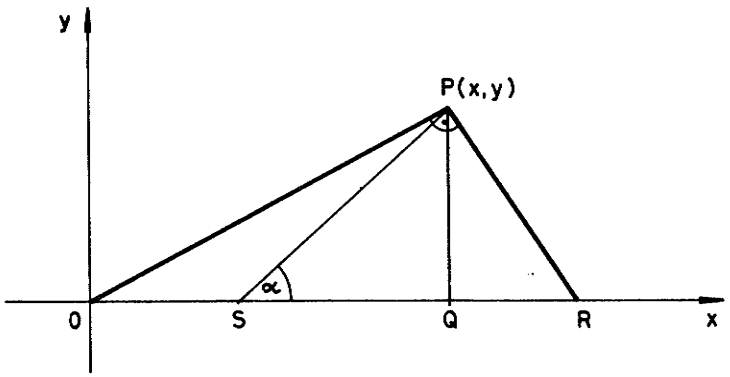
$$4y = y + xy'.$$

A kapott differenciálegyenlet szeparálható és megoldása $y^3 = cx$, illetve $cy = x^3$.



A 166. feladat ábrája.

167. $x = y\sqrt{\ln\left(\frac{c}{y}\right)^2}$.



A 167. feladat ábrája.

168. $2cy = c^2 - x^2$; $xy = c$, $x^2 + y^2 - cx = 0$.

169. $y^2 = -2x^2 \ln cx$

(170) $y^2 - x^2 = c$, a merőlegesen metsző hiperbolasereg. Az $xy = c$ differenciálegyenlete $xy' + y = 0$. Az ortogonális trajektóriasereg differenciálegyenlete:

$$-x\frac{1}{y'} + y = 0.$$

(171) $x^2 + y^2 - 2ky = 0$

Az $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ azonosságot differenciálva

$$2x + 2y \cdot y' - 2c = 0.$$

$c = \frac{x^2 + y^2}{2x}$, $x \neq 0$ behelyettesítésével

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}, \qquad y \neq 0$$

A differenciálegyenlet 0-ad fokú homogén, az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel:

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2} + 1} = cx$$

adódik és rendezéssel a fenti megoldás.

172. x szerint differenciálva az $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c-\lambda} \equiv 1$ azonosságot

$$2\frac{x}{c} + 2\frac{y \cdot y'}{c - \lambda} = 0. \quad c = \frac{\lambda x}{x + y y'}, \text{ így}$$

$$(x + y y')(y'x - y) - \lambda y' = 0$$

a görbesereg differenciálegyenlete. Ha y' helyébe $-\frac{1}{y'}$-t tesszük, ugyanezt a differenciálegyenletet kapjuk.

(173) $r = c(1 - \cos \varphi)$.

Legyen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ és r a φ szerinti derivált, ekkor

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\frac{\dot{r}}{r}\sin\varphi + \cos\varphi}{\frac{\dot{r}}{r}\cos\varphi - \sin\varphi}$$

ezért az ortogonális trajektóriasereg differenciálegyenletét,

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi} = \frac{-\frac{r}{\dot{r}}\sin\varphi + \cos\varphi}{-\frac{r}{\dot{r}}\cos\varphi - \sin\varphi},$$

így kapjuk, hogy $\frac{\dot{r}}{r}$ helyére annak negatív reciprokát írjuk.
A görbesereg differenciálegyenlete:

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},$$

a trajektóriaseregé:

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Innen

$$\ln r = \int \frac{1+\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\,d\varphi = \int \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 2\ln\left(\sin\tfrac{\varphi}{2}\right) + \ln c$$

$$r = c\sin^2\tfrac{\varphi}{2} = C(1-\cos\varphi); \quad C = \tfrac{c}{2}$$

174. $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k.$

175. $y^2 = -2x + k.$

176. $x + 2 = ce^{x+\frac{1}{2}y^2}.$

177. $x^2 + y^2 - 8\ln|x| = c.$

178. $y = c(x-a) + b.$

179. $xy = c(x^2+y^2)^2.$

180. $r^2 = ke^{-2\varphi}$ m $\qquad k>0$.

A körsereg differenciálegyenlete: $x + yy' = 0.$
A 45°-os trajektóriaseregét ebből úgy nyerjük, hogy

$\frac{y' - \operatorname{tg} 45^\circ}{1+y'\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{y'-1}{1+y'}$-t helyettesítjük y' helyébe.

így

$x + y\,\frac{y' - 1}{y' + 1} = 0$

a trajektóriák egyenlete. $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel:

$(u^2 + 1)dx + x(u + 1)du = 0,$

$\frac{dx}{x} + \frac{u + 1}{u^2 + 1}\,du = 0.$

Innen

$\ln x + \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + \operatorname{arctg} u = \ln k,$

$\ln x^2(1 + u^2) = \ln k - 2 \operatorname{arctg} u,$ azaz

$x^2 + y^2 = ke^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$ írjuk át polárkoordinátás alakba!

(181) $t = 71{,}314$ s.

$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - 25);$ $\quad T(0) = 100,$ $\quad T(20) = 60,$ $\quad T(t) = 30.$

A $\ln(T - 25) - \ln 75 = -\lambda t$ megoldásból a két utóbbi feltételt felhasználva $\lambda = 0{,}038$, $t = 71.314$ s.

(182) $t = 39.6$; $\quad T = 70{,}5\ ^{\circ}C.$

$\frac{dT}{dt} + kT = 0,$ ill. $T = ce^{-kt}.$ Ha $T = 100$, akkor $t = 0$, így $c = 100$. Ha $t = 20$, akkor $T = 50$, tehát $k = \frac{-1}{20}\ln\frac{50}{100} = 0.035.$ A $T(t) = 25$, azaz a

$25 = 100\,e^{-0.035\,t}$

egyenletből $t = 39{,}6$ min., $T(10) = 70.5\ ^{\circ}C.$

183. $t = 15{,}4$ min; $\quad T = 79{,}5\ ^{\circ}C.$

184. $T = -30\ ^{\circ}C.$

(185) $N(t) = m_o e^{-\frac{\ln 2}{1600}(t - t_o)},$

$\frac{dN}{dt} = -\lambda N;$ $\quad N = m_o e^{-\lambda(t - t_o)}$ és ha például 1600 év múlva $\frac{m_o}{2}$ tömegünk van, akkor $\lambda = \frac{\ln 2}{1600}$, mert $t_o = 0.$

186. $N_o \sim 7062.$

187. $N(t) = 694\,e^{0{,}366\,t};$ $\quad N_o \sim 694.$

188. 79 év.

$$\int_{N_o}^{2N_o} \frac{dN}{N} = k \int_0^{50} dt; \qquad 50\,k = \ln 2$$

$$\int_{N_o}^{3N_o} \frac{dN}{N} = k \int_0^{t} dt \qquad t = \frac{\ln 3}{k} = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \sim 79$$

189. $N(t) = 50\, e^{-0{,}053\, t}$; $t = 13$ óra.

190. $y = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, $k > 0$ az arányossági tényező.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2; \qquad v(0) = 0.$$

Innen

$$\int_0^v \frac{m\, dv}{mg - kv^2} = \int_0^t dt,$$

azaz

$$\frac{1}{g}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ \operatorname{arth}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ v = t.$$

Tehát

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\ \operatorname{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\ t$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\ .$$

191. $v(t) = -118\, e^{-\frac{t}{4}} + 128$; $x(t) = 472\, e^{-\frac{t}{4}} + 128\, t - 472$.

192. $m\nu^2 = 2mg\, x - kx^2 + m\nu_o^2$.

