BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Farkas Miklós

MATEMATIKA
VIII. kötet
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Összeállította:
Farkas Miklós - Kotsis Domokosné - Mile Károlyné

Műegyetemi Kiadó, 2008

(Hetedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040808**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 21 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 6803/08

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat utolsó kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

I. kötet. A matematika alapjai
II. kötet. Egyváltozós valós függvények
III. kötet. Lineáris algebra
IV. kötet. Végtelen sorok
V. kötet. Többváltozós valós függvények
VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalizis
VII. kötet. Komplex függvények
VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztrativ példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön utmutató csatlakozik a sorozathoz). A sorozatot a Matematika Példatár kötetei egészitik ki, amelyekben az olvasó nagy számu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definiciókat, tételeket (segédtételeket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világitják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy köteten belül az idézett definició, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kivül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben a "I. 13.2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre ugy hivatkozunk: "I. Kötet, 13.2 Tétel". A bizonyitások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott müvek és nem az eredmények eredeti forrásainak cimeit tartalmazza. Az irodalomjegyzékben felsorolt müvekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Bp. 1972. október

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

ELSŐRENDŰ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETE

1. Differenciálegyenletek osztályozása

Az anyagi világban lejátszódó mechanikai mozgásokat, fizikai, kémiai és egyéb - a technikában fontos szerepet játszó - folyamatokat igen gyakran (egy-, vagy többváltozós, valós, komplex stb.) függvények segítségével irhatjuk le. Valamely mechanikai, fizikai, kémiai, vagy egyéb jelenség, folyamat, rendszer stb. lefolyását, állapotát bizonyos mechanikai, fizikai stb. törvények határozzák meg. A jelenség "matematikai modellje" az a függvény, amely leirja a jelenséget. A jelenséget meghatározó fizikai stb. törvények "matematikai modellje" pedig igen gyakran valamilyen "differenciálegyenlet", melynek "megoldásaként" adódik a jelenséget leiró függvény. Igy például, ha egy pontszerűnek képzelt m tömegű test valamely egyenes mentén mozog, az időt t-vel, a test által megtett utat x-szel jelöljük, fontos kérdés az x(t) "ut-idő függvény" meghatározása. A Newton-féle axioma szerint a tömeg és a gyorsulás szorzata a testre ható erővel egyenlő. A gyorsulás az "ut idő szerinti második deriváltja", vagyis $\ddot{x}(t)$, az f erő pedig általában az időnek, a pillanatnyi helyzetnek, x(t) -nek és a pillanatnyi sebességnek, $\dot{x}(t)$ -nek a függvénye lehet. A Newton-féle axioma modellje a mi esetünkben az

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \tag{1.1}$$

egyenlet, melyben az ismeretlen az x függvény. A mozgás modellje, a mozgást leiró ut - idő függvény, az a függvény, amely (deriváltjaival együtt) minden t időpillanatban kielégiti az (1.1) "differenciálegyenletet", vagyis amelynek (1.1) -be helyettesitése (1.1) -et (t -ben) azonossággá teszi.

A differenciálegyenlet olyan egyenlet, melyben ismert állandókon és függvényeken kivül egy ismeretlen függvény és ennek deriváltjai lépnek fel. A differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megkeresni az összes olyan függvényt, mely kielégiti a differenciálegyenletet, azaz behelyettesitve a differenciálegyenletbe, azt azonossággá teszi. A differenciálegyenlet megoldásainak megkeresését szokás a differenciálegyenlet integrálásának nevezni.

A differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a benne szereplő ismeretlen függvény egyváltozós. Ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény többváltozós, és ennek megfelelően a fellépő deriváltak az ismeretlen függvény parciális deriváltjai, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk.

Attól függően, hogy az egyenletben az ismeretlen függvénynek hányadik deriváltja szerepel, definiálhatjuk a differenciálegyenlet rendjét. Egy differenciálegyenletet n-edrendűnek mondunk, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált az ismeretlen függvény n-ik deriváltja.

Lineárisnak nevezünk egy differenciálegyenletet, ha az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak ismert függvényekkel alkotott lineáris kombinációja áll az egyenlet egyik oldalán és egy ismert függvény a másikon vagy ekvivalens átalakítással ilyen alakra hozható).

Explicit az a differenciálegyenlet, melyben az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja (esetleges azonos átalakításoktól eltekintve) ki van fejezve, ellenkező esetben a differenciálegyenletet implicitnek nevezzük.

Az (1.1) differenciálegyenlet például közönséges, másodrendű, explicit differenciálegyenlet, mely lineáris is lehet akkor, ha $f(t, x, \dot{x}) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)\dot{x}$, ahol $a_i(t)$ $(i = 0, 1, 2)$ ismert függvények. Ellenkező esetben a differenciálegyenletet nemlineárisnak mondjuk.

A fejezet további részében (ha nem irjuk ki az ellenkezőjét) mindig közönséges differenciálegyenletekről tárgyalunk. Ha x-szel jelöljük a független változót és y-nal az ismeretlen függvényt, akkor az n-edrendű implicit differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 .$$

Az n-edrendű explicit differenciálegyenlet:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) .$$

Az n-edrendű (explicit) lineáris differenciálegyenlet:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) .$$

$b(x) \equiv 0$ esetén a lineáris differenciálegyenletet homogénnek, $b(x) \not\equiv 0$ esetén inhomogénnek nevezzük.

Ha a differenciálegyenlet megoldható, akkor általában több (végtelen sok) megoldásfüggvénye van. A megoldásfüggvények közül bizonyos "mellékfeltételek" hozzávételével tudjuk a számunkra megfelelőt vagy megfelelőket kiválasztani. Ha a differenciálegyenlethez mellékfeltételként előirjuk a keresett függvény, illetve deriváltjainak értékét egy adott helyen, akkor azt mondjuk, hogy kezdeti feltételt szabtunk meg. Ha a mellékfeltétel olyan, hogy legalább két pontban irjuk elő a függvény (vagy esetleg deriváltjainak) értékeit, akkor azt mondjuk, hogy peremfeltételt adtunk meg.

1.1 Példa. Tekintsük az $y'' = 2$ differenciálegyenletet. Mint erről integrálással könnyen meggyőződhetünk, a megoldások az $y(x) = x^2 + ax + b$ függvények, ahol "a" és "b" tetszőleges valós számok. Ha megadjuk az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételt, akkor a differenciálegyenlet e kezdeti feltételt is kielégitő megoldása az $y_1(x) = x^2 + x$ függvény. Ha az $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ peremfeltételt adjuk meg, akkor a differenciálegyenlet e peremfeltételt is kielégitő megoldása az $y_2(x) = x^2 - x$ függvény.

A mellékfeltételek lehetséges számát természetesen befolyásolja a megoldásfüggvényben szereplő szabadon választható konstansok száma és ezzel szoros összefüggésben a differenciálegyenlet rendje. A fejezet további részében kizárólag elsőrendü differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

2. Iránymező. Kezdetiérték feladat

Legyen adott az

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

elsőrendü explicit differenciálegyenlet, ahol $f : D \mapsto R$ és $D \subset R^2$ nyilt és összefüggő tartomány.

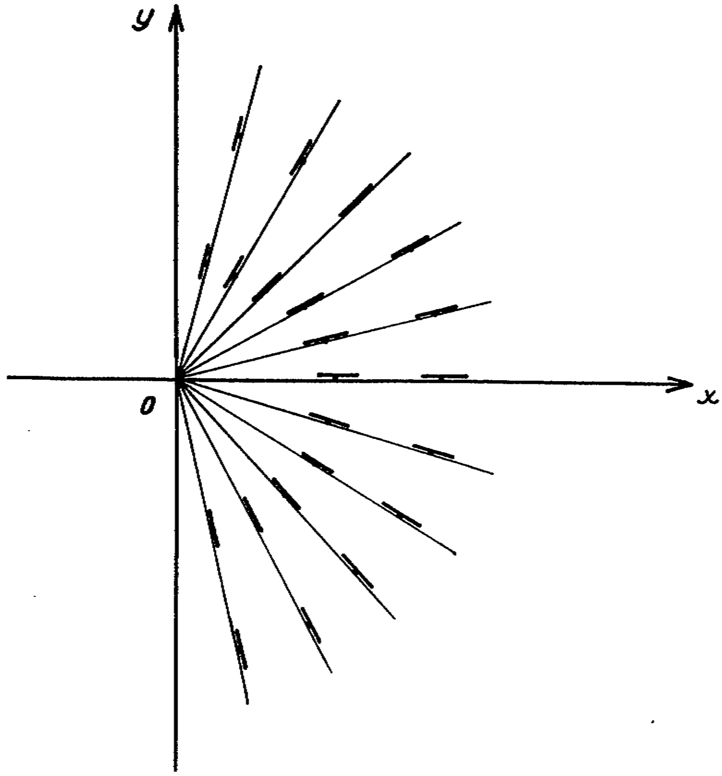
2.1 Definició. Az I intervallumon differenciálható $y(x)$, $x \in I$ függvényt a (2.1) differenciálegyenlet megoldásának (megoldásfüggvényének) nevezzük, ha minden $x \in I$-re $(x, y(x)) \in D$ és

$$y'(x) = f(x, y(x)) .$$

Az $y(x)$ megoldás grafikonját a (2.1) differenciálegyenlet integrálgörbéjének (megoldásgörbéjének) nevezzük.

A (2.1) differenciálegyenlet egy fontos geometriai szemléltetését nyerhetjük, ha bevezetve a sikon az x, y Descartes-féle derékszögü koordinátarendszert a D siktartomány minden (x, y) pontjában meghuzzuk az $f(x, y)$ iránytangensü kis egyenes szakaszt, az un. vonalelemet. Ily módon a D tartomány minden pontjához hozzárendeltünk egy irányt és megkaptuk a (2.1) differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt. Geometriailag a differenciálegyenlet megoldása azt jelenti, hogy megkeressük azt az $y = y(x)$ egyenletü görbét, mely "belesimul" az iránymezőbe, azaz melynek minden pontjában az érintő irányát az iránymező e pontbeli vonaleleme adja meg.

Az integrálgörbék megrajzolását megkönnyíthetjük azáltal, hogy megrajzoljuk az f függvény szintvonalait, vagyis az $f(x,y) = c$ egyenletű görbéket, ahol a c állandónak tetszőleges értéket adhatunk f értékkészletéből. Az $f(x,y) = c$ szintvonal azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy minden pontjában a ponton áthaladó integrálgörbe érintőjének iránytangense a c állandó. Az $f(x,y) = c$ egyenletű görbéket nevezzük izoklin vonalaknak (izoklináknak).

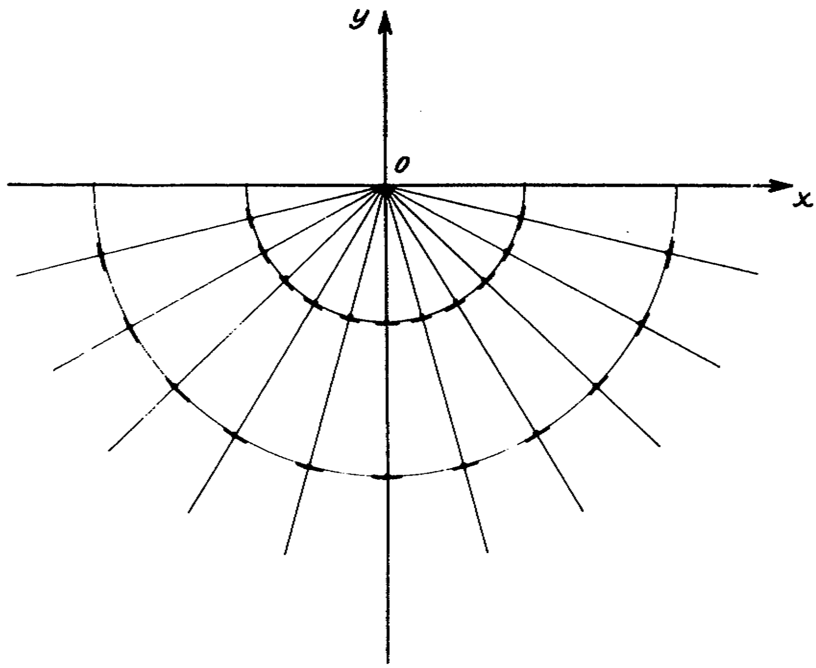


2.1 ábra

2.1 Példa. Tekintsük az $y' = \frac{y}{x}$ differenciálegyenletet, ahol a jobb oldalt, az $f(x,y) = \frac{y}{x}$ függvényt leszűkítjük az $x > 0$ félsíkra, vagyis a $D = \{(x,y) : x > 0\}$ nyílt és összefüggő tartományon vizsgáljuk. Izoklin vonalak az $\frac{y}{x} = c$ egyenletű görbék, azaz az origóból kiinduló félegyenesek a jobb oldali félsíkon (c tetszőleges valós). Itt minden (x, cx) pontban az integrálgörbe iránytangense c, azaz a vonalelem "benne van az $y = cx$

egyenesben". Következésképpen az integrálgörbék is az $y = cx$, $x > 0$ egyenletű félegyenesek (lásd 2.1 ábra). Az $y = cx$ függvényt a differenciálegyenletbe helyettesítve a $c \equiv \frac{cx}{x}$ azonosságot nyerjük. (Természetesen vizsgálható e differenciálegyenlet az $x < 0$ félsikon is).