A rugóerő arányos a megnyúlással. (Hooke törvénye.) Így

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kx; \qquad \frac{dx}{dt} = \nu\ ; \qquad \nu(0) = \nu_o\ .$$

Ezért

$$m \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\nu \frac{dv}{dx} = mg - kx.$$

$$m\nu^2 = 2\, mg\, x - kx^2 + c.$$

193. $v(2) = 20\, e^{-180 \ln \frac{8}{20}}$.

194. 2.08 kg

A t.percben a tartályban levő sómennyiség y a $100 + t$ liter vízben. 2 l vízzel eltávozott sómennyiség

$$2 \frac{y}{100 + t} .$$

Ezért

$$\frac{dy}{dt} = - 2 \frac{y}{100 + t} ; \qquad y(0) = 7,5$$

195. $y(t) = - 99 e^{-0,03 t} + 100;$

$t = 0.338$ s.

196. $t = 20$ s.

$y(20) = 48$ kg.

A t időpillanatbeli köbtartalom: $V = 10 + 2 t$.

t értéke, ha $V = 50$, 20 s.

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{2}{10 + 2 t} y + 4, \quad \text{ahonnan} \quad y(t) = \frac{40t + 4t^2 + c}{10 + 2t}$$

$y(20) = 48.$

197. $i(t) = ce^{-50t} + \frac{1}{10} .$

198. $t = \frac{30}{150} \ln 100 \sim 0.92$ (s)

Az $L \frac{di}{dt} + Ri = u$ differenciálegyenlet megoldása után

$$t = - \frac{L}{R} \ln(U - Ri) + c.$$

Az $i(0) = 0$ kezdeti feltételből $c = \frac{L}{R} \ln U.$

Tehát a folyamatra vonatkozó szabályt a

$$t = \frac{L}{R} \ln \frac{U}{U - Ri}$$

fejezi ki. Mivel i maximuma $i = \frac{U}{R}$, és a feladat feltétele szerint $i = 0.99 \frac{U}{R}$, ezért a keresett idő:

$$t = \frac{L}{R} \ln 100 = \frac{30}{150} \ln 100.$$

199. $i(t) = \frac{a}{k^2L^2 + R^2}(kL e^{-\frac{R}{L} t} + R \sin kt - kL \cos kt)$

$k = \frac{2\pi}{T} .$

A homogén differenciálegyenlet megoldása:

$$i_H(t) = ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az inhomogén partikuláris megoldását

$i_{I_p}(t) = A \sin kt + B \cos kt$, $k = \frac{2\pi}{T}$, alakban kereshetjük. Behelyettesítés után

$$A = \frac{aR}{k^2L^2 + R^2}; \qquad B = -\frac{akL}{k^2L^2 + R^2}.$$

Az $i(0) = 0$ kezdeti feltételből $c = \frac{akL}{k^2L^2 + R^2}$.

200. $i(t) = \frac{609}{101} e^{-20t} + \frac{30}{101} \sin 2t - \frac{3}{101} \cos 2t.$

201. $q = cU(1 - e^{-\frac{t}{cR}})$.

A t időpillanatban a kondenzátor töltése q, az áramerősség $i = \frac{dq}{dt}$.

$V = U - \frac{q}{c}$. Ohm törvénye szerint $i = \frac{V}{R}$, azaz

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{c}}{R}, \qquad q(0) = 0$$

ahonnan

$$q = cU - c_1 e^{-\frac{t}{cR}}, \quad c_1 = cU.$$

MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

10. Hiányos differenciálegyenletek

202. $y(x) = 2x - 2\ln(1 - c_1 e^{2x}) + c_2$

A $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$ egyenletből $y' = u$ helyettesítéssel a

$2u' - u^2 + 4 = 0$

egyenlet adódik. Innen

$$\int \frac{2}{u^2 - 4}\, du = \int dx ,$$

azaz

$$u = y' = \frac{2(1 + c_1 e^{2x})}{1 - c_1 e^{2x}} = 2\left(1 + \frac{2c_1 e^{2x}}{1 - c_1 e^{2x}}\right)$$

Ezért

$y(x) = 2x - 2\ln(1 - c_1 e^{2x}) + c_2.$

203. $y(x) = \arcsin(c_2 e^x) + c_1.$

Az $y'' = (y')^3 + y'$

egyenletből

$y'(x) = u(y(x))$ helyettesítéssel

$\frac{du}{dy} u = u^3 + u; \qquad u \neq 0,$

$\operatorname{arctg} u = y + k_1,$

azaz

$u = y' = \operatorname{tg}(y + k_1).$

Szeparálással és integrálással,

$\ln \sin (y + k_1) = x + k_2$

$\sin(y + k_1) = c_2 e^x$

$y = \arcsin(c_2 e^x) + c_1$

204. $y^2 = c_1 \operatorname{sh}(2x + c_2)$.

Az

$yy'' + (y')^2 = y^2$

egyenletből, $y' = u(y)$ helyettesítéssel az

$yu \frac{du}{dy} + u^2 = y^2$

egyenlet adódik.
Az y integráló tényezővel szorozva,

$u y^2 du + u^2 y dy = y^3 dy$;

ennek megoldása:

$2u^2y^2 = y^4 + k^2$.

Innen

$\sqrt{2}u = \sqrt{2}y' = \pm \frac{\sqrt{y^4 + k^2}}{y}$,

$\sqrt{2} \operatorname{arsh} \frac{y^2}{k} = \pm 2x + C\sqrt{2}$.

Így

$\frac{y^2}{k} = \operatorname{sh}(\pm\sqrt{2}x + c)$,

azaz

$y^2 = c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{2}x + c_2)$.

205. $\sqrt{e^{2y} - 1} = \pm \operatorname{tg} x$.

Az $y'' = e^{2y}$; $y'' = u \frac{du}{dy}$, (ahol $u = y'$),

egyenletből

$2u\, du = 2\, e^{2y} dy$. Innen

$u^2 = e^{2y} + k$

a kezdeti feltételekkel

$0 = 1 + k$ és $k = -1$

$u = y' = \pm \sqrt{e^{2y} - 1}$,

amely az $e^{2y} = z$ helyettesítéssel

$$\frac{dz}{2z\sqrt{z-1}} = \pm\, dx$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{z-1} = \pm\, x + c$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2y}-1} = \pm\, x, \qquad c = 0$$

azaz

$$\sqrt{e^{2y}-1} = \pm\, \operatorname{tg} x.$$

Ha nem a kezdeti feltételeknek megfelelő megoldást keressük, vagyis, ha például a k integrációs konstans pozitív; $k = A^2$, akkor a megoldás más függvényekből áll, ugyanis a

$$\frac{dz}{2z\sqrt{z+A^2}} = \pm\, dx$$

integrálegyenletből

$$\frac{1}{2A} \ln \frac{\sqrt{z+A^2}-A}{\sqrt{z+A^2}+A} = \pm\, x + c$$

206.

$$y = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-c_1^2}} \operatorname{arth}\left(\sqrt{\dfrac{1+c_1}{1-c_1}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + c_2, & \text{ha } |c_1|<1 \text{ és} \\ \qquad |x| < 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-c_1}{1+c_1}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{1-c_1^2}} \operatorname{arcth}\left(\sqrt{\dfrac{1+c_1}{1-c_1}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + c_2, & \text{ha } |c_1|<1 \text{ és} \\ \qquad |x| > 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-c_1}{1+c_2}}\,; \\ \dfrac{2}{\sqrt{c_1^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{c_1+1}{c_1-1}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + c_2; & \text{ha } |c_1|>1 \\ \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + c_2; & \text{ha } c_1 = 1. \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + c_2; & \text{ha } c_1 = -1. \end{cases}$$

Ebben a példában legyen

$y' = p(x)$ és $y'' = p'(x)$.