<u>2.2 Példa.</u> $y' = -\frac{x}{y}$, $(y < 0)$. Izoklinák a $-\frac{x}{y} = c$ egyenletű görbék, azaz az $y = -\frac{1}{c}x$, $(c \neq 0)$ és az $x = 0$ félegyenesek. Az $y = -\frac{1}{c}x$ izoklina minden pontjában az integrálgörbe érintőjének iránytangense c, tehát az érintő merőleges az izoklinákra (2.2 ábra). Azaz az integrálgörbék origó középpontú félkörök, egyenletük $y = -\sqrt{k^2 - x^2}$, ahol k tetszőleges állandó.



2.2 ábra

Az előbbi példákban szereplő differenciálegyenleteknek végtelen sok megoldása adódott. Az integrálgörbék mindkét példában egyparaméteres görbesereget alkottak. Ezt a görbesereget tehát egyértelműen meg lehet adni azáltal, hogy megadjuk az iránymezőt, amelybe belesimul, azaz megadjuk a görbesereg differenciálegyenletét.

Érdekes lehet a "forditott" feladat, melyben adott görbesereg differenciálegyenletét kell meghatározni. Legyen adva a továbbiakban az $y = \varphi(x, c)$ egyenletü egyparaméteres görbesereg, ahol $\varphi \in C^1_{D_\varphi}$, $D_\varphi \subset R^2$.

Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi'_c(x, c) \neq 0$, $(x, c) \in D_\varphi$, tehát a görbesereg egyenletéből c egyértelmüen kifejezhető mint x és y folytonosan differenciálható $c(x, y)$ függvénye. Egy rögzitett c értékhez a görbesereg egy eleme tartozik. A $\varphi'_c \neq 0$ feltétel biztositja, hogy legalábbis "lokálisan" a görbesereg "egyrétüen fedi le" az x y sik megfelelő tartományát (vagyis egy (x_0, y_0) pont elég kis környezetében a $c_0 = c(x_0, y_0)$ paraméterérték elég kis környezetéhez tartozó c paraméterü görbék közül egy ponton pontosan egy halad át). Az (x, y) ponton áthaladó görbe érintőjének iránytangense $y' = \varphi'_x(x, c)$, ahol $c = c(x, y)$. $c = c(x, y)$ -nak az utóbbi egyenlőségbe való behelyettesitésével adódik valamely (x, y) helyen a görbesereg (x, y) -on áthaladó görbéjének megfelelő vonalelem iránytangense: $y' = \varphi'_x(x, c(x, y))$.

Ez viszont azt jelenti, hogy a görbesereg kielégiti az

$$y' = \varphi'_x(x, c(x, y))$$

differenciálegyenletet.

Ha létezik egy $y = \psi(x, k)$ görbesereg, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $\psi \in C^1_{D_\psi}$, $D_\psi \subset R^2$, $\psi'_k(x, k) \neq 0$, $(x, k) \in D_\psi$,

b) minden $(x_0, c) \in D_\varphi$ -hez van pontosan egy k, hogy $\varphi(x_0, c) = \psi(x_0, k)$,

c) $\varphi'_x(x_0, c) = -\dfrac{1}{\psi'_x(x_0, k)}$,

akkor $y = \psi(x, k)$ az $y = \varphi(x, c)$ görbesereg ortogonális trajektóriának serege.

Ezek alapján az eredeti görbesereg $y' = \varphi'_x(x, c(x,y))$ differenciálegyenletéből az ortogonális trajektóriák seregének differenciálegyenlete az

$$y' = -\frac{1}{\varphi'_x(x, c(x,y))}$$

differenciálegyenlet.

<u>2.3 Példa.</u> Tekintsük az $y = \sqrt{c - 2x}$ görbesereget, $c \in R$. Itt $\varphi(x,c) = \sqrt{c - 2x}$, $\varphi'_c(x,c) = \frac{1}{2\sqrt{c - 2x}} \neq 0$.

Nyilvánvaló, hogy az

$$y = \sqrt{c - 2x},$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{c - 2x}}$$

egyenletrendszerből c kiküszöbölhető és a görbesereg differenciálegyenlete az

$$y' = -\frac{1}{y}$$

differenciálegyenlet. Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$y' = y.$$

Ez utóbbi differenciálegyenlet megoldása az $y = k\,e^x$ görbesereg.

<u>2.4 Példa.</u> A 2.1 Példa és a 2.2 Példa differenciálegyenleteinek megoldásgörbéi egymás ortogonális trajektóriái.

Ha a differenciálegyenlethez kezdeti feltételt csatolunk és olyan megoldást keresünk, mely a differenciálegyenlet mellett még a mellékfeltételt is kielégíti, akkor beszélünk <u>kezdetiérték feladatról.</u> A (2.1) egyenlethez mellékfeltételként előírhatjuk az

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

kezdeti értéket olyan (x_0, y_0) -ra, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Nyilván több feltételt nem adhatunk, hiszen (2.1) egyértelműen meghatározza az első, és ha léteznek, akkor a második, stb. deriváltak értékét az x_0 helyen, ha $y_0 = y(x_0)$ adott. Ugyanis (2.1) -ből a (2.2) -t is kielégítő $y(x)$ megoldásra $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ adódik. (Ha $y(x)$ kétszer differenciálható és f is totálisan differenciálható, akkor az $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ azonosság differenciálásával $y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))\, y'(x)$, vagyis $y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\, y'(x_0)$).

Mind elvi, mind pedig gyakorlati szempontból alapvetően fontos az a kérdés, hogy vajon a kezdetiérték feladatoknak van-e megoldása és csak egy megoldása van-e. Arra, hogy az f függvényre tett milyen feltételek mellett van egy és csak egy megoldás (áll fenn a megoldás "egzisztenciája" és "unicitása") a következő tétel ad választ.

2.1 Tétel. Legyen adott az

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.3}$$

kezdetiérték feladat és a

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$$

téglalap; tételezzük fel, hogy

$f \in C^0_D$, $f'_y \in C^0_D$ és f korlátos a D téglalapon, vagyis van $M > 0$, melyre $|f(x, y)| < M$, $(x, y) \in D$, legyen továbbá

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right);$$

ekkor a (2.3) kezdetiérték feladatnak van egy és csak egy az $(x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha)$ intervallumon értelmezett $y(x)$ megoldása.

Ezt a tételt most nem bizonyitjuk, mivel egy, a 6. pontban kimondott és ott bizonyitott tétel (6.3 Tétel) speciális esete. Már itt megjegyezzük azonban a következőket. (2.3) megoldása egy "integrálegyenlet" megoldására vezethető vissza. Tételezzük fel u.i., hogy $y(x)$ a (2.3) kezdetiérték feladat megoldása. Ekkor az

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \tag{2.4}$$

azonosságból látható, hogy $y(x)$ folytonosan differenciálható. Integráljuk az azonosság mindkét oldalát az $[x_0, x]$ intervallumon.

Figyelembe véve, hogy $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) - y(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))\, du,$$

vagy

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))\, du . \qquad (2.5)$$

Ezek szerint, ha $y(x)$ (2.3) megoldása, akkor kielégiti az

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y)\, du \qquad (2.6)$$

integrálegyenletet. Forditva, ha az $y(x)$ függvény folytonos és kielégiti a (2.6) integrálegyenletet, akkor a (2.5) azonosság teljesüléséből látható, hogy $y(x)$ folytonosan differenciálható (lásd II. Kötet, 28.2 Tétel). (2.5) -be $x = x_0$ -at helyettesitve kapjuk, hogy $y(x_0) = y_0$; (2.5) -öt differenciálva pedig a (2.4) azonosságot. Ezek szerint, ha $y(x)$ (2.6) folytonos megoldása, akkor folytonosan differenciálható megoldása a (2.3) kezdetiérték feladatnak is.

3. Elemi úton integrálható differenciálegyenletek

A 2.1 Tétel alapján az esetek jelentős részében el tudjuk dönteni, hogy (2.3) -nak van egyértelmü megoldása, azonban ez a tétel nem ad általános módszert a megoldás meghatározására. A továbbiakban néhány olyan differenciálegyenlettel ismerkedünk meg, mely véges sok integrálással, "kvadraturával" megoldható.

Először az

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (3.1)$$

ugynevezett szétválasztható változóju (szeparábilis, a jobboldal "egy csak x-től és egy csak y-tól függő függvény" szorzata) differenciálegyenlettel foglalkozunk.

Feltételezzük, hogy $f \in C^0_{(a,b)}$, $g \in C^0_{(c,d)}$.

<u>3.1 Tétel.</u> Ha a (3.1) differenciálegyenlet jobb oldalára tett előző feltevéseken kívül fennáll $g(y) \neq 0$, $y \in (c,d)$, továbbá $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, akkor (3.1)-nek az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltétel mellett van egy és csak egy $\varphi(x)$ megoldása, mely értelmezve van egy (α, β) intervallumon, $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset (a,b)$, és melynek implicit megadása:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt . \qquad (3.2)$$

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $i = \inf\limits_{y \in (c,d)} \int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)}$ és $s = \sup\limits_{y \in (c,d)} \int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)}$. Nyilvánvalóan $i<0$ és $s > 0$, hiszen $g(y)$ állandó előjelű, igy $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)}$ szigoruan monoton függvény és $G(y_0) = 0$. Ezért van olyan x_0-t tartalmazó (a,b)-ben levő nyilt intervallum, melynek minden x pontjára az $i < \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt < s$ egyenlőtlenség fennáll, hiszen az egyenlőtlenség középső tagja folytonos és $x = x_0$-nál zérus. Legyen ezen intervallumok közül (α, β) a maximális. $G(y)$ szigoru monotonitásából következik, hogy minden $x \in (\alpha, \beta)$-hoz van egy és csak egy $y \in (c,d)$, mely x-szel együtt kielégiti (3.2)-t; ezt az y-t $\varphi(x)$-szel jelölve, nyilván

$$\varphi(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right), \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

Az inverz függvény, ill. az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel (II. Kötet, 12.6 és 12.5 Tétel) szerint φ differenciálható függvény.

Az

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{du}{g(u)} \equiv \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\ , \qquad x \in (\alpha, \beta)$$

azonosság mindkét oldalát differenciálva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{g(\varphi(x))}\ \varphi'(x) \equiv f(x)\ ,$$

vagyis φ kielégiti (3.1) -et. Továbbá

$$\varphi(x_0) = G^{-1}\Big(\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt\Big) = G^{-1}(0) = y_0\ ,$$

vagyis φ kielégiti a kezdeti feltételt is.

A megoldás az x_0 pont környezetében egyértelmü. Tegyük fel, hogy $\varphi_1(x)$ egy másik megoldás ($x \in (\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$), melyre $\varphi_1(x_0) = y_0$. Megmutatjuk, hogy az $(\alpha, \beta) \cap (\alpha_1, \beta_1)$ intervallumon $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$. $\varphi_1(x)$ kielégiti (3.1) -et, ezért $\dfrac{\varphi_1'(x)}{g(\varphi_1(x))} \equiv f(x)$. Integráljuk mindkét oldalt x_0 -tól x-ig és a bal oldalon alkalmazzuk az $u = \varphi_1(t)$ helyettesitést:

$$\int_{y_0}^{\varphi_1(x)} \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1'(t)\,dt}{g(\varphi_1(t))} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\ .$$

Ezek szerint $\varphi_1(x)$ is kielégiti (3.2) -t, vagyis

$$\varphi_1(x) = \varphi(x)\,, \text{ ha } x \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha, \beta)\,.!$$

Megjegyezzük, hogy ha a (3.1) egyenletben $g(y_0) = 0$, akkor $y \equiv y_0$ megoldásfüggvény.