$$\int \frac{dp}{dx} = p^2 \int \sin x$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int \sin x \, dx$$

$$-\frac{1}{p} = -\cos x + c_1$$

$$-p = y' = \frac{1}{c_1 - \cos x}$$

$$y = \int \frac{dy}{-c_1 + \cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{-c_1 + \frac{1+t^2}{1+t^2}}$$

$$y = 2\int \frac{dt}{1 - c_1 - (1 + c_1)\,t^2} = \frac{2}{1 - c_1} \int \frac{dt}{1 - \left(\sqrt{\frac{1 + c_1}{1 - c_1}}\, t\right)^2}$$

Ha $|c_1| < 1$, akkor

$$y = \frac{2}{\sqrt{1 - c_1^2}} \operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{1 - c_1}{1 - c_1}}\, \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + c_2$$

illetve:

$$y = \frac{2}{\sqrt{1 - c_1^2}} \operatorname{arcth}\left(\sqrt{\frac{1 + c_1}{1 - c_1}}\, \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + c_2$$

aszerint, hogy

$\sqrt{\frac{1 + c_1}{1 - c_1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1$, ill. > 1;

azaz

$$|x| < 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 + c_1}{1 - c_1}}$$

vagy

$$|x| > 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 + c_1}{1 - c_1}}.$$

Ha $|c_1| > 1$, akkor az integrál:

$$y = 2\int \frac{dt}{-c_1 + 1 - (c_1 + 1)t^2} = \frac{2}{-c_1 + 1}\int \frac{dt}{1 + \left(\sqrt{\frac{c_1 + 1}{c_1 - 1}}t\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c_1^2 - 1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{c_1 + 1}{c_1 - 1}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c_2.$$

Ha $c_1 = 1$, akkor

$$y = 2\int \frac{dt}{-2t^2} = \frac{1}{t} + c_2 = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + c_2$$

és ha $c_1 = -1$, akkor

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_2 .$$

207. $y^2 = 2x^2 + c_1 x + c_2$.

208. $y(x) = \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \ln(1 + c_1 x) - \frac{x}{c_1} + c_2$.

209. $y(x) = c_1 x^2 + c_2 + (x + 1)\ln x$.

210. $y(x) = c_1 + c_2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x}$.

211. $y(x) = \frac{1}{c_1}\operatorname{tg}(c_1 x + c_2)$.

212. $y(x) = \ln(\cos(x - c_1)) + c_2$.

213. $y = k \operatorname{ch}\left(\frac{x + c_1}{k}\right) + c_2$, láncgörbe, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(A differenciálegyenlet hiányos másodrendű.)

A $ky'' = \sqrt{1 + y'^2}$ differenciálegyenletből hiányzik a függő változó. Az $y' = p$ és az $y'' = p'$ helyettesítéssel

$$kp' = \sqrt{1 + p^2}.$$

Innen

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{k}\int dx$$

és

$$p = \operatorname{sh} \frac{x + c}{k}$$

Visszatérve az eredeti változóra adódik a keresett megoldás.

11. Lineáris differenciálegyenletek osztályozása — Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek

214. Másodrendű, implicit, lineáris, inhomogén.

215. Harmadrendű, nem lineáris az yy''' tag miatt.

216. Másodrendű, explicit, homogén, lineáris, állandó együtthatós.

217. Negyedrendű, explicit, lineáris, inhomogén.

218. Másodrendű, nem lineáris az $(y')^2$ tag miatt.

219. Negyedrendű, nem lineáris.

220. $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ az általános megoldás.

221. $y(x) = c_1 + c_2 e^{7x}$ az általános megoldás.

222. $y(x) = c_1 \operatorname{ch}\sqrt{5}x + c_2 \operatorname{sh} \sqrt{5}x$.

223. $y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x$ az általános megoldás.

A $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei:

$\lambda_1 = -2 + i, \qquad \lambda_2 = -2 - i.$

A komplex

$e^{(-2+i)x}, \qquad e^{(-2-i)x},$

függvények valós és képzetes része is megoldás.

224. $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

225. $y(x) = c_1 e^{\frac{3+\sqrt{29}}{2} x} + c_2 e^{\frac{3-\sqrt{29}}{2} x} =$

$$= e^{\frac{3}{2}x}\left[k_1 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{29}}{2}x + k_2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{29}}{2}x\right].$$

226. $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$.

227. $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{4x} \cos \sqrt{2}x + c_3e^{4x} \sin \sqrt{2}x$.

228. $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2^{-2x} + c_3x^2 e^{-2x} + c_4x^3 e^{-2x}$.

229. $y(x) = c_1e^{2x} \cos 2x + c_2e^{2x} \sin 2x + c_3e^{-2x} +$

$+ c_4x e^{-2x} + c_5e^{x} + c_6e^{-x}$.

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$\lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -2$,

$\lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = -1$.

(230) a) Mivel a függvények megoldásai az explicit folytonos együtthatós $y'' + 4y = 0$ differenciálegyenletnek, és

$$W[\sin 2x, \cos 2x] = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

ezért lineárisan függetlenek.

b) Ha a függvényekről nem tudjuk, hogy folytonos együtthatós explicit homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai, akkor a lineáris függetlenség

$$c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

definíciójával, illetve indirekt bizonyítással, a függőség feltételezésével bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $c_2 \neq 0$, ekkor

$$\cos 2x = -\frac{c_1}{c_2} \sin 2x,$$

ellentmondásra jutunk bármely intervallumon. Hasonlóan bizonyíthatunk a $c_1 \neq 0$ feltételezéssel.

(231) Nem. A függvények lintárisan függetlenek, mert a

$$c_1x^3 + c_2|x^3| = 0$$

egyenlet $x \geqslant 0$ esetén

$$c_1 x^3 + c_2 x^3 = 0$$

és $x < 0$ esetén

$$c_1 x^3 - c_2 x^3 = 0,$$

és együtt csak akkor igaz, ha $c_1 = c_2 = 0$.
(Az $y'' - \frac{2}{x} y' = 0$ differenciálegyenlet nem folytonos együtthatós.)

232. $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x.$

Az
$y'' - 2y' = e^x \sin x$

egyenlet

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 2.$$

Ezért a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H(x) = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását két módszerrel is keressük:

I. Az állandók variálásával:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \sin x \end{bmatrix},$$

innen

$$c_2' = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x, \quad \text{és így} \quad c_2 = -\frac{1}{4} e^{-x}(\sin x + \cos x),$$

illetve

$$c_1' = c_2' e^{2x} = 0, \quad \text{és így} \quad c_1 = -\frac{1}{4} e^x (\sin x - \cos x).$$

Tehát

$$y_{I_p}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} = -\frac{1}{2} e^x \sin x.$$

II. A próbafüggvénnyel:

Legyen

$$y_{I_p}(x) = k_1 e^x \sin x + k_2 e^x \cos x.$$

Ekkor,

$$y'_{I_p}(x) = k_1 e^x(\sin x + \cos x) + k_2 e^x(\cos x - \sin x),$$

$$y''_{I_p}(x) = k_1 e^x(\sin x + \cos x) + k_1 e^x(\cos x - \sin x) +$$

$$+ k_2 e^x(\cos x - \sin x) + k_2 e^x(-\sin x - \cos x).$$

Az eredeti egyenletbe helyettesítve, e^x-szel egyszerűsítve és a sin x, cos x függvények együtthatóit összehasonlítva, majd az összevonásokat elvégezve:

$$-2 k_1 \sin x - 2 k_2 \cos x = \sin x,$$

ahonnan

$$k_1 = -\frac{1}{2}, \qquad k_2 = 0.$$

233. $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} - e^{3x} \ln x.$

234. $y(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{27}(9x^3 + 18x^2 + 6x - 8) +$

$+ \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$

235. $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^x + \frac{1}{20} x^5 e^{2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{2x}.$

236. $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{12} x^3 \cos 2x +$

$+ \frac{1}{16} x^2 \sin 2x + \frac{1}{32} x \cos 2x.$

Az $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$ differenciálegyenlethez tartozó $\lambda^2 + 4 = 0$ karakterisztikus egyenletnek $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ gyökeivel a homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_H(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Mivel $c_2 \sin 2x$ tagja az általános megoldásnak, rezonancia lépett fel, és így az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását

$$y_{I_p}(x) = x(A_2x^2 + A_1x + A_o)\sin 2x +$$

$$+x(B_2x^2 + B_1x + B_o)\cos 2x$$

alakban keressük. (Ebben az alakban nincs benne $D_1 \sin 2x + D_2 \cos 2x$ típusú tag a rezonancia miatt.)
A differenciálegyenletben a behelyettesítés és összevonás után

$$12\,A_2x^2 \cos 2x - 12\,B_2x^2 \sin 2x + (6\,B_2 + 8\,A_1)x \cos 2x +$$

$$+ (6\,A_2 - 8\,B_1)x \sin 2x + (2\,B_1 + 4\,A_o)\cos 2x +$$

$$+ (2\,A_1 - 4\,B_o)\sin 2x = x^2 \sin 2x$$

adódik, ahonnan

$$-12\,B_2 = 1, \quad \text{azaz} \quad B_2 = -\frac{1}{12},$$

és a többi együttható zérus. Tehát

$$A_2 = 0, \quad B_1 = 0, \quad A_o = 0, \quad A_1 = \frac{1}{16}, \quad B_o = \frac{1}{32}.$$

Ezzel

$$y_{I_p}(x) = -\frac{1}{12}x^3 \cos 2x + \frac{1}{16}x^2 \sin 2x + \frac{1}{32}\cos 2x.$$

(237) A próbafüggvény: $y_{I_p}(x) = -2x^2 + 2x - 3$.

$$y_{I_p}(x) = A_2x^2 + A_1x + A_o$$

Az $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, ismeretleneket $y_{I_p}(x)$ behelyettesítésével és együttható összehasonlítással kaphatjuk meg. A behelyettesítés után adódó

$$-2\,A_2x^2 + (-2\,A_2 - 2\,A_1)x + (2\,A_2 - A_1 - 2\,A_o) =$$

$$= 4x^2 + 0\,x + 0$$

egyenletből

$$-2\,A_2 = 4, \quad -2\,A_2 - 2A_1 = 0, \quad 2\,A_2 - A_1 - 2\,A_o = 0,$$

tehát

$$A_2 = -2, \qquad A_1 = 2, \qquad A_o = -3.$$

(238) $y_{I_p}(x) = x(-\frac{4}{3}x^2 - 4x - 8)$.

A homogén differenciálegyenlet $\lambda^2 - \lambda = 0$, karakterisztikus egyenletének egyik gyöke a $\lambda = 0$ szám. Mivel az $f(x) = 4x^2$ függvény felírható $f(x) = e^{0x}\, 4x^2$ alakban is, ezért fellépett az úgynevezett rezonancia, és így

$$y_{I_p}(x) = x(A_2 x^2 + A_1 x + A_o),$$

a lehetséges próbafüggvény. Behelyettesítéssel és együttható összehasonlítással kapjuk az A_i együtthatókat $i = 0,1,2$.

239. $y_{I_p}(x) = A_o \sin 2x + B_o \cos 2x$. $A_o = -\frac{3}{20}$, $B_o = \frac{1}{20}$.

240. $y_{I_p}(x) = A_o x\, e^{5x}$. $A_o = 2$.

241. $y_{I_p}(x) = e^{-x}(A_1 x + A_o)$. $A_1 = -\frac{1}{12}$, $A_o = -\frac{13}{144}$.

242. $y^1_{I_p}(x) = e^x(A_2 x^2 + A_1 x + A_o)$, $A_2 = -\frac{1}{4}$, $A_1 = -\frac{1}{8}$, $A_o = -\frac{1}{32}$.

$y^2_{I_p}(x) = xe^{5x}(c_1 x + c_o)$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_o = 0$.

$$y_{I_p}(x) = y^1_{I_p}(x) + y^2_{I_p}(x) = e^x(-\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}) - \tfrac{1}{2}x^2 e^{5x}.$$

243. $y_{I_p}(x) = (A_1 x + A_o)\sin x + (B_1 x + B_o)\cos x$;

$A_1 = -\frac{2}{13}$, $B_1 = -\frac{3}{13}$

$A_o = \frac{71}{338}$, $B_o = -\frac{69}{338}$.

244. $y_{I_p}(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x$.

(245) $y(x) = c_1 e^x + c_2 x\, e^x$ a homogén differenciálegyenlet általános megoldása. Az

$$y_{I_p}(x) = p_1(x)e^x + p_2(x)x\, e^x$$

partikuláris megoldás $p_1(x)$ és $p_2(x)$ ismeretlen

függvényeinek deriváltjaira fennáll, hogy

$$p_1'e^x + p_2'xe^x = 0$$

$$p_1'e^x + p_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}.$$

Innen

$$p_1' = -1, \quad p_2' = \frac{1}{x},$$

tehát

$$p_1(x) = -x, \qquad p_2(x) = \ln|x|.$$

$$y_{I_p}(x) = -xe^x + xe^x \ln|x|.$$

246. $y_{I_p}(x) = \frac{1}{6}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\sin^2 2x,$

ahol a következő azonosságot használtuk:

$$\frac{1}{12}(\sin^4 2x - \cos^4 2x) \equiv \frac{1}{12}(\sin^2 2x - \cos^2 2x).$$

247. $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$ az általános megoldás.
A kezdeti feltételekkel

$$c_1 + c_2 = 4,$$

$$-c_1 + 2c_2 = 2,$$

tehát
$y(x) = 2e^{-x} + 2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$

a kezdetiérték feladat megoldása.

248. $y(x) = e^{x-1}(e-1)(1-x) + xe^x \ln|x|.$

249. $y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{7}{65}\sin x -$

$$- \frac{4}{65}\cos x$$

$$c_1 = \frac{69}{65}; \qquad c_2 = \frac{131}{190}.$$

250. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

$$c_1 = \frac{1}{2}e^{-\pi}; \quad c_2 = -e^{-2\pi}; \quad c_3 = \frac{1}{2}e^{-3\pi}$$

251. $y(x) = -\cos 1 \cos x - \sin 1 \sin x + x = -\cos(x-1) + x$

252. $y(x) = -\frac{1}{6}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\sin^4 2x - \frac{1}{12}\cos^4 2x$

253. $y(x) \equiv 0$

254. $y(x) = -2 + 6x - 6x^2 + 2x^3$

255. $y(x) = e^{-t}(\frac{3}{10}\cos t + \frac{11}{10}\sin t) + \frac{1}{10}\sin 2t - \frac{3}{10}\cos 2t$

12. Lineáris differenciálegyenletek változó együtthatókkal

256. $y(x) = c_1 x + c_2\sqrt{1 + x^2}$.