<u>3.1 Példa.</u> Vizsgáljuk az

$$y' = f(x)\,, \qquad f \in C^0_{(a,b)}$$

differenciálegyenletet. Ez (3.1) speciális esete, $g(y) \equiv 1$. A $\varphi(x)$ megoldásfüggvény, mely eleget tesz az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek, az

$$\int_{y_0}^{y} du = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

egyenletből határozható meg y kifejezésével.
Tehát

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,.$$

A megoldásfüggvény értelmezési tartománya az (a,b) intervallum.

<u>3.2 Példa.</u> Legyen adott az $y' = -\frac{x}{y}$ $(y < 0)$ differenciálegyenlet (lásd 2.2 Példa). (3.1) szerint például $f(x) \equiv x$ és $g(y) \equiv -\frac{1}{y}$ választható. Ekkor $f \in C^0_{(-\infty,\infty)}$, $g \in C^0_{(-\infty,0)}$, továbbá $g(y) \neq 0$. Legyen $x_0 \in R$, $y_0 < 0$. Mivel

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)} = \int_{y_0}^{y} -u\,du = -\frac{y^2 - y_0^2}{2}\,,$$

ezért

$$i = \inf_{y \in (-\infty, 0)} \frac{y_0^2 - y^2}{2} = -\infty$$

és

$$s = \sup_{y \in (-\infty, 0)} \frac{y_0^2 - y^2}{2} = \frac{y_0^2}{2} .$$

A megoldásfüggvény értelmezési tartománya a

$$-\infty < \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{x^2 - x_0^2}{2} < \frac{y_0^2}{2}$$

egyenlőtlenségből, vagy rendezéssel az $|x| < \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ egyenlőtlenségből adódik. Bevezetve a $k = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ jelölést, a megoldásfüggvény értelmezési tartománya a $(-k, k)$ intervallum. Maga a megoldás a

$$\varphi(x) = -\sqrt{k^2 - x^2}, \qquad |x| < k$$

függvény, az integrálgörbe az $y = -\sqrt{k^2 - x^2}$ egyenletű, origó középpontu, k sugaru (az (x_0, y_0) ponton áthaladó) félkör.

<u>3.3 Példa.</u> Tekintsük az

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (x > 0) \tag{3.3}$$

differenciálegyenletet, ahol $f \in C^0_{(a,b)}$ (az (a,b) intervallumon folytonos egyváltozós függvény) és tegyük fel, hogy $f(u) \neq u$, $u \in (a,b)$. A differenciálegyenlet $u = \frac{y}{x}$ uj ismeretlen függvény bevezetésével szétválasztható változóju differenciálegyenletté alakitható.

Ekkor ugyanis $y' = u'x + u$, vagy $u' = \frac{1}{x}(y' - u)$, és ha y kielégiti (3.3) -at, akkor u kielégiti az

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

differenciálegyenletet (és forditva). Ez utóbbi egyenlet az $f(u) - u \neq 0$ feltétel miatt teljesiti a 3.1 Tétel feltételeit, és (3.2) analógiájára megoldható. Ha u-t meghatároztuk, akkor (3.3) megoldása $y = xu$.

3.4 Példa. Legyen $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ és γ tetszőleges állandó és tekintsük az

$$y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma) \tag{3.4}$$

differenciálegyenletet. Legyen $f \in C^0_{(a,b)}$ és $\alpha + \beta f(u) \neq 0$, $u \in (a,b)$. Az $u = \alpha x + \beta y + \gamma$ uj ismeretlen függvény bevezetésével az $u' = \alpha + \beta f(u)$ szétválasztható változóju differenciálegyenletet nyerjük. Az f függvényre tett feltevések mellett a 3.1 Tétel alkalmazható.

3.5 Példa. Legyenek α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 adott állandók és tekintsük az

$$y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}\right) \tag{3.5}$$

differenciálegyenletet, ahol f folytonos. Két esetet vizsgálunk:

a) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$,

ekkor vagy $\alpha = \lambda\alpha_1$, és $\beta = \lambda\beta_1$, vagy $\alpha_1 = \mu\alpha$ és $\beta_1 = \mu\beta$, ahol λ, illetve μ állandó. Igy

$$f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}\right) = f\left(\frac{\lambda(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + \gamma - \lambda\gamma_1}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}\right) =$$

$$= f\left(\lambda + \frac{\gamma - \lambda\gamma_1}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}\right) = f^*(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) ,$$

illetve

$$f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}\right) = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\mu(\alpha x + \beta y + \gamma) + \gamma_1 - \mu\gamma}\right) =$$

$$= f\left(\frac{1}{\mu + \dfrac{\gamma_1 - \mu\gamma}{\alpha x + \beta y + \gamma}}\right) = f^{**}(\alpha x + \beta y + \gamma) ,$$

azaz a (3.5) differenciálegyenlet (3.4) tipusu.

b) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0$,

ekkor az $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ egyenletrendszernek létezik egyértelmü $x = p$, $y = q$ megoldása. Vezessük be a ξ uj független és az η uj függő változót a következő módon: $x = \xi - p$ és $y = \eta - q$. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

alapján (3.5) a

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\alpha_1\xi + \beta_1\eta}\right) = f^0\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

(3.3) tipusu alakot ölti.

Az

$$y' + g(x)y = h(x) \tag{3.6}$$

differenciálegyenlet <u>elsőrendü (explicit) lineáris differenciálegyenlet.</u> A továbbiakban feltételezzük, hogy $g, h \in C^0_{(a,b)}$. Vizsgáljuk először a homogén egyenletet, azaz a $h(x) \equiv 0$ esetet.

3.2 Tétel. Legyen $g \in C^0_{(a,b)}$, $x_0 \in (a,b)$ és $y_0 \in R$. Ekkor az

$$y' + g(x)y = 0, \tag{3.7}$$

$$y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladatnak létezik egy és csak egy megoldása, mely értelmezve van az (a,b) intervallumon.

Bizonyitás. Legyen először $y_0 > 0$ $(y_0 < 0)$. Ekkor y_0-nak van olyan környezete melyben a (3.7) differenciálegyenlet teljesiti a 3.1 Tétel feltételeit és annak alapján megoldható. A megoldás az $\int_{y_0}^{y} \frac{du}{u} = -\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$ egyenletből

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \text{ azaz}$$

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}, \tag{3.8}$$

mely az egész (a,b) intervallumon értelmezve van és egyértelműen meghatározott. Ha $y_0 > 0$ $(y_0 < 0)$, akkor $y(x) > 0$ $(y(x) < 0)$ minden $x \in (a,b)$-ra. Legyen most $y_0 = 0$. Ekkor $y \equiv 0$, $x \in R$ a kezdetiérték feladat megoldása lesz. A homogén egyenletnek ezt a megoldását triviális megoldásnak nevezzük. Bebizonyitjuk, hogy ez a megoldás egyértelmű. Legyen ugyanis $\tilde{y}(x)$ (3.7) megoldása, azaz

$$\tilde{y}'(x) + g(x)\tilde{y}(x) \equiv 0$$

és $\tilde{y}(x_0) = 0$, de $\tilde{y}(x) \not\equiv 0$. Ekkor van olyan $\tilde{x}$, melyben $\tilde{y}(\tilde{x}) \neq 0$.

Azonban az $y(\tilde{x}) = \tilde{y}(\tilde{x})$ kezdeti feltételt is kielégítő megoldás (3.8) szerint

$$\hat{y}(x) = \tilde{y}(\tilde{x})\, e^{-\int_{\tilde{x}}^{x} g(t)\,dt}, \qquad x \in (a,b),$$

és ez egyértelműen meghatározott. Ezért $\tilde{y}(x) \equiv \hat{y}(x)$, és ez utóbbi függvény sehol sem zérus, ami ellentmondás.!

3.1 Definició. Az (a,b) intervallumon értelmezett $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvényeket az (a,b) intervallumon lineárisan függetleneknek nevezzük, ha

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

minden $x \in (a,b)$ -re csak ugy állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ $(c_i \in R,\ i = 1,2,\ldots,n)$.

3.2 Definició. Az (a,b) intervallumon értelmezett $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvényeket lineárisan összefüggőknek nevezzük az (a,b) intervallumon, ha nem függetlenek, azaz ha van $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós szám n-es, hogy $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| > 0$ és

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \equiv 0 .$$

(V.ö. III. Kötet, 9.1 és 9.2, ill. 16.6 és 16.7 Definició).

3.3 Definició. Legyenek $y_1, y_2, \ldots, y_n$ legalább (n-1) -szer differenciálható függvények az (a,b) intervallumon. Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvényrendszer Wronski-féle determinánsának nevezzük a

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinánst.

3.3 Tétel. Ha $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineárisan összefüggő függvények az (a,b) intervallumon és $y_i \in C^{n-1}_{(a,b)}$ $(i = 1,2,\dots,n)$, akkor $W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$.

Bizonyitás. A 3.2 Definició alapján van $c_1, c_2, \dots, c_n$ valós szám n-es, melyre $|c_1| + \dots + |c_n| > 0$ és $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n \equiv 0$. Vegyük ennek a kifejezésnek az első, ..., $(n-1)$-ik deriváltját, akkor minden $x \in (a,b)$-re

$$
\begin{aligned}
c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) &= 0\,, \\
c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \dots + c_ny_n'(x) &= 0\,, \\
c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(x) &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van a c_i-kben nem triviális megoldása, tehát az egyenletrendszer determinánsa nulla. Ebből következik, hogy $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv 0$. !

Megjegyezzük, hogy ha $W(y_1,\dots,y_n) \equiv 0$ egy (a,b) intervallumon, abból még nem következik $y_1, \dots, y_n$ lineáris összefüggősége. Ugyanis (3.9) nem triviális $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ megoldása x-nek függvénye lehet.

3.4 Tétel. Legyenek y_1 és y_2 a (3.7) differenciálegyenlet megoldásai, akkor $W(y_1, y_2) \equiv 0$ és y_1 és y_2 lineárisan összefüggők az (a,b) intervallumon.

Bizonyitás. Mivel y_1 és y_2 (3.7) megoldásai, ezért az

$$
\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -g(x)y_1(x) & -g(x)y_2(x) \end{vmatrix} = 0
$$

egyenlőség minden $x \in (a,b)$-re fennáll, azaz $W(y_1, y_2) \equiv 0$.

A továbbiakban az általánosság megszoritása nélkül feltételezhetjük, hogy $y_2(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Hiszen, ha $y_2(x) \equiv 0$, akkor az állitás nyilván igaz, ha pedig y_2 nem a triviális megoldás, akkor (3.8) szerint sehol sem lehet zérus. Miután

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv 0,$$

ezért $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' \equiv 0$, ahonnan az integrálszámitás alaptétele (II. Kötet, 17.1 Tétel) felhasználásával következik, hogy $\frac{y_1}{y_2} \equiv c$, vagyis $y_1 \equiv cy_2$ (c állandó).!

<u>3.5 Következmény.</u> Ha $y_h(x)$ (3.7) nem triviális megoldása, akkor (3.7) összes megoldásának halmaza $\{cy_h(x) : c \in R\}$.
Ezt a halmazt, vagy rövidebben a $cy_h(x)$ egyparaméteres függvénysereget nevezzük a homogén differenciálegyenlet <u>általános megoldásának.</u>

<u>Bizonyitás.</u> (3.7)-be való közvetlen behelyettesitéssel látszik, hogy $cy_h(x)$ valóban megoldás. Legyen $y_1(x)$ valamely más megoldás. Ekkor a 3.4 Tétel alapján van c_0, c_1 ($|c_0| + |c_1| > 0$), hogy $c_0 y_h(x) + c_1 y_1(x) = 0$ minden $x \in (a,b)$-re. Mivel $y_h(x)$ nem a triviális megoldás, ezért $c_1 \neq 0$, tehát

$$y_1 \equiv -\frac{c_0}{c_1} y_h = cy_h \,.!$$

A továbbiakban a (3.6) formulával megadott inhomogén lineáris egyenlet megoldásait fogjuk vizsgálni. Feltételezzük, hogy $h(x) \not\equiv 0$.

<u>3.6 Tétel.</u> Ha y_1 és y_2 (3.6) megoldásai, akkor $y_1 - y_2$ a (3.7) homogén differenciálegyenlet megoldása.

<u>Bizonyitás.</u> Mivel az inhomogén egyenletnek y_1 és y_2 megoldásai, fennállnak az alábbi azonosságok:

$$y_1'(x) + g(x) y_1(x) \equiv h(x) \,,$$

$$y_2'(x) + g(x)y_2(x) \equiv h(x) \ .$$

Ezek kivonásából az

$$y_1'(x) - y_2'(x) + g(x)y_1(x) - g(x)y_2(x) \equiv 0 \ ,$$

azaz az

$$(y_1(x) - y_2(x))' + g(x)(y_1(x) - y_2(x)) \equiv 0 \ ,$$

azonosság adódik.!