Az $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ differenciálegyenlet $y_1(x) = x$ megoldásának ismeretében a másik megoldást $y_2(x) = c(x)\cdot x$ alakban keressük. Az ismeretlen $c(x)$ variált függvény meghatározása a differenciálegyenletbe való behelyettesítésével történik:

$$x(1 + x^2)c'' + (2 + 3x^2)c' = 0,$$

ahonnan $c' = u$ helyettesítéssel

$$x(1 + x^2)u' + (2 + 3x^2)u = 0.$$

Innen

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2 + 3x^2}{x(1 + x^2)}\, du,$$

$$u = c' = \frac{k}{x^2\sqrt{1 + x^2}},$$

és így

$$c = k\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}\, dx .$$

Az $x = \operatorname{sh} z$ helyettesítéssel

$$c = -k\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + k_2 ,$$

és így egy partikuláris megoldás a $k = -1$, $k_2 = 0$ választással:

$$y(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\cdot x = \sqrt{1 + x^2}$$

257. $y(x) = c_1 \operatorname{ctg} x + c_2(1 - x \operatorname{ctg} x)$.

$y'' \sin^2 x - 2y = 0; \quad y_1(x) = \operatorname{ctg} x$

$y_2(x) = c(x) \cdot \operatorname{ctg} x$ behelyettesítésével,

$\operatorname{ctg} x \sin^2 x\, c'' - 2c' = 0; \quad c' = u,$ ahonnan

$c(x) = k(\operatorname{tg} x - x) + k_2$

Ha $k_2 = 0$ és $k = 1$, akkor

$y_2(x) = (\operatorname{tg} x - x)\operatorname{ctg} x = 1 - x \operatorname{ctg} x.$

258. $\varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x^3, \quad \varphi_3(x) = x^{-2}$

$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)] = 20 \neq 0.$

259. $\varphi(x) = c_1x^2 + c_2x^3 + c_3x^{-2} + \ln x \cdot$ (Lásd a 258. feladatot!)

260. $y'' + y' - 6y = 0$

261. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

262. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

263. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

264. $y(x) = c_1x + c_2x \ln x + \frac{c_3}{x^2}$.

Az $x = e^z$ helyettesítéssel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right] = \left[\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right],$$

tehát az új differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{dy}{dz} + 2y = 0.$$

Ebből $y(z) = c_1e^z + c_2ze^z + c_3e^{-2z}$, és a $z = \ln x$ visszahelyettesítéssel

$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3/x^2$

az általános megoldás.

265. $y_2(x) = x^3$ a másik megoldás állandó variálással.

$$W[x, x^3] = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0, \quad \text{ha} \quad x \neq 0$$

tehát lineárisan függetlenek a megoldások.

$y_H(x) = c_1 x + c_2 x^3$ az általános megoldás.

266. $y(x) = c_1 e^{2x}(x - 2)^2 + c_2 e^{2x}$.

267. $y(x) = (c_1 \ln x + c_2) x^{\lambda}$

A megoldást $y = x^{\lambda}$ alakban keressük.
Behelyettesítéssel az

$$a\lambda(\lambda - 1) + b\lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk. Itt is három esetet különböztetünk meg:

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$; két különböző valós gyök esetén

$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$

az általános megoldás

b) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$; $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ konjugált gyökpár

esetén

$y(x) = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$

az általános megoldás, amelyet az

$y(x) = x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha} e^{i\beta \ln x}$

függvény valós és képzetes részéből állíthatunk össze.

c) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a - b}{2a}$. esetén $y(x) = x^{\frac{a-b}{2a}}$ a megoldás.

$y_2(x) = c(x)x^{\lambda}$ alakban keressük a másik megoldást és a $c(x) = \ln x$ függvényt kapjuk, tehát

$y(x) = (c_1 \ln x + c_2)x^{\lambda}$ az általános megoldás.

Az $y = e^z$ helyettesítéssel is próbálkozhatunk.

268. $y(x) = c_1 x^5 + \frac{c_2}{x^3}$. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

269. $y(x) = x^2(c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

270. $y(x) = c_1 \frac{\ln x}{x} + c_2 \frac{1}{x}$;

271. $y(x) = x(c_1 + c_2 \ln|x|) + 2x^3$

272. $y(x) = (2x + c_1)^{\frac{7}{2}} + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$.

273. $y(x) = c_1 x + c_2 e^x + c_3 e^{2x} - 2$.

(274) $y(x) = c_1 x^3 + c_2 x + x^3 \ln x + x^2$.

Az $y'' - \frac{3}{x} y + \frac{3}{x^2} y = 2x - 1$ differenciálegyenletben

$a_1(x) = -\frac{3}{x}$,

$a_o(x) = \frac{3}{x^2}$,

és

$-\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} x = 0$,

tehát $y(x) = x$ megoldása a homogén differenciálegyenletnek.

(275) $y(x) = c_1 x^2 e^x + c_2 e^x + x e^{2x}$.

(e^x megoldása a homogén differenciálegyenletnek.)

(276) $y(x) = c_1 e^{2x}(x - 2)^2 + c_2 e^{2x}$

(e^{2x} megoldás; $m^2 + m\, a_1(x) + a_o(x) =$

$= m^2 - m \frac{4x - 7}{x - 2} + \frac{4x - 6}{x - 2} = 0$, ha $m = 2$.)

(277) $y_1(x) = \frac{1}{c_1} \operatorname{ch}(c_1 x + c_2)$, illetve

$(x - c_1)^2 + y^2 = \frac{1}{c_2^2}$.

Útmutatás:
A görbületi sugár

$$r = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

A normálisszakasz hossza:

$$n = \left| y\sqrt{1 + y'^2} \right|$$

Az $r = n$ egyenletből

$$1 + y'^2 = \pm\, y\, y'',$$

y'' előjelétől függően 2 differenciálegyenletet kaptunk.

13. Differenciálegyenletek megoldása hatványsor módszerrel — Bessel-függvények

278. $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Az $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$ differenciálegyenletnek $J_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ analitikus megoldását helyettesítsük be.

$$\frac{d\,J_n(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^{n-1}; \qquad \frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n(n-1)\, x^{n-2}$$

Összevonások után a következő egyenletet kapjuk:

$$(2n + 1)c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n + 1)(2n + 1 + n)\, c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^n = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$(2n + 1)c_1 = 0$$

$$c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{(n + 1)(3n + 1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

illetve, hogy

$$c_1 = c_3 = \ldots = c_{2k+1} = \ldots = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_o}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ezért

$$J_n(x) = c_o x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1)\ldots(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= c_o 2^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

A $c_o = \frac{1}{2^n n!}$ választással kapjuk a megoldást.

(279) $$Y_o(x) = J_o(x)\left(\ln x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2\cdot 4^3} x^4 + \frac{23}{4^2 6^3} x^6 + \ldots\right)$$

A másik megoldást az állandó variálásával keressük.

$y = u\, J_o(x)$ behelyettesítésével a

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2\frac{J_o'(x)}{J_o(x)} + \frac{1}{x}\right)\frac{du}{dx} = 0$$

differenciálegyenlethez jutunk.

$z = \frac{du}{dx}$ jelöléssel és változók szétválasztásával:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \left[-\frac{1}{x} - 2\frac{J_o'(x)}{J_o(x)}\right] dx.$$

Innen

$$z = \frac{du}{dx} = \frac{c_1}{x[J_o(x)]^2}.$$

Másodszori integrálással:

$$u = c_2 + \int_a^x \frac{c_1}{x[J_o(x)]^2}\, dx. \qquad a \in \mathbb{R}. \quad a \neq 0.$$

$$y(x) = c_2 J_o(x) + c_1 J_o(x) \int_a^x \frac{dx}{x[J_o(x)]^2},$$

második tagja lett a partikuláris megoldás.

Néhány tag kiírásával kapjuk az

$$Y_o(x) = J_o(x)\left(\ln x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2\cdot 4^3}x^4 + \frac{23}{4^2\cdot 6^3}x^6 + \ldots\right)$$

másodfajú 0 indexű Bessel-féle függvényt.

280. $$y(x) = c_o\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \ldots\right) +$$

$$+ c^1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots\right)$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-2}.$$

$$y'' - x^2y' - y = c(c_2 - c_o) + 6(c_3 - c_1)x +$$

$$+(12c_4 - c_1 - c_2)x^2 + (20\,c_5 - 2c_2 - c_3)x^3 + \ldots +$$

$$+ \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n-1)c_{n-1} - c_n\right]x^n + \ldots = 0.$$

Összehasonlítva x azonos hatványait

$$2(c_2 - c_o) = 0, \quad 6(c_3 - c_1) = 0, \ldots$$

$$c_{n+2} = \frac{(n-1)c_{n-1} + c_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \geqslant 1.$$

281. $$y(x) = c_o\left(1 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{45}x^6 - \frac{2}{405}x^9 - \ldots\right) +$$

$$+ c_1\left(x - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{63}x^7 - \frac{1}{567}x^{10} + \ldots\right) + x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$$

$$+ \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{1}{126}x^7 + \frac{1}{405}x^9 + \ldots$$

282. $$y = c_o\left(1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3.4.6} - \frac{x^9}{3.4.6.7.9} + - \ldots\right) +$$

$$+ c_2\left(x^2 - \frac{x^5}{3.5} + \frac{x^8}{3.5.6.8} - \frac{x^{11}}{3.5.6.8.9.11} + - \ldots\right).$$

Mivel y'' együttható függvénye a 0 helyen eltűnik, megvizsgáljuk a konvergenciát. A hányados kritériumot alkalmazva (ez most mindkét sorra egyszerre alkalmazható):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{n(n-2)} < 1$$

feltételből

$$x^3 \leq \lim_{n\to\infty} n(n-2),$$

tehát a megoldás minden valós x-re konvergens.

(283) $y = c_0(1 + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} - \frac{5x^5}{12} - \frac{x^6}{30} + \ldots) +$

$+ c_1(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{7x^5}{120} + \frac{x^6}{10} + \ldots).$

A konvergenciaintervallum az együtthatófüggvények

$$\frac{3x}{x^2 - x + 1} \quad \text{és} \quad -\frac{2}{x^2 - x + 1},$$

közös konvergenciaintervalluma.

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Ennek a mértani sornak konvergenciaintervalluma:

$$\left|\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right| < 1,$$

azaz

$$\frac{-\sqrt{3}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

(284) Ha a megoldást $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ alakban, behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, akkor az együttható összehasonlításból $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

285. $y(x) = 1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$

$$c_n = -\frac{n+2}{n(2n-1)} c_{n-1}. \qquad c_0 = 1$$

Helyettesítsük be az $y(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m+1} + \ldots +$

$+ c_n x^{m+n} + \ldots$ hatványsort, $c_0 \neq 0$, a

$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$

differenciálegyenletbe:

$$m(2m-1)c_0x^{m-1} + [(m+1)(2m+1)c_1 + (m+3)c_0]x^m + \ldots,$$

$$+ [(m+n)(2m+2n-1)c_n + (m+n+2)c_{n-1}]x^{m+n-1} +$$

$$+ \ldots = 0.$$

Mivel $c_0 \neq 0$, az $m(2m-1)c_0x^{m-1}$ tag eltűnik, ha $m = 0$, vagy $m = \frac{1}{2}$; a többi tag akkor, ha

$$m = 0 \quad \text{és} \quad c_n = -\frac{n+2}{n(2n-1)}c_{n-1}.$$

$c_0 = 1$ esetén kapjuk ebből a megoldást.

Ha $m = \frac{1}{2}$ és $c_0 = 1$, akkor partikuláris megoldás az

$$y_2(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \ldots\right).$$

15. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszerek

(286) $\underline{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} e^t & -e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ a karakterisztikus egyenlet sajátértékei, a megfelelő $\underline{s}^1$, $\underline{s}^2$ sajátvektorok:

$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Az általános megoldás:

$$\underline{x}(t) = c_1e^t\underline{s}^1 + c_2e^{5t}\underline{s}^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(287) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$; $\underline{x}(t) = c_1e^{-t}\underline{s}^1 + c_2e^{3t}\underline{s}^2$.

$$s^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ 2e^{-t} & -2e^{3t} \end{bmatrix}$$

288. $\underline{x}_1(t) = e^{2t} \cos t \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - e^{2t} \sin t \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;

$\underline{x}_2(t) = e^{2t} \cos t \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + e^{2t} \sin t \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = 2 + i, \qquad \lambda_2 = 2 - i$

$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix}1\\1+i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + i \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \underline{v}^1 + i\,\underline{v}^2 \cdot \underline{s}^2 = \overline{\underline{s}^1}$.

$\underline{x}^1(t) = \text{Re}\ e^{(2+i)t}(\underline{v}^1 + i\,\underline{v}^2) = e^{2t} \cos t\, \underline{v}^1 -$

$- e^{2t} \sin t\, \underline{v}^2$.

$\underline{x}^2(t) = \text{Im}\ e^{(2+i)t}(\underline{v}^1 + i\,\underline{v}^2) = e^{2t} \cos t\, \underline{v}^2 +$

$+ e^{2t} \sin t\, \underline{v}^1$.

$\underline{\underline{X}}(t) = [\underline{x}^1(t), \quad \underline{x}^2(t)]$.

289. $\underline{x}(t) = c_1[\cos 2t\, \underline{v}^1 - \sin 2t\, \underline{v}^2] +$

$+ c_2[\cos 2t\, \underline{v}^2 + \sin 2t\, \underline{v}^1]$.

$= (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)\underline{v}^1 + (c_2 \cos 2t - c_1 \sin 2t)\underline{v}^2$.

$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + i \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} = \underline{v}^1 + i\,\underline{v}^2$.

290. $\underline{\underline{X}}(t) = e^{3t} \begin{bmatrix}1 & t\\1 & t+1\end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\underline{s} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$; $\qquad \underline{h} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\underline{\underline{X}}(t) = c_1 e^{3t} \underline{s} + c_2 e^{3t}(t\,\underline{s} + \underline{h})$

291. $\underline{\underline{X}}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix}1 & t\\1 & t+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,$

$\underline{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

292. $\underline{\underline{X}}(t) = \left[\underline{s}^1,\ e^{3t}\,\underline{s}^2,\ e^{-t}\,\underline{s}^3\right].$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1.$

$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

293. $\underline{\underline{X}}(t) = \left[e^{2t}\underline{s}^1,\ e^{t}\underline{s}^2,\ e^{3t}\underline{s}^3\right],$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$

$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

294. $\underline{\underline{X}}(t) = \left[e^{2t}\underline{s}^1,\ e^{-t}\underline{s}^2,\ e^{-t}\underline{s}^3\right].$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

295. $\underline{\underline{X}}(t) = \left[e^{t}\underline{s}^1,\ e^{-2t}\underline{s}^2,\ e^{-2t}\underline{s}^3\right]$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -2.$

$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

296. $\underline{\underline{X}}(t) = \left[e^{-t}\underline{s}^1,\ \cos t\ \underline{v}^1 - \sin t\ \underline{v}^2, \cos t\ \underline{v}^2 + \sin t\ \underline{v}^1\right].$

$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -i,$

$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{v}^1 + i\underline{v}^2, \ \underline{s}^3 = \overline{\underline{s}^2}.$

297. $\underline{\underline{X}}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Az utolsó egyenletből kiindulva egyenként megoldjuk a differenciálegyenleteket.

298. $\underline{\underline{X}}(t) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9e^{-t} & -3e^{-t} + 3e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} + 3te^{2t} \\ 0 & 9e^{2t} & 9t\, e^{2t} \\ 0 & 0 & 9e^{2t} \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

299. $\underline{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1$.