3.7 Következmény. Ha y_1 a (3.6) inhomogén differenciálegyenlet egy megoldása, y_h a megfelelő (3.7) homogén differenciálegyenlet nem triviális megoldása, akkor (3.6) összes megoldásának halmaza $\{y_1 + cy_h : c \in R\}$. Ezt a halmazt, vagy rövidebben az $y_1 + cy_h$ egyparaméteres függvénysereget hivjuk az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának.

Bizonyitás. Legyen y_2 (3.6) tetszőleges megoldása. Ekkor a 3.6 Tétel alapján $y_2 - y_1$ (3.7) megoldása, azaz a 3.5 Következmény alapján van c, hogy $y_2 - y_1 = cy_h$.!

A 3.6 Tétel és a 3.7 Következmény nem mond semmit arról, hogy vajon létezik-e (3.6) -nak megoldása. Erre a kérdésre ad választ a következő

3.8 Tétel. Minden $x_0 \in (a,b)$ és $y_0 \in R$-re a (3.6) differenciálegyenletnek létezik egy és csak egy megoldása, mely eleget tesz az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek. A megoldásfüggvény értelmezési tartománya az (a,b) intervallum.

Bizonyitás. A megoldást az "állandók variálásának módszerével" állitjuk elő. (3.8) szerint a (3.7) homogén egyenlet egy nem triviális megoldása

$$y_h(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}$$

. Ekkor tetszőleges c állandóra cy_h is megoldása

(3.7) -nek. Először megmutatjuk, hogy van $c(x)$, $x \in (a,b)$ differenciálható függvény, melyre $y(x) = c(x) y_h(x)$ (3.6) -nak a kezdeti feltételt kielégitő megoldása. Ahhoz, hogy $y(x) = c(x) y_h(x)$ kielégitse a kezdeti feltételt, fenn kell állni a $c(x_0) = y_0$ egyenlőségnek. Az $y(x)$ függvényt behelyettesitve (3.6) -ba, ahhoz, hogy megoldás legyen, teljesülnie kell a következő azonosságnak:

$$c'(x) y_h(x) + c(x) y_h'(x) + g(x) c(x) y_h(x) \equiv h(x) .$$

Mivel y_h (3.7) megoldása, ezért innen $c'(x) \equiv \dfrac{h(x)}{y_h(x)}$ következik. Integráljuk az utóbbi azonosságot az x_0 és x határok között:

$$\int_{x_0}^{x} c'(t)\,dt \equiv \int_{x_0}^{x} \frac{h(t)}{y_h(t)}\,dt ,$$

vagyis

$$c(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{h(t)}{y_h(t)}\,dt .$$

Közvetlen behelyettesitéssel meggyőződhetünk arról, hogy

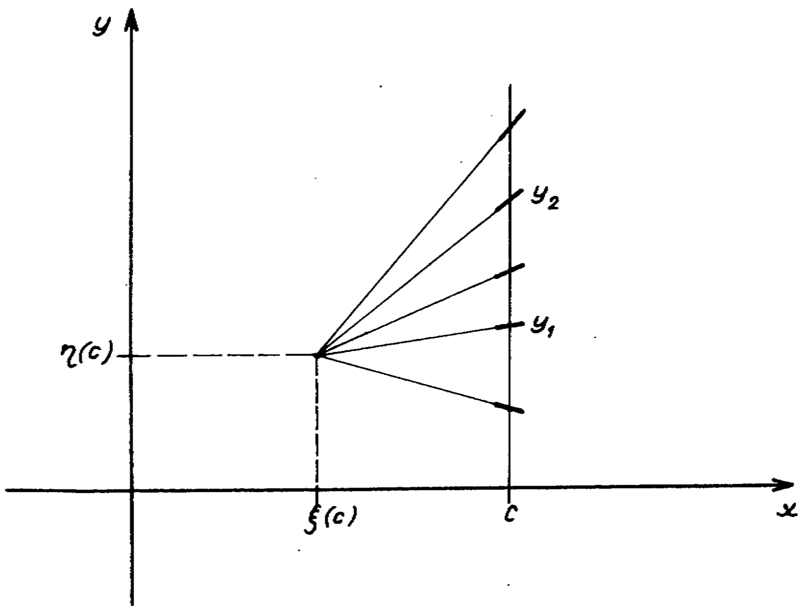
$$y(x) = y_h(x) \left(y_o + \int_{x_0}^{x} \frac{h(t)}{y_h(t)}\,dt \right) ,$$

vagyis

$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(u)\, e^{\int_{x_0}^{u} g(t)\,dt}\, du \right) e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt} , \quad x \in (a,b) \tag{3.10}$$

valóban a keresett megoldás. Most még az egyértelműséget kell bizonyitani. Tegyük fel, hogy φ és ψ (3.6) két különböző megoldása, és $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$. Ekkor a 3.6 Tétel szerint $\varphi - \psi$ megoldása (3.7) -nek az $y(x_0) = \varphi(x_0) - \psi(x_0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Azonban a 3.2 Tétel szerint ilyen megoldás csak a triviális megoldás, ezért $\varphi(x) - \psi(x) \equiv 0.$!

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet iránymezője geometriailag elég egyszerűen szemléltethető. Ha az $x = c$ (függőleges) egyenes pontjaihoz tartozó vonalelemeket meghosszabbitjuk, akkor az igy nyert egyenesek egyetlen pontban metszik egymást. A pont koordinátái, ha $g(c) \neq 0$, csak c-nek lesznek függvényei.



3.1 ábra

Ugyanis, ha felirjuk, egy ilyen $x = c$ egyenesen levő két (c, y_1), (c, y_2) ponton áthaladó egyenes egyenletét, a metszéspont (ξ, η) koordinátái eleget tesznek az

$$\eta - y_1 = (-g(c)y_1 + h(c))(\xi - c),$$

$$\eta - y_2 = (-g(c)y_2 + h(c))(\xi - c)$$

egyenletnek.

Azaz

$$\xi(c) = c + \frac{1}{g(c)}, \qquad (g(c) \neq 0)$$

$$\eta(c) = \frac{h(c)}{g(c)} .$$

A ($\xi(c)$, $\eta(c)$) pontot az iránymező $x = c$ egyeneséhez tartozó sugárpontjának nevezzük. Ha tehát egy függőleges egyenes sugárpontját megszerkesztettük, az egyenes tetszőleges pontjához tartozó vonalelemet az e pontot a sugárponttal összekötő egyenes jelöli ki (lásd 3.1 ábra).

3.6 Példa. Adott egy áramkör R ohmikus ellenállással és L önindukciós együtthatóju tekerccsel. A körbe U_0 egyenfeszültséget kapcsolunk. A bekapcsolás hatására a tekercsben az áramerősség időegység alatti megváltozásával arányos (az arányossági tényező L) U_0 -lal ellentétes irányu feszültség indukálódik. Ennek figyelembevételével, az áramerősséget, mint az idő függvényét I(t) -vel jelölve Ohm törvénye a következőképpen irható fel:

$$U_0 - L\frac{dI}{dt} = RI .$$

Ezek szerint az áramerősség kielégiti a

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$$

elsőrendü lineáris differenciálegyenletet. A kezdeti feltétel legyen $I(0) = 0$. A kezdetiérték feladat megoldását a megfelelő homogén egyenlet megoldásával kezdjük.

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 ,$$

$$\int \frac{dI}{I} = - \int \frac{R}{L} dt ,$$

$$\ln I = - \frac{R}{L} t + c ,$$

tehát

$$I = c_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Az inhomogén egyenlet megoldását

$$I = c_1(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

alakban keressük.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dc_1(t)}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} c_1(t) e^{-\frac{R}{L}t} ,$$

ezért az inhomogén egyenletbe helyettesitve a következő feltételt nyerjük:

$$\frac{dc_1(t)}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} - c_1(t) \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L} c_1(t) e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= \frac{U_0}{L} ,$$

$$\frac{dc_1}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{L} ,$$

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} ,$$

azaz

$$c_1 = \frac{U_0}{L}\,\frac{L}{R}\,e^{\frac{R}{L}t} + K,$$

ahol K állandó. Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$I = \left(\frac{U_0}{R}\,e^{\frac{R}{L}t} + K\right)e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} + K\,e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Mivel $I(0) = 0$, ezért $0 = \frac{U_0}{R} + K$, vagyis $K = -\frac{U_0}{R}$. Tehát a kezdeti feltételt is kielégitő megoldás:

$$I = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

3.7 Példa. Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$y' + g(x)y = h(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0,\quad \alpha \neq 1,\quad \alpha \in R) \tag{3.11}$$

differenciálegyenletet, ahol $g,\, h \in C^0_{(a,b)}$, $y > 0$. A (3.11) differenciálegyenlet uj ismeretlen függvény bevezetésével lineáris differenciálegyenletté alakitható. Osszuk el a (3.11) egyenletet y^{α} -val:

$$y^{-\alpha}\,y' + g(x)y^{1-\alpha} = h(x).$$

Ha $u = y^{1-\alpha}$, akkor $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\,y'$. Eszerint, ha y kielégíti az előbbi differenciálegyenletet, akkor u kielégíti a behelyettesitéssel nyert

$$\frac{1}{1-\alpha}\,u' + g(x)u = h(x)$$

lineáris differenciálegyenletet, és forditva.

Ha ez utóbbi megoldása u, akkor (3.11) megfelelő megoldása $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

4. Az egzakt differenciálegyenlet. A multiplikátor-módszer

Elsőrendű differenciálegyenletet időnként célszerű a következő alakban megadni

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0, \tag{4.1}$$

ahol általában feltételezzük, hogy $g, h \in C^0_U$, $U \subset R^2$ nyilt és egyszeresen összefüggő tartomány. (4.1) -et ugy kell érteni, hogy annak bal oldalán egy négyváltozós függvény áll:

$$D(x,y\,;\ dx,dy) = g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy\ ,$$

mely a dx, dy változókban (homogén) lineáris; az x, y, dx, dy változók nem függetlenek, hanem (amint ezt a jelölés sugalmazza) dx az x, dy pedig az y változó differenciálja.

Legyen I_x, ill. I_y valamilyen intervallum. Az I_x intervallumon differenciálható φ függvényt, ill. az I_y intervallumon differenciálható ψ függvényt (4.1) megoldásának nevezzük, ha minden $x \in I_x$ -re $(x, \varphi(x)) \in U$, ill. minden $y \in I_y$ -ra $(y, \psi(y)) \in U$ és ha y helyébe $\varphi(x)$ -et, dy helyébe e függvény differenciálját $d\varphi(x\,;\ dx)$ -et irva, ill. x helyébe $\psi(y)$ -t, dx helyébe $d\psi(y\,;\ dy)$ -t irva (4.1) azonossággá válik az I_x, ill. az I_y intervallumon, vagyis ha

$$g(x, \varphi(x))\,dx + h(x, \varphi(x))\,d\varphi(x; dx) \equiv 0, \quad x \in I_x, \quad dx \in R, \tag{4.2}$$

ill.

$$g(\psi(y), y)\,d\psi(y; dy) + h(\psi(y), y)\,dy \equiv 0, \quad y \in I_y, \quad dy \in R. \tag{4.3}$$

Mivel $d\varphi(x; dx) = \varphi'(x)\,dx$, ill. $d\psi(y\,;\ dy) = \psi'(y)dy$, ezért (4.2), ill. (4.3) még a következőképpen is irható:

$$\left[g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x))\,\varphi'(x)\right] dx \equiv 0, \qquad x \in I_x, \qquad dx \in R,$$

ill.

$$[g(\psi(y),y)\psi'(y)+h(\psi(y),y)]dy \equiv 0, \qquad y\in I_y,\ dy\in R.$$

Az utóbbi azonosságok azonban nyilván ekvivalensek a következőkkel (dx -szel, ill. dy -nal osztunk)

$$g(x,\varphi(x))+h(x,\varphi(x))\varphi'(x)\equiv 0, \qquad x\in I_x,$$

ill.

$$g(\psi(y),y)\psi'(y)+h(\psi(y),y)\equiv 0, \qquad y\in I_y.$$

Ezek szerint a $\varphi(x)$, ill. a $\psi(y)$ függvény akkor és csak akkor megoldása (4.1) -nek, ha kielégíti a

$$g(x,y)+h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{4.4}$$

illetve a

$$g(x,y)\frac{dx}{dy}+h(x,y) = 0 \tag{4.5}$$

implicit differenciálegyenletet.

Legyen U_g, ill. U_h az U tartomány olyan nyilt és összefüggő részhalmaza, melyen g, ill. h nem zérus, vagyis

$$g(x,y) \neq 0, \qquad (x,y)\in U_g\subset U,$$

ill.

$$h(x,y) \neq 0, \qquad (x,y)\in U_h\subset U.$$

Az U_h, ill. az U_g tartományon (4.4), ill. (4.5) a következő explicit differenciálegyenlettel ekvivalens

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}, \qquad (x,y)\in U_h, \tag{4.6}$$

ill.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h(x,y)}{g(x,y)}\ , \qquad (x,y) \in U_g\ . \tag{4.7}$$

Ezek szerint az U_h, ill. az U_g tartományon (4.1) a (4.6), ill. a (4.7) explicit differenciálegyenlettel ekvivalens. Az $U_h \cap U_g$ tartományon (ahol sem h, sem g nem zérus), (4.1) mindkét utóbbi differenciálegyenlettel ekvivalens.

Az $U_h \cap U_g$ tartományon a (4.6) és (4.7) explicit differenciálegyenleteket ekvivalenseknek nevezzük, ugyanis igaz az, hogy ha a φ függvény (4.6) megoldása, akkor inverze φ^{-1} a (4.7) differenciálegyenlet megoldása és forditva. Ezt a következőképpen látjuk be: mivel

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))}$$

és g nem zérus $\varphi'(x) \neq 0$, φ szigoruan monoton függvény, létezik differenciálható inverz függvény φ^{-1} és az inverz függvény differenciálási szabályát alkalmazva az $y = \varphi(x)$ helyen

$$\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\varphi'(x)} = -\frac{h(x,\varphi(x))}{g(x,\varphi(x))} = -\frac{h(\varphi^{-1}(y),y)}{g(\varphi^{-1}(y),y)}$$

Mivel az x, y Descartes-féle derékszögü koordináta-rendszerben az $y = \varphi(x)$ egyenletü görbe nyilván ugyanaz, mint az $x = \varphi^{-1}(y)$ egyenletü görbe az is igaz, hogy az $U_h \cap U_g$ tartományon (4.6) és (4.7) integrálgörbéi megegyeznek.

Lehetséges, hogy (4.6) és (4.7) egy közös integrálgörbéje γ, melyre $\gamma \subset U_h \cap U_g$, része a (4.6) differenciálegyenlet egy $\gamma_h \subset U_h$ integrálgörbéjének és a (4.7) differenciálegyenlet egy $\gamma_g \subset U_g$ integrálgörbéjének. Ilyenkor a $\gamma_h \cup \gamma_g$ görbét <u>geometriai értelemben</u> (4.1) <u>integrálgörbéjének nevezzük,</u> (a "geometriai értelemben" megkülönböztetés azt jelzi, hogy általában $\gamma_h \cup \gamma_g$ nem egyetlen megoldásfüggvény grafikonja).

Ha az (x_0, y_0) pontban h is és g is zérus, vagyis, ha

$$h(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0,$$

akkor az (x_0, y_0) pontot (4.1) szinguláris megoldásának (pontmegoldásának, vagy egyensulyi helyzetének) nevezzük, mivel minden $dx \in R$, $dy \in R$ -re

$$g(x_0, y_0)dx + h(x_0, y_0)dy \equiv 0 .$$

4.1 Példa. Legyen $a > 0$ és $b > 0$ adott és tekintsük a

$$b^2 x\, dx + a^2 y\, dy = 0 \tag{4.8}$$

differenciálegyenletet. Itt $g(x, y) = b^2 x$, $h(x, y) = a^2 y$.
Az $U_h = \{(x, y) : y > 0\}$ tartományon (4.8) ekvivalens a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \tag{4.9}$$

differenciálegyenlettel. Az $U_g = \{(x, y) : x > 0\}$ tartományon (4.8) a

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x} \tag{4.10}$$

differenciálegyenlettel ekvivalens.

(4.8) (és (4.9)) egy megoldása például a
$\varphi(x) = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ függvény, u.i.

$$b^2 x\, dx + a^2 \varphi(x)\, d\varphi(x; dx) =$$

$$= b^2 x\, dx + a^2 b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{-bx}{a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\, dx \equiv 0, \qquad x \in (-a, a) .$$

(4.8) (és (4.10)) egy megoldása például a

$\psi(y) = a(1 - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}} > 0$ függvény u.i.

$$b^2\psi(y)\,d\psi(y\,;\,dy) + a^2 y\,dy =$$

$$= b^2 a(1 - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}} \frac{-ay}{b^2(1 - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}}\,dy + a^2 y\,dy \equiv 0\,, \qquad y \in (-b,b)\,.$$

Az $U_h \cap U_g = \{(x,y) : x>0,\ y>0\}$ tartományon

$y = b(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$, $0 < x < a$, ill.

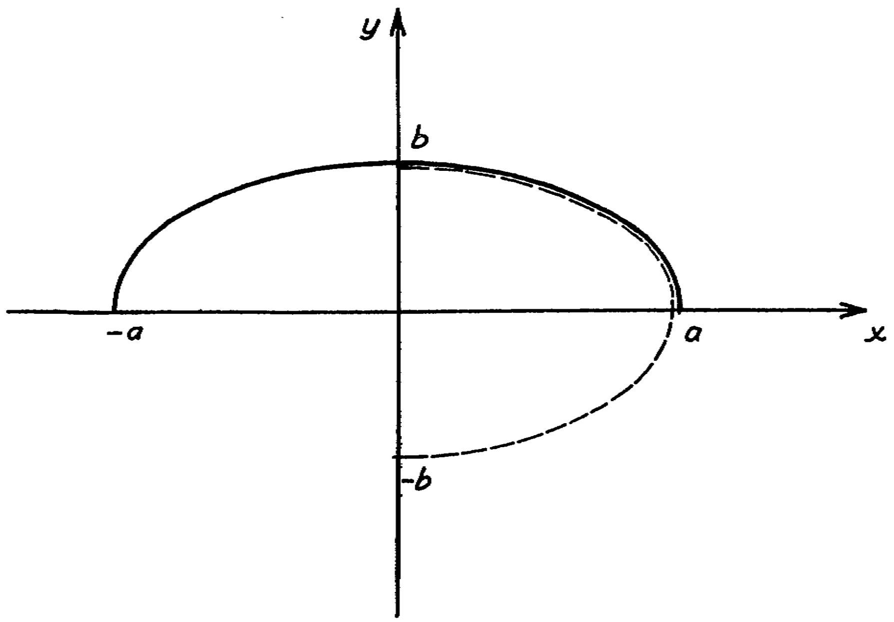
$x = a(1 - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}$, $0 < y < b$ ugyanazon negyedellipszisnek az egyenlete. A 4.1 ábrán az $y = \varphi(x)$, $x \in (-a,a)$ integrálgörbét a folytonos vonallal huzott félellipszis, az $x = \psi(y)$, $y \in (-b,b)$ integrálgörbét a szaggatott vonallal huzott félellipszis ábrázolja).

A fentiekkel teljesen analóg vizsgálat végezhető el az $U_h^* = \{(x,y) : y < 0\}$ "alsó", ill. az $U_g^* = \{(x,y) : x < 0\}$ "baloldali" félsikon. Ha megfelelő megoldást választunk az U_h^*, ill. az U_g^* tartományon is, az integrálgörbék egyesitése az $U_h \cup U_g \cup U_h^* \cup U_g^* = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű ellipszis, mely (4.8) integrálgörbéjének tekinthető.

Az origó (0,0) a (4.8) differenciálegyenlet szinguláris megoldása.



4.1 ábra

__4.1 Definició.__ Legyenek $g, h \in C_U^0$ és $U \subset R^2$ nyilt tartomány. A

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \qquad (4.11)$$

differenciálegyenletet __egzaktnak__ nevezzük, ha van olyan $F \in C_U^1$ függvény, hogy F differenciálja

$$dF \equiv g(x,y)dx + h(x,y)dy,$$

azaz

$$F'_x(x,y) \equiv g(x,y), \quad F'_y(x,y) \equiv h(x,y), \quad (x,y) \in U.$$

__4.1 Tétel.__ A (4.11) egzakt differenciálegyenletnek az I_x intervallumon differenciálható φ, ill. az I_y intervallumon differenciálható ψ függvény akkor és csak akkor megoldása, ha

$$F(x, \varphi(x)) \equiv c, \quad x \in I_x, \quad \text{ill.} \quad F(\psi(y), y) \equiv c, \quad y \in I_y,$$

ahol c az F függvény értékkészletéből vett tetszőleges valós szám.

Bizonyitás. Legyen φ, ill. ψ (4.11) megoldása. Ekkor fennáll a

$$[g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x))\varphi'(x)]dx \equiv 0,$$

ill. a

$$[g(\psi(y), y)\psi'(y) + h(\psi(y), y)]\, dy \equiv 0$$

azonosság minden $(x, \varphi(x)) \in U$, ill. $(\psi(y), y) \in U$ és dx, ill. dy tetszőleges valós esetén. Felhasználva azt, hogy $F'_x(x,y) = g(x,y)$ és $F'_y(x,y) = h(x,y)$, $(x,y) \in U$, a fentiekből a

$$\frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial y} \frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv 0,$$

ill. a

$$\frac{\partial F(\psi(y), y))}{\partial x} \frac{d\psi(y)}{dy} + \frac{\partial F(\psi(y), y)}{\partial y} \equiv 0$$

azonosság fennállása következik. Ez viszont a

$$\frac{dF(x, \varphi(x))}{dx} \equiv 0,$$

tehát az

$$F(x, \varphi(x)) \equiv c, \tag{4.12}$$

ill. a

$$\frac{dF(\psi(y), y)}{dy} \equiv 0,$$

tehát az

$$F(\psi(y), y) \equiv c \qquad (4.13)$$

azonosságok teljesülését jelenti.

Megforditva, ha a (4.12), ill. a (4.13) azonosság érvényes valamely φ, ill. ψ függvényre, akkor (4.12)-t, ill. (4.13)-at differenciálva és a helyettesitéseket forditott sorrendben elvégezve azt kapjuk, hogy φ, ill. ψ kielégiti (4.11) -et.!

A (4.11) egzakt differenciálegyenlet geometriai értelemben vett integrálgörbéje az $F(x,y) = c$ egyenletű görbe. Ha $F(x_0, y_0) = c$ és $F'_y(x_0, y_0) \equiv h(x_0, y_0) \neq 0$, $(x_0, y_0) \in U$, akkor az $F(x,y) = c$ egyenlet az x_0 pont egy K_{x_0} környezetében egy $\varphi : K_{x_0} \longmapsto R$ differenciálható, implicit függvényt definiál, mely megoldása (4.11) -nek és melyre $\varphi(x_0) = y_0$. Ha $F(x_1, y_1) = c$ és $F'_x(x_1, y_1) = g(x_1, y_1) \neq 0$, $(x_1, y_1) \in U$, akkor az $F(x,y) = c$ egyenlet az y_1 pont egy K_{y_1} környezetében egy $\psi : K_{y_1} \longmapsto R$ differenciálható, implicit függvényt definiál, mely megoldása (4.11)-nek és melyre $\psi(y_1) = x_1$. Lásd V. Kötet, 11.3 Tétel.

<u>4.2 Példa.</u> A (4.8) differenciálegyenlet egzakt, ugyanis ha $F(x,y) = b^2 \frac{x^2}{2} + a^2 \frac{y^2}{2}$, akkor az F függvény differenciálja

$$dF = b^2 x dx + a^2 y dy \, .$$

Igy (4.8) integrálgörbéje az

$$F(x,y) = b^2 \frac{x^2}{2} + a^2 \frac{y^2}{2} = c$$

egyenletü ellipszissereg, ahol $c > 0$ tetszőleges.

<u>4.3 Példa.</u> Ha $\underline{p} = g(x,y)\underline{i} + h(x,y)\underline{j}$ egy sikbeli erőteret leiró vektormező, $d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j}$ az "elemi" elmozdulásvektor, akkor a

$$\underline{p} \cdot d\underline{r} = g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$$

feltétel azt fejezi ki, hogy az erőtér hatása alatt végbemenő elmozdulás az erőtérre merőleges és igy ennek során sem az erőtér nem végez munkát, sem az erőtér enében nem történik munkavégzés. Ha a fenti differenciálegyenlet egzak kor ez azt jelenti, hogy a $\underline{p}$ vektor-vektor függvény potenciálos, $\underline{p} = \text{grad } F$, ahol F az a folytonosan differenciálható függvény, melyre $F'_x = g$, $F'_y = h$. A differenciálegyenlet integrálgörbéi az F potenciálfüggvény $F(x, y) = c$ egyenletü szintvonalai (c állandó). Éppen ezen görbék normálvektora $\underline{p}$ és e görbék mentén zérus a munkavégzés, hiszen szintvonalon történő elmozdulás során a potenciál értéke ("a potenciális energia") nem változik.