300. $\underline{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

301. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = -y; \qquad y'' + y = 0$

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$z(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

302. $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{z} = 2\frac{z'^2}{z}; \qquad zz'' + 2z'^2 = 0$

$$y(x) = \frac{2c_1}{(c_1x + c_2)^2}$$

$$z(x) = -\frac{1}{c_1x + c_2}.$$

303. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} + x$

$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$

$z(x) = -\frac{1}{4} - c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x.$

304. $\frac{d^2x}{dt^2} = z; \quad \frac{d^3x}{dt^3} = x.$

$x(t) = c_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t).$

$y(t) = c_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}(\frac{\sqrt{3}c_3 - c_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}c_2 + c_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

$z(t) = c_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}(-\frac{c_2 + \sqrt{3}c_3}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t +$

$+ \frac{\sqrt{3}c_2 - c_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t).$

16. Az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ alapmátrix

305. $e^{\underline{\underline{A}}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2e^{5t} + 4e^{-t} & 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-t} & 4e^{5t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$e^{\underline{\underline{A}}t} = \alpha_1 \underline{\underline{A}}t + \alpha_o \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 t + \alpha_o & 2\alpha_1 t \\ 4\alpha_1 t & 3\alpha_1 t + \alpha_o \end{bmatrix}$

$r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_o; \quad \lambda_1 = -t, \quad \lambda_2 = 5t.$

$e^{-t} = \alpha_1(-t) + \alpha_o$ megoldása $\alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{5t} - e^{-t})$

$e^{5t} = \alpha_1(5t) + \alpha_o \qquad \alpha_o = \frac{1}{6}(e^{5t} + 5e^{-t}).$

306. $e^{\underline{\underline{A}}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}$

307. $e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$e^{\underline{\underline{A}}t} = \alpha_1 \underline{\underline{A}}t + \alpha_o \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \alpha_o & \alpha_1 t \\ -\alpha_1 t & \alpha_o \end{bmatrix}$

$r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_o$; $\lambda_1 = it$; $\lambda_2 = -it$.

$e^{it} = \alpha_1(it) + \alpha_o$; $\alpha_1 = \frac{1}{2\,it}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{\sin t}{t}$

$e^{-it} = \alpha_1(-it) + \alpha_o$ $\alpha_o = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t.$

308. $e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$e^{\underline{\underline{A}}t} = \alpha_2 \underline{\underline{A}}^2 t^2 + \alpha_1 \underline{\underline{A}}t + \alpha_o \underline{\underline{E}}$

$= \alpha_2 \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} t^2 + \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} t + \alpha_o \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$r(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_o$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3t$

$e^{3t} = \alpha_2 9t^2 + \alpha_1 3t + \alpha_o$; $\alpha_2 = \frac{1}{2}e^{3t}$

$e^{3t} = \alpha_2 6t + \alpha_1$ $\alpha_1 = (1 - 3t)e^{3t}$

$e^{3t} = 2\alpha_2$ $\alpha_o = (1 - 3t + \frac{9}{2}t^2)e^{3t}$.

309. $e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t}-1 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$.

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{\underline{\underline{A}}t} = \alpha_2 \underline{\underline{A}}^2 t^2 + \alpha_1 \underline{\underline{A}} t + \alpha_o \underline{\underline{E}}$

$r(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_o$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = t$.

$e^0 = \alpha_2 (0)^2 + \alpha_1 (0) + \alpha_o$; $\alpha_o = 1$

$e^0 = 2\alpha_2 (0) + \alpha_1$ $\qquad \alpha_1 = 1$

$e^t = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha 0$ $\qquad \alpha_2 = \frac{1}{t^2}(e^t - t - 1)$.

310. $e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$

$e^{\underline{\underline{A}}t} = L(t, \underline{\underline{A}}) = h_1(t)\underline{\underline{A}} + h_o(t)\underline{\underline{E}}$,

ahol a $h_1(t)$, $h_o(t)$ együtthatókra felírhatjuk a következő egyenletrendszert

$h(t, \lambda_1) = h_1(t)\lambda_1 + h_o(t) = e^{\lambda_1 t}$

$h(t, \lambda_2) = h_1(t)\lambda_2 + h_o(t) = e^{\lambda_2 t}$.

$h_1(t) = \frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$, $h_o(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}$

311. $e^{\underline{\underline{A}}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e^{5t} + 2e^{-t} & 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-t} & 2e^{5t} + 4e^{-t} \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

312. $e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

313. $e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$h_1(t)\,\lambda_1 + h_0(t) = e^{\lambda_1 t}$

$h_1(t) = te^{\lambda_1 t}$

a Hermite-féle interpolációs polinommal, ahol

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2.$

17. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer

314. Az

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = x$

homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer alapmátrixa

$$\underline{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer partikuláris megoldása

$$\underline{x}_{I_p}(t) = \underline{\underline{X}}(t) \int \underline{\underline{X}}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{bmatrix}.$$

Így

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2,$

$y(t) = c_1 e^t - c_2 e^t + (t-1)e^t - 2t.$

315. $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + (t + 1)e^{2t}$.

$y(t) = -2c_1e^{2t} - c_2e^{3t} - 2te^{2t}$.

316. Az alapmátrix: $\underline{\underline{X}}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t}$.

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{bmatrix} (1 - 3t)e^{3t} & te^{3t} \\ -9t\,e^{3t} & (1 + 3t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t}\,\underline{c} + e^{\underline{\underline{A}}t}\int e^{-\underline{\underline{A}}t}\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}dt, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

így az általános megoldás:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} [(-3c_1 + c_2)t + c_1]e^{3t} + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ [(-9c_1 + c_2)t + c_2]e^{3t} + \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

317. $e^{\underline{\underline{A}}t} = h_2(t)\,\underline{\underline{A}}^2 + h_1(t)\,\underline{\underline{A}} + h_o(t)\,\underline{\underline{E}}$.

$h_o(t) = e^{-t}(1 + t - \frac{3}{2}t^2)$, $\quad h_1(t) = (t - t^2)e^{-t}$,

$h_2(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

318. $$e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 + i$, $\quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

319. $$e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 - t & -t \\ t & 1+t \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_{I_p}(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t} \\ \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -4$

320. $\dot{x} = -5x - y + 7e^{t} - 9e^{2t}$

$\dot{y} = x - 3y - 3e^{t} + 4e^{2t}$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 - t & -t \\ t & 1 + t \end{bmatrix}$$

Próbafüggvénnyel keressük a partikuláris megoldást:

$$\underline{x}_{I_p}(t) = \begin{bmatrix} A_1 e^{t} + B_1 e^{2t} \\ A_2 e^{t} + B_2 e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \frac{31}{25}, \quad B_1 = -\frac{49}{36}$$

$$A_2 = -\frac{11}{25}, \quad B_2 = \frac{19}{36}$$

321. $\frac{d^2x}{dt^2} = x + e^{t} + e^{-t}.$

$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t\,e^{t} - \frac{1}{2}t\,e^{-t}$

$y(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{t} + \frac{1}{2}te^{-t}.$

322. $\frac{d^2x}{dt^2} = -x + 2\sin t$

$x_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t;$

$x_{I_p}(t) = A\,t \sin t + B\,t \cos t$ a próbafüggvény.

$A = 0, \quad B = -1.$

$x_I(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t$ az általános megoldás. így

$x(t) = x_I(t)$

$y(t) = -\int x_I(t)\,dt + \int \sin t\,dt =$

$= -c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \sin t.$

323. $x(t) = \frac{31}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t}.$

Az $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = e^{t}; \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(0) = -4$

kezdetiérték feladatot az $x_1(t) = x(t)$

$x_2(t) = \dot{x}(t)$

jelzésekkel átírjuk inhomogén differenciálegyenlet rendszerre:

$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad x_1(0) = 1,$$
$$\dot{x}_2 = 8x_1 - 2x_2 + e^t \qquad x_2(0) = -4.$$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ az együttható mátrix.