4.2 Tétel. Legyen $g, h \in C^1_U$, $U \subset R^2$ egyszeresen összefüggő nyilt tartomány. A

$$g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy = 0 \tag{4.14}$$

differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial g}{\partial y} \equiv \frac{\partial h}{\partial x}, \qquad (x, y) \in U.$$

Bizonyitás. Tekintsük a $\underline{v}(\underline{r}) = g(x,y)\underline{i} + h(x,y)\underline{j}$ sikbeli vektormezőt, $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$. (4.14) egzaktsága azt jelenti, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnek van potenciálja, tehát van $F(\underline{r})$ skalár-vektor függvény, melyre $\text{grad } F(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$. A potenciálfüggvény létezésének szükséges és elégséges feltétele (egyszeresen összefüggő nyilt tartományon folytonosan deriválható $\underline{v}(\underline{r})$ esetén), hogy a vektortér rotációmentes legyen, azaz $\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \equiv 0$ legyen, $(x, y) \in U$ (Lásd VI. Kötet, 15.5 Tétel). !

4.4 Példa. Tekintsük a (3.1) differenciálegyenletet az $f \in C^1_{(a,b)}$, $g \in C^1_{(c,d)}$, $g(y) \neq 0$, $y \in (c, d)$ feltevések mellett. (3.1) az

$$f(x)\,dx - \frac{1}{g(y)}\,dy = 0$$

ekvivalens alakba irható.

Ez a differenciálegyenlet egzakt, ugyanis teljesiti a 4.2 Tétel feltételeit

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} \equiv \frac{\partial\left(-\frac{1}{g(y)}\right)}{\partial x} \quad (\equiv 0) \,,$$

$$x \in (a,b),\ y \in (c,d) \,.$$

Meghatározható az az F kétváltozós függvény, melyre $dF = f(x)\,dx - \frac{1}{g(y)}\,dy$. Miután F x szerinti parciális deriváltja csak x-től, y szerinti parciális deriváltja csak y-tól függ, F nem lehet más, mint egy csak x-től függő és egy csak y-tól függő függvény összege. Az x-től függő függvény f bármely primitiv függvénye, az y-tól függő függvény $-\frac{1}{g}$ bármely primitiv függvénye lehet. Ezek szerint

$$F(x,y) = \int f(x)\,dx - \int \frac{dy}{g(y)} \,.$$

Mivel $F'_y(x,y) = -\frac{1}{g(y)} \neq 0$, ezért az $F(x,y) = c$ egyenlet rögzitett c és rögzitett primitiv függvények mellett egy φ megoldást definiál. Ha azt kivánjuk, hogy φ teljesitse a $\varphi(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt is, akkor például az

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)}$$

választással $c = 0$ -t kell helyettesitenünk és φ -t az

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)} = 0$$

egyenlet definiálja.

Mint a fenti példákban is láttuk, ha egy differenciálegyenlet egzakt, akkor a megoldása ugy történik, hogy meghatározzuk azt az F kétváltozós függvényt, melynek differenciálja a (4.11) egyenlet bal oldala, és az

$F(x,y) = c$ egyenlet által definiált implicit függvény lesz a megoldásfüggvény. Az F függvény meghatározása azonos (síkbeli) vektormező potenciálkeresésének feladatával (v.ö. VI. Kötet, 15.2, 15.3 Példa).

A (4.1) differenciálegyenlet általában nem egzakt. Felmerül a kérdés, hogy ekvivalens átalakításokkal nem tehető-e egzakttá.

<u>4.2 Definició.</u> Legyen $M \in C_U^0$, $U \subset R^2$ nyilt tartomány és $M(x,y) \neq 0$, ha $(x,y) \in U$. Az M függvényt (4.1) <u>integráló tényezőjének</u> (multiplikátorának) nevezzük, ha az

$$M(x,y)\,g(x,y)\,dx + M(x,y)\,h(x,y)\,dy = 0 \qquad (4.15)$$

differenciálegyenlet már egzakt. A (4.1) egzakttá alakítására szolgáló eljárást (M megkeresésével) <u>multiplikátor módszernek</u> nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy (4.15) ekvivalens (4.1)-gyel. Ugyanis, ha (4.1) $\varphi: I_x \mapsto R$, ill. $\psi: I_y \mapsto R$ megoldásait (4.15)-be helyettesitjük, azonosságot kapunk. Forditva, ha (4.15) megoldásait (4.1)-be helyettesitjük, szintén azonosságra jutunk, mivel (4.15) $M \neq 0$ miatt csak akkor teljesülhet, ha (4.1) teljesül.

<u>4.4 Tétel.</u> Legyen $g, h, M \in C_U^1$, $U \subset R^2$ nyilt és egyszeresen összefüggő tartomány. M akkor és csak akkor integráló tényezője (4.1)-nek, ha kielégíti a

$$\frac{\partial M}{\partial y}\,g(x,y) + M\,\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}\,h(x,y) + M\,\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} \qquad (4.16)$$

parciális differenciálegyenletet.

<u>Bizonyitás.</u> A 4.2 Tétel alapján (4.15) akkor és csak akkor egzakt, ha fennáll a

$$\frac{\partial\,(M(x,y)\,g(x,y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial\,(M(x,y)\,h(x,y))}{\partial x}$$

azonosság. Felhasználva a szorzat differenciálási szabályát, ez pontosan azt jelenti, hogy M kielégíti a kívánt parciális differenciálegyenletet. !

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy találhatunk olyan M multiplikátort, mely vagy csak az x, vagy csak az y változónak függvénye. Tegyük fel, hogy az M multiplikátor csak x-nek függvénye. Ekkor M(x)-nek ki kell elégitenie (4.16)-ot, azaz mivel $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0$, ezért az

$$M \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = M' h(x,y) + M \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$

közönséges differenciálegyenletet. Mivel ebből

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right) \frac{1}{h(x,y)} ,$$

az M(x) függvény csak akkor elégitheti ki ezt a differenciálegyenletet, ha e differenciálegyenlet jobb oldala is csak x-től függ.

Hasonlóképpen ahhoz, hogy csak y-tól függő M multiplikátor létezzék, M-nek ki kell elégitenie a (4.16)-ból nyert $\left(\frac{\partial M}{\partial x} \equiv 0\right)$

$$M' g(x,y) + M \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \equiv M \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$

differenciálegyenletet, azaz az

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right) \frac{1}{g(x,y)}$$

differenciálegyenletet. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha ennek a differenciálegyenletnek a jobb oldala csak y-nak függvénye.

4.5 Példa. A (3.6) elsőrendü lineáris inhomogén differenciálegyenlet ekvivalens a

$$(g(x)y - h(x))dx + dy = 0$$

differenciálegyenlettel. Ha feltételezzük, hogy $g(x) \not\equiv 0$, továbbá $g, h \in C^1_{(a,b)}$, akkor a (4.2) Tétel alapján adódik, hogy a differenciálegyenlet nem egzakt. Ugyanis

$$\frac{\partial (g(x)y - h(x))}{\partial y} = g(x) \not\equiv \frac{\partial 1}{\partial x} = 0, \qquad x \in (a,b) \ .$$

A 4.4 Tétel alapján kereshetünk M integráló tényezőt a

$$\frac{\partial M}{\partial y}(g(x)y - h(x)) + Mg(x) = \frac{\partial M}{\partial x}$$

parciális differenciálegyenlet megoldásai között. Válasszuk M-et ugy, hogy $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0$ legyen, akkor M egyváltozós függvény, és a

$$\frac{dM}{dx} = g(x)M$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása $M(x) = e^{\int g(x)dx}$ (ahol a kitevőben g tetszőleges primitiv függvénye áll, v.ö. (3.7) és (3.8)). Mivel $M(x) \neq 0$, ezért M integráló tényező. Valóban az

$$e^{\int g(x)dx}(g(x)y - h(x))\,dx + e^{\int g(x)dx}\,dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt. Meg kell határozni azt a kétváltozós függvényt, melyre

$$F'_x(x,y) = e^{\int g(x)dx}(g(x)y - h(x)) \ ,$$

$$F'_y(x,y) = e^{\int g(x)dx} \ .$$

A második feltételből

$$F(x,y) = y\,e^{\int g(x)dx} + \Phi(x) \ ,$$

ahol Φ tetszőleges folytonosan differenciálható függvény.

Az első feltételbe való behelyettesitésből következik, hogy

$$yg(x)e^{\int g(x)dx} + \phi'(x) = e^{\int g(x)dx}(g(x)y - h(x)) ,$$

vagyis

$$\phi'(x) = -h(x)e^{\int g(x)dx}$$

és

$$\phi(x) = - \int h(x)e^{\int g(x)dx} dx .$$

A differenciálegyenlet megoldásai tehát az

$$y e^{\int g(x)dx} - \int h(x)e^{\int g(x)dx} dx = c, \qquad c \in R ,$$

egyenlet által meghatározott függvények, ahonnan

$$y(x) = e^{-\int g(x)dx}\left(c + \int h(x)e^{\int g(x)dx} dx\right) , \quad c \in R,$$

(v.ö. (3.10)).

<u>4.6 Példa.</u> A termodinamika első főtétele szerint valamely adott rendszerrel, pl. adott mennyiségű ideális gázzal közölt dQ hőmennyiség egyenlő a rendszer belső energiája dU megváltozásának és a rendszer által végzett dL munkának a különbségével:

$$dQ = dU - dL .$$

Ha a külső nyomás p és a gáz térfogata v, akkor a rendszer által végzett munka dL = -p dv, ahol dv a térfogat megváltozása. Jelöljük T-vel a rendszer (abszolut) hőmérsékletét; az U belső energia és a p nyomás a T és v (független) változók függvényei.

Kis változásoknál tehát

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial T}\, dT + \frac{\partial U}{\partial v}\, dv + p\, dv =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial T}\, dT + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)\, dv\,.$$

Ugynevezett "adiabatikus folyamatoknál", melyeknél a környezet és a rendszer között nincs hőcsere, $dQ = 0$. Ezeket az állapotváltozásokat tehát a

$$\frac{\partial U}{\partial T}\, dT + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right) dv = 0 \qquad (4.17)$$

differenciálegyenlet irja le. Ez a differenciálegyenlet nem egzakt, amint ez könnyen belátható. Azonban un. "reverzibilis folyamatoknál", melyek során az állapotváltozás termodinamikai egyensulyi állapotokon keresztül, lassan megy végbe, a termodinamika második főtétele szerint $\frac{dQ}{T}$ mindig "teljes differenciál" éspedig az S "entrópia" differenciálja. Ezek szerint

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\,\frac{\partial U}{\partial T}\, dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right) dv\,,$$

vagyis adiabatikus, reverzibilis folyamatoknál a (4.17) differenciálegyenlet integráló tényezője $\frac{1}{T}$ és integrálgörbéi az entropia szintvonalai (adiabatikus reverzibilis folyamatnál az entrópia nem változik).

5. Differenciálegyenletek közelítő megoldása

A 2.1 Tétel a differenciálegyenlet jobb oldalára tett igen általános feltételek mellett biztositja az

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (5.1)$$

kezdetiérték feladat megoldásának létezését és egyértelmüségét. E tétel azonban nem ad utmutatást a megoldás meghatározására. Általános megoldási módszer nem is létezik, és az esetek nagyobb részében a megoldás nem is állitható elő végesszámu lépésben, integrálok segitségével ("kvadraturával"). Ezért nagy jelentőségűek az un. "közelitő megoldási módszerek". Ebben a pontban két közelitő megoldási módszerrel, a "hatványsor módszerrel" és a "véges differenciák módszerével" foglalkozunk. Azonban mindkettőnek csak egyszerű speciális eseteit tárgyaljuk. Egy további közelitő eljárásról a "szukcesszív approximációról" a 6. pontban lesz röviden szó.

A hatványsor módszer azon alapszik, hogy bizonyos feltételek mellett az (5.1) kezdetiérték feladatnak van egy és csak egy analitikus megoldása (lásd IV. Kötet, 7.2 Definició). A módszert egy rendkivül leegyszerüsitett esetben, homogén lineáris differenciálegyenlet esetében mutatjuk be.

5.1 Tétel. Ha az

$$y' = g(x)y, \qquad y(\alpha) = \beta \tag{5.2}$$

kezdetiérték feladatban a $g(x)$ együttható függvény az $(\alpha - r, \alpha + r)$ intervallumban (r pozitiv szám) analitikus, vagyis

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-\alpha)^k, \qquad |x-\alpha| < r,$$

akkor (5.1)-nek van egy és csak egy $(\alpha - r, \alpha + r)$-ben analitikus

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (x-\alpha)^k, \qquad |x-\alpha| < r \tag{5.3}$$

megoldása.