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}. \qquad e^{-\underline{\underline{A}}\tau} = e^{\underline{\underline{A}}(-\tau)}$$

a $t = -\tau$ helyettesítéssel kapható.

$$\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}; \qquad \underline{x}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad t_o = 0$$

Az $\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_o)}\,\underline{x}_o + e^{\underline{\underline{A}}t}\int_{t_o}^{t} e^{-\underline{\underline{A}}\tau}\,\underline{f}(\tau)\,d\tau$

megoldásba behelyettesítve:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{bmatrix} + \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -6e^t + 5e^{2t} + e^{-4t} \\ -6e^t + 10e^{2t} - 4e^{-4t} \end{bmatrix}$$

és ennek első koordinátája a megoldás. Az

$$\int_0^t e^{-\underline{\underline{A}}\tau} f(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t (\frac{1}{6}e^{-\tau} - \frac{1}{6}e^{5\tau})\,d\tau \\ \int_0^t (\frac{1}{3}e^{-\tau} + \frac{2}{3}e^{5\tau})\,d\tau \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -5e^{-t} - e^{5t} + 6 \\ -10e^{-t} + 4e^{5t} + 6 \end{bmatrix}.$$

324. $x(t) = 3 - 2\cos(t - \pi) + 2\sin(t - \pi)$

325. $x(t) = 2\cos t + 6\sin t - 2 - 6t,$
$y(t) = -2\cos t + 2\sin t + 3.$

Az $x(t) = x_1$, $\dot{x}(t) = x_2$, $y(t) = x_3$ jelölésekkel a rendszer

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \underline{x}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t_o = 0.$

A homogén rendszer alapmátrixa:

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{bmatrix} 1 & -2 + 2\cos t + \sin t & -5 + 5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t + 2\sin t \end{bmatrix},$$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t}\,\underline{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\,\underline{f}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 + 5\cos t \\ -5\sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6t + 3 + 6\sin t - 3\cos t \\ -6 + 3\sin t + 6\cos t \\ 3 - 3\cos t \end{bmatrix},$$

$x(t) = x_1(t)$, $\quad y(t) = x_3(t)$.

18. Egyensúlyi helyzetek osztályozása — A fázissík

326. Az origó nem stabilis csomópont.
Az $y(x) = cx$ trajektóriák az origón átmenő egyenesek.

327. Az origó centrum. A trajektóriák origó középpontú körök.

328. Az origó nyeregpont. A trajektóriák egyenletei az $xy = c$ hiperbolák, illetve az X és Y tengelyek $x = 0$, illetve $y = 0$ egyenletei.

329. Az origó nem stabilis fókusz.
Az $r = ke^{2\varphi}$ logaritmikus spriálisok a trajektóriák.
Megoldás:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}\,; \quad u = \frac{y}{x} \text{ helyettesítéssel és szeparálással}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2 + y^2) - \ln x^2\right] = \ln x + k$$

Polárkoordinátákra áttérve

$r = ke^{2\varphi}$.

330. Az origó stabilis fókusz.

331. Legyen $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix tetszőleges sajátértéke.
Van olyan $\alpha > 0$, hogy

$$\alpha_k < -\alpha.$$

Az $\underline{x}(t)$ általános megoldás $\underline{c}\, t^{\ell} e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t}$ (ℓ adott természetes szám; $\underline{c}$ vektor), alakú tagok lineáris kombinációja.

$$\left|\underline{c} t^{\ell} e^{\alpha_k t i\, \beta_k t}\right| \leq |\underline{c}| |t|^{\ell} e^{-\alpha t},$$

és

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|t|^{\ell}}{e^{\alpha t}} = 0.$$

332. Mivel a differenciálegyenlet-rendszer együttható mátrixának sajátértékei a

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{számok},$$

és ezek valós része negatív, az előbbi feladatból következik az állítás.

333. $\lambda_1 = -6 + i, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}.$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{-6t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}; \quad e^{\underline{\underline{A}} \cdot 0} = \underline{\underline{E}}$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = e^{-6t} \begin{bmatrix} 3 \cos t - 8 \sin t \\ -5 \cos t - 11 \sin t \end{bmatrix} \text{ a kezdetiérték}$$

a feladat megoldása tehát korlátos függvény.

334. A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása, a $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ sajátértékekkel és a hozzájuk tartozó $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ sajátvektorokkal

$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \underline{s}_1 + c_2 e^{-3t} \underline{s}_2$ alakú.

Legyen

$$M = \max \{|c_1 \underline{s}_1| + |c_2 \underline{s}_2|\}$$

$$|\underline{x}(t)| \leq |c_1 \underline{s}_1| e^{-t} + |c_2 \underline{s}_2| e^{-3t} \leq M(e^{-t} + e^{-3t}) \to 0,$$

ha $t \to \infty$.

335. Útmutatás:
Igazoljuk, hogy van olyan $M > 0$ szám, amelyre az általános megoldás $|\underline{x}(t)| \leq M e^{-6t}$.

336. Behelyettesítéssel igazolhatjuk, hogy

$$\underline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

megoldása a homogén differenciálegyenletnek. Az

$$\underline{x} = \underline{\underline{Q}}(t)\ \underline{y}\ ,$$

ahol $\underline{\underline{Q}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ a

redukciós mátrix. Helyettesítéssel az $y(t)$-re

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{\underline{Q}}^{-1}(t)\left[\underline{\underline{A}}(t)\ \underline{\underline{Q}}(t) - \dot{\underline{\underline{Q}}}(t)\right]\underline{y}(t)$$

differenciálegyenlet-rendszert, azaz az

$$\dot{\underline{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{t^2} & 0 \end{bmatrix}\ \underline{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert kapjuk. Így az

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

megoldással a

$$\underline{x}^2(t) = \underline{\underline{Q}}(t)\ \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} t - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

megoldást határoztuk meg és $W\left[\underline{x}^1(t),\ \underline{x}^2(t)\right] \neq 0$

miatt

$$\underline{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t - 1 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

alapmátrixa a homogén lineáris differenciálegyenletnek. Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer partikuláris megoldását az állandó variálásával kapjuk:

$$\underline{x}_{I_p}(t) = \underline{\underline{X}}(t)\ \underline{c}(t),$$

ahol

$$\underline{c}(t) = \int \underline{\underline{X}}^{-1}(t) \begin{bmatrix} t^2 + t \\ t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 2t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása:

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{X}}(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \underline{\underline{X}}(t) \begin{bmatrix} 2t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

337. $\underline{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} t & 1 + t^2 \\ 1 & t \end{bmatrix}$.

338. $x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t$

$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2$

339. $x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) +$

$+ (\cos t - \sin t) \ln |\cos t|$

$x_2(t) = (c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t +$

$+ 2 \cos t \ln|\cos t| + 2 t \sin t$

340. $x_1(t) = (c_1 + 2c_2 t - 8t^{\frac{5}{2}})e^t$

$x_2(t) = (c_1 + 2c_2 t - c_2 - 8 t^{\frac{5}{2}} + 10 t^{\frac{3}{2}})e^t.$

341. $x_1(t) = 3c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$

$x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$

342. $x_1(t) = -2e^t(c_1 + c_2 + c_2 t) - 2e^{-t}(c_3 - c_4 + c_4 t).$

$x_2(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t).$

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V_2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **MATEMATIKAI FELADATTÁR VIII.**

A jegyzet szerzője: **Farkas Miklósné**

A jegyzet azonosítója: **051411**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:
(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)