Bizonyitás. Először az egyértelmüséget bizonyitjuk. Tételezzük fel, hogy az (5.3) konvergens hatványsor összege (5.2) megoldása. Megmutatjuk, hogy ekkor a φ_k együtthatók egyértelmüen meg vannak határozva. Ugyanis a kezdeti feltételből

$$\varphi_0 = \varphi(\alpha) = \beta .$$

A differenciálegyenletből

$$\varphi'(x) \equiv g(x)\,\varphi(x) , \tag{5.4}$$

vagyis

$$\varphi_1 = \varphi'(\alpha) = g(\alpha)\,\varphi(\alpha) = g_0\,\varphi_0 .$$

(5.4) -et differenciálva

$$\varphi'(x) \equiv g'(x)\,\varphi(x) + g(x)\,\varphi'(x) ,$$

vagyis

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\,\varphi''(\alpha) = \frac{1}{2}\left[g'(\alpha)\,\varphi(\alpha) + g(\alpha)\varphi'(\alpha)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[g_1\,\varphi_0 + g_0\varphi_1\right] ,$$

és igy tovább a Leibniz-formula (II. Kötet, 14.1 Tétel) felhasználásával

$$\varphi^{(k)}(x) = \left[\varphi'(x)\right]^{(k-1)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} g^{(i)}(x)\,\varphi^{(k-i-1)}(x)$$

vagyis

$$\varphi_k = \frac{1}{k!}\,\varphi^{(k)}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} g^{(i)}(\alpha)\,\varphi^{(k-i-1)}(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} i!\; g_i\,(k-i-1)\,!\;\varphi_{k-i-1} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g_i\,\varphi_{k-i-1} , \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.5}$$

Mivel tehát $\varphi_0 = \beta$ és $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ egyértelmüen meghatározza φ_k-t ($k = 1, 2, \ldots$), ha (5.3) megoldás, akkor egyértelmüen meg van határozva.

Most bebizonyitjuk, hogy ha $\varphi_0 = \beta$ -ból kiindulva (5.5) alapján rendre meghatározzuk a φ_k $(k = 1, 2, \dots)$ együtthatókat, az ezekkel az együtthatókkal felirt (5.3) sor minden $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ -re konvergens. Ezt ugy látjuk be, hogy keresünk egy a $g(x)$ függvényt bizonyos értelemben "majoráló" függvényt. Ezzel mint együtthatóval felirjuk az (5.2) -nek megfelelő kezdetiérték feladatot. Majd megmutatjuk, hogy ez utóbbi kezdetiérték feladatnak van analitikus megoldása, mely az (5.3) sort "majorálja".

Legyen a $0 < \varrho < r$ szám tetszőlegesen adott. Mivel a

$$g(\varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \varrho^k$$

sor abszolut konvergens (lásd IV. Kötet, 6.1 Segédtétel), van $M > 0$ szám, hogy

$$|g_k \varrho^k| < M,$$

vagyis

$$|g_k| < \frac{M}{\varrho^k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{5.6}$$

Legyen a γ analitikus függvény a következőképpen értelmezve

$$\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\varrho^k}(x - \alpha)^k = \frac{M}{1 - \frac{x - \alpha}{\varrho}},$$

$$|x - \alpha| < \varrho, \tag{5.7}$$

és vizsgáljuk a

$$\frac{dz}{dx} = \gamma(x) z, \qquad z(\alpha) = \beta$$

kezdetiérték feladatot.

Ennek a megoldása (3.8) alapján

$$\psi(x) = \beta e^{\int_{\alpha}^{x} \gamma(t)\,dt} = \beta e^{-\varrho M \ln\left(1 - \frac{x-\alpha}{\varrho}\right)} =$$

$$= \beta\left(1 - \frac{x-\alpha}{\varrho}\right)^{-\varrho M}, \quad |x-\alpha| < \varrho .$$

A ψ függvény az $(\alpha - \varrho, \alpha + \varrho)$ intervallumon analitikus, mivel $(x-\alpha)$ hatványai szerint haladó konvergens binomiális sorba fejthető (lásd IV. Kötet, (8.9)). Jelöljük a sorfejtés együtthatóit ψ_k-val, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, vagyis legyen

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k (x-\alpha)^k, \quad |x-\alpha| < \varrho , \tag{5.8}$$

ahol $\psi_0 = \psi(0) = \beta$. Könnyen látható, hogy minden k-ra sg ψ_k = sg β, azaz vagy minden ψ_k pozitiv, vagy minden ψ_k negativ szám. (A $\beta = 0$ esetet kizárhatjuk, mivel ekkor a $\varphi(x) \equiv 0$ triviális megoldással, mint analitikus megoldással a tétel nyilván igaz). A ψ_k együtthatók azonban (5.5) -tel analóg módon meghatározhatók. Ezek szerint γ (5.7) sorfejtésének együtthatóit felhasználva

$$\psi_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M}{\varrho^i} \psi_{k-i-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Mivel itt a szummában minden tag egyforma előjelü

$$|\psi_k| = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M}{\varrho^i} |\psi_{k-i-1}|, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Az (5.6) egyenlőtlenségek felhasználásával most már a φ_k együtthatókra a következő becslést tudjuk adni:

$$|\varphi_0| = |\beta| \leq |\psi_0| = |\beta| ,$$

$$|\varphi_1| = |g_0| \, |\varphi_0| \leq M \, |\psi_0| = |\psi_1| ,$$

- -

$$|\varphi_k| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |g_i| \, |\varphi_{k-i-1}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M}{\varrho^i} \, | \psi_{k-i-1} | = | \psi_k | ,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad .$$

Mivel az (5.8) sor abszolut konvergens, az utóbbi becslésből következik, hogy az (5.3) sor is abszolut konvergens minden $x \in (\alpha - \varrho, \alpha + \varrho)$-ra. Miután azonban minden $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ -hez található $0 < \varrho < r$, hogy $x \in (\alpha - \varrho , \alpha + \varrho)$, és az előbbiekben ϱ tetszőleges r-nél kisebb pozitiv szám volt, azt kaptuk, hogy (5.3) valóban konvergens hatványsor az $(\alpha - r, \alpha + r)$ intervallumon.

Ezek után már csak azt kell megmutatnunk, hogy az (5.3) függvény, ahol $\varphi_0 = \beta$ és a φ_k együtthatókat az (5.5) rekurziós formulával képeztük, az (5.2) kezdetiérték feladat megoldása. Nyilvánvalóan $\varphi(0) = \varphi_0 = \beta$. A Cauchy-féle szorzási szabály (lásd IV. Kötet, 3.4 Definició és 3.5. Tétel) alkalmazásával és (5.5) felhasználásával

$$g(x) \, \varphi(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x - \alpha)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \, (x - \alpha)^k \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} g_i \, \varphi_{k-1-i} \right) x^{k-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} k\varphi_k x^{k-1} \equiv \varphi'(x), \qquad x\in(\alpha-r, \alpha+r).!$$

Megjegyezzük, hogy az 5.1 Tétellel analóg tétel érvényes az általános esetben is (lásd [7], 357. o.), feltéve, hogy az (5.1) kezdetiérték feladatban szereplő differenciálegyenlet jobb oldala, $f(x,y)$ "analitikus kétváltozós függvény". Ez azt jelenti, hogy $f(x,y)$ egy "kétváltozós konvergens hatványsor" összege:

$$f(x,y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik}(x-\alpha)^i (y-\beta)^k.$$

Az 5.1 Tétel bizonyitásában szerepet játszó (5.5) rekurziós formula egyben gyakorlatilag is felhasználható a keresett analitikus megoldás hatványsora együtthatóinak szukcessziv meghatározására. A hatványsor módszer gyakorlati alkalmazásának egy másik módja az un. Ansatzcal ("kisérletező feltevéssel", német) való számolás, más szóval a határozatlan együtthatók módszere. Ekkor az (5.2) kezdetiérték feladat analitikus megoldását, az (5.3) hatványsort határozatlan együtthatókkal behelyettesitjük az (5.2) differenciálegyenletbe és az együtthatókat az "együttható összehasonlitás módszerével" határozzuk meg. A következőkben mindkét eljárásra mutatunk példát.

5.1 Példa. Vizsgáljuk az $y' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ kezdetiérték feladatot. A $g(x) = -\frac{1}{x}$ függvény a (0,2) intervallumban analitikus, létezik konvergens hatványsor, mely őt előállitja, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(x-1)^k$, $x\in(0,2)$.
A kezdetiérték feladatra tehát az 5.1 Tétel alkalmazható, van $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x-1)^k$ analitikus megoldása az adott intervallumban. Meg kell határoznunk a φ_k együtthatókat. A kezdeti feltételből $\varphi_0 = \varphi(1) = 1$ adódik. Behelyettesitve a φ megoldást a differenciálegyenletbe a $\varphi'(x) \equiv \frac{-\varphi(x)}{x}$ azonosságot kapjuk. Ezt deriválva adódik a $\varphi''(x) \equiv \frac{-\varphi'(x)x+\varphi(x)}{x^2}$, majd ismét deriválva a $\varphi'''(x) \equiv \frac{-\varphi''(x)x^2+2\varphi'(x)x-2\varphi(x)}{x^3}$ azonosság, stb.

Igy a deriváltakból rendre adódnak az együtthatók:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi'(1)}{1\,!} = -\varphi(1) = -1\ ,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi''(1)}{2\,!} = \frac{1}{2}\,(-\varphi'(1) + \varphi(1)) = 1\ ,$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi'''(1)}{3\,!} = \frac{1}{6}\ \frac{-\varphi''(1) + 2\,\varphi'(1) - 2\,\varphi(1)}{1} = -1\ ,$$

stb. Igy tetszőleges sokáig folytatva a sorozatot, az együtthatók meghatározhatók.

Ha felhasználjuk az (5.5) rekurziós formulát, akkor a k-ik együttható a

$$\varphi_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1}\, \varphi_{k-i-1}\ , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

összefüggésből kiszámitható. Most matematikai indukcióval bebizonyitjuk, hogy minden k-ra $\varphi_k = 1$, ha k páros és $\varphi_k = -1$, ha k páratlan.

$k = 0$ -ra és $k = 1$ -re igaz az állitás. Tegyük fel, hogy $\varphi_{2\ell} = 1$, ha $2\ell < k$ és $\varphi_{2\ell+1} = -1$, ha $2\ell + 1 < k$. Ekkor

$$k\,\varphi_k = -\varphi_{k-1} + \varphi_{k-2} - \varphi_{k-3} + \ldots + (-1)^k \varphi_0,$$

vagyis az indukciós feltevés szerint

$$k\,\varphi_k = \begin{cases} k\,, & \text{ha } k \text{ páros} \\ -k, & \text{ha } k \text{ páratlan}\,. \end{cases}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\varphi_k = (-1)^k$. Tehát $\varphi(x) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = \frac{1}{x}$. Erről egyébként (3.8) alapján egyszerűen meggyőződhetünk (a g függvény ebben a példában a (3.8) -ban szereplő g (-1)-szerese).

5.2 Példa. Adott az $y' = e^{x^2} y$ differenciálegyenlet. Ezt, jóllehet szétválasztható differenciálegyenlet, mégsem lehet megoldani ugy, hogy a megoldásfüggvény zárt alakban álljon elő, hiszen e^{x^2} zárt alakban nem integrálható. Most a határozatlan együtthatók módszerével keressük azt a megoldást, melyre $y(0) = 1$. Ilyen $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k$ analitikus megoldás létezik, hiszen e^{x^2} is előállitható konvergens hatványsorral a $(-\infty, \infty)$ intervallumon:

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^i ,$$

ahol $e_i = 0$, ha i páratlan és $e_{2k} = \frac{1}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Mivel φ megoldás, ezért $\varphi(x)$-et az ő

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k k x^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_{\ell+1} (\ell+1) x^{\ell}$$

deriváltjával együtt behelyettesitve a megoldandó differenciálegyenletbe a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_{\ell+1} (\ell+1) x^{\ell} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^i \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k$$

azonosságot kapjuk. A jobb oldalon a Cauchy-féle szorzást alkalmazva (lásd IV. Kötet, 3.4 Definició), a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_{\ell+1} (\ell+1) x^{\ell} \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\ell} e_k \varphi_{\ell-k} \right) x^{\ell}$$

azonosságra jutunk. Azonosság viszont csak ugy állhat fenn, ha minden ℓ-re x^{ℓ} együtthatója a bal-, ill. a jobb oldalon megegyezik.

Ezek alapján

$$\begin{array}{lll} x^0 \text{ együtthatója} & \varphi_1 = e_0 \varphi_0 , \\ x^1 \quad " & 2\varphi_2 = e_0 \varphi_1 + e_1 \varphi_0 , \\ x^2 \quad " & 3\varphi_3 = e_0 \varphi_2 + e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_0 , \\ \hline x^{\ell-1} \quad " & \ell \varphi_\ell = e_0 \varphi_{\ell-1} + e_1 \varphi_{\ell-2} + \ldots + e_{\ell-1} \varphi_0 , \end{array}$$

stb. A kezdeti feltétel alapján a $\varphi_0 = \varphi(0) = 1$, s igy a többi együtthatókra

$$\varphi_1 = e_0 \varphi_0 = 1,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(e_0 \varphi_1) = \frac{1}{2} ,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{3}(e_0 \varphi_2 + e_2 \varphi_0) = \frac{1}{3}(\varphi_2 + \varphi_0) = \frac{1}{2} ,$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{4}(e_0 \varphi_3 + e_2 \varphi_1) = \frac{1}{4}(\varphi_3 + \varphi_1) = \frac{3}{8} ,$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{5}(e_0 \varphi_4 + e_2 \varphi_2 + e_4 \varphi_0) = \frac{1}{5}\left(\varphi_4 + \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right) =$$

$$= \frac{11}{40} ,$$

és igy tovább. Az eljárás tetszőlegesen sokáig folytatható. A φ függvény Maclaurin sora tehát az 5-öd-foku tagig bezárólag a következő:

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{8} + \frac{11x^5}{40} + \ldots \quad .$$

A gyakorlatban sokszor alkalmazzuk nemlineáris egyenletek megoldására a fenti módszereket. Egy nagyon egyszerü esetet mutat be a következő

5.3 Példa. Adott az

$$y' = x - 2y + y^2, \qquad y(1) = 1$$

kezdetiérték feladat. Keressük meg az analitikus megoldását. A differenciálegyenletet átirjuk $y' = (x-1) + (y-1)^2$ alakba, az egyenlet jobb oldala az eredeti jobb oldalon álló függvénynek az $(1, 1)$ helyhez tartozó (véges !) kétváltozós Taylor-sora. Az analitikus megoldás legyen

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (x-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k (x-1)^k .$$

Ekkor

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, k (x-1)^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_{\ell+1} (\ell+1)(x-1)^{\ell} ,$$

továbbá a Cauchy-féle szorzással (lásd IV. Kötet, 3.4 Definició)

$$(\varphi(x) - 1)^2 = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell-1} \varphi_i \varphi_{\ell-i} (x-1)^{\ell} .$$

Ezeket az értékeket behelyettesitve a differenciálegyenletbe, a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \varphi_{\ell+1} (x-1)^{\ell} \equiv (x-1) + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell-1} \varphi_i \varphi_{\ell-i} (x-1)^{\ell}$$

azonosságot kapjuk. Ebből az együtthatók összehasonlitásával adódik, hogy

$$\varphi_1 = 0, \qquad\qquad \varphi_1 = 0 ,$$

$$2\varphi_2 = 1, \qquad\qquad \varphi_2 = \frac{1}{2} ,$$

$$3\varphi_3 = \varphi_1^2 = 0, \qquad\qquad \varphi_3 = 0 ,$$

$$4\varphi_4 = 2\varphi_1\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_4 = 0,$$

$$5\varphi_5 = 2\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2^2 = \frac{1}{4}, \qquad \varphi_5 = \frac{1}{20},$$

$$6\varphi_6 = 2\varphi_1\varphi_4 + 2\varphi_2\varphi_3 = 0, \qquad \varphi_6 = 0,$$

$$\ell\varphi_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \varphi_i\varphi_{\ell-i}, \qquad \varphi_\ell = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell-1} \varphi_i\varphi_{\ell-i}.$$

Tehát a keresett hatványsor a hatodfoku tagig bezárólag

$$\varphi(x) \sim 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^5}{20} + 0(x-1)^6$$

Természetesen az együtthatók meghatározása itt is tetszőlegesen sokáig folytatható.

Áttérünk a véges differenciák módszerének a legegyszerübb esetben való bemutatására. Ez a módszer gyakorlatilag a legfontosabb, mivel algoritmusa programvezérlésü számológépre jól programozható és igy gépi számolásra a legalkalmasabb módszer. Lényege az a differenciálszámitásból jól ismert tény, hogy minden differenciálható φ függvényre fennáll a következő közelitő egyenlőség:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) \approx \varphi'(x)h, \tag{5.9}$$

ha $|h|$ elegendően kicsiny.

Legyen most φ_0 az (5.1) kezdetiérték feladat megoldása, akkor (5.9) szerint

$$\varphi_0(x_0+h_0) \approx \varphi_0(x_0) + \varphi_0'(x_0)h_0 = y_0 + f(x_0, y_0)h_0 .$$

Legyen $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h_0$ és $x_1 = x_0 + h_0$, továbbá jelöljük φ_1-gyel az $y' = f(x,y)$, $y(x_1) = y_1$ kezdetiérték feladat megoldását.

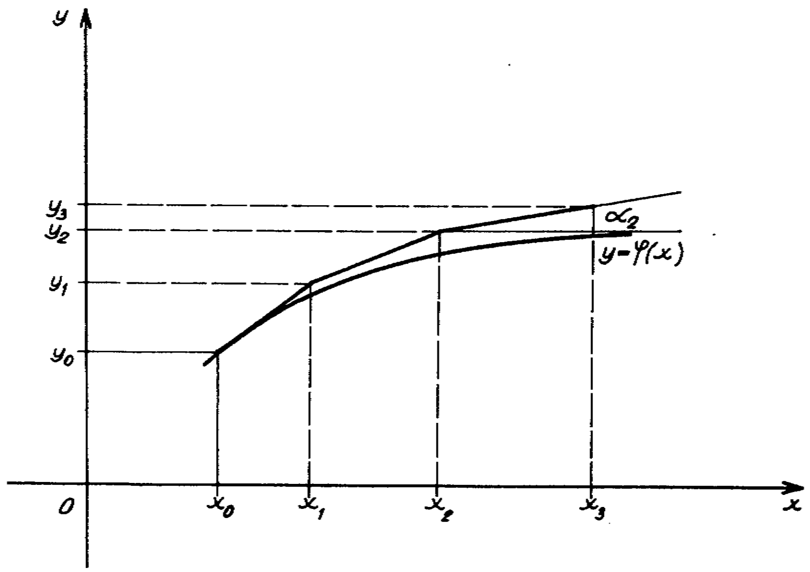
Ekkor ismét (5.9) szerint

$$\varphi_1(x_1+h_1) \approx \varphi_1(x_1) + \varphi_1'(x_1)h_1 = y_1 + f(x_1,y_1)\,h_1 \;.$$

Legyen most $y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h_1$, $x_2 = x_1 + h_1$. Folytatjuk az eljárást azzal, hogy φ_2 jelölje az $y' = f(x,y)$, $y(x_2) = y_2$ kezdetiérték feladat megoldását, φ_2-re fennáll a

$$\varphi_2(x_2+h_2) \approx \varphi_2(x_2) + \varphi_2'(x_2)h_2 = y_2 + f(x_2,y_2)\,h_2$$

közelitő egyenlőség. Ebből az $y_3 = y_2 + f(x_2,y_2)h_2$, $x_3 = x_2 + h_2$ jelölésekkel uj ponthoz jutottunk, stb. Tekintsük az (x_0,y_0), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) pontokat összekötő un. <u>Euler-féle töröttvonalat.</u> Ez a töröttvonal bizonyos értelmben az (5.1) kezdetiérték feladat megoldásgörbéjét közeliti (lásd 5.1 ábra).



5.1 ábra

Feladatunk csupán az, hogy megvizsgáljuk, milyen f függvény esetén lesz valóban jó a közelítés, hogyan függ ez a h_i lépésközök nagyságától és javítható-e anélkül is, hogy h nagyságát csökkentenénk.

5.2 Tétel. Legyen adott az

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat, tételezzük fel, hogy $f \in C^1_D$, ahol $D = \{(x,y) : |x-x_0| < a, \ |y-y_0| < b\}$ és $|f(x,y)| < M$, $(x,y) \in D$. Legyen

$$0 < \alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

és jelöljük φ-vel a kezdetiérték feladat megoldását. Osszuk fel az $[x_0, x_0+\alpha]$ intervallumot n egyenlő részre és jelölje ℓ_n azt a függvényt, melynek grafikonja az $[x_0, x_0+\alpha]$ intervallum e felosztásához tartozó Euler-féle töröttvonal. Ha $n \to \infty$, akkor az ℓ_n függvénysorozat az $[x_0, x_0+\alpha]$ intervallumon egyenletesen a φ megoldáshoz konvergál.

Bizonyitás. A 2.1 Tétel szerint φ értelmezve van az $[x_0, x_0+\alpha]$ zárt intervallumon. Integráljuk a

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \qquad (5.10)$$

azonosságot x_0-tól x-ig $(x \in [x_0, x_0+\alpha])$:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt .$$

Innen

$$|\varphi(x)-y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))|\, dt \leq M(x-x_0) \leq M\alpha < b ,$$

vagyis bevezetve a

$$\tilde{D} = \left\{ (x,y) : |x - x_0| \leq \alpha \; ; |y - y_0| \leq M\alpha \right\}$$

zárt téglalapot, $(x, \varphi(x)) \in \tilde{D}$, ha $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$. A feltételekből következik, hogy f és első parciális deriváltjai a $\tilde{D}$ zárt téglalapon korlátosak (lásd V. Kötet, 4.6 Tétel). Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$|f'_y(x,y)| < m_1, \; |f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\, f(x,y)| < m_2 ,$$

$$(x,y) \in \tilde{D} . \tag{5.11}$$

Legyen továbbá $h = \frac{\alpha}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_k = x_0 + k\,h$, és $\ell_n(x_k) = y_k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Az Euler-féle töröttvonal értelmezése szerint

$$y_k = y_{k-1} + h\, f(x_{k-1}, y_{k-1}), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) . \tag{5.12}$$

Először megmutatjuk, hogy $(x_k, y_k) \in \tilde{D}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Nyilvánvaló, hogy $(x_0, y_0) \in \tilde{D}$. Ha $(x_i, y_i) \in \tilde{D}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$, akkor

$$|y_k - y_0| \leq |y_k - y_{k-1}| + |y_{k-1} - y_{k-2}| + \ldots + |y_1 - y_0| \leq$$

$$\leq h\,(|f(x_{k-1}, y_{k-1})| + \ldots + |f(x_0, y_0)|) <$$

$$< h\,k\,M \leq h\,n\,M = \alpha\, M ,$$

ami állításunkat igazolja.

Ezután megbecsüljük az $|y_k - \varphi(x_k)|$ eltérést $(k = 0, 1, \dots, n)$. Az (5.10) azonosságot differenciálva adódik, hogy

$$\varphi''(x) \equiv f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x)) f(x, \varphi(x)) .$$

(5.11) alapján

$$|\varphi''(x)| < m_2, \qquad x \in [x_0, x_0 + \alpha] .$$

Továbbá

$$\varphi(x_k) = \varphi(x_{k-1}) + h\varphi'(x_{k-1}) + \frac{h^2}{2}\varphi''(\xi_k) =$$

$$= \varphi(x_{k-1}) + h f(x_{k-1}, \varphi(x_{k-1})) + \frac{h^2}{2}\varphi''(\xi_k),$$

$$(k = 1, \dots, n), \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \tag{5.13}$$

(lásd II. Kötet, 18.3 Tétel). A kezdeti feltétel miatt

$$|\varphi(x_0) - y_0| = 0 .$$

(5.11), (5.12), (5.13) és a Lagrange-féle középértéktétel (V. Kötet, 9.1 Tétel) felhasználásával a következő becslések adhatók:

$$|\varphi(x_1) - y_1| \leq |\varphi(x_0) - y_0| + h\,|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| +$$

$$+ \frac{h^2}{2}|\varphi''(\xi_1)| \leq \frac{h^2}{2} m_2 ,$$

$$|\varphi(x_2) - y_2| \leq |\varphi(x_1) - y_1| + h\,|f(x_1, \varphi(x_1)) - f(x_1, y_1)| +$$

$$+ \frac{h^2}{2}|\varphi''(\xi_2)| \leq |\varphi(x_1) - y_1| + h m_1 |\varphi(x_1) - y_1| + \frac{h^2}{2} m_2 \leq$$

$$\leq (1 + h\, m_1)\, \frac{h^2}{2}\, m_2 + \frac{h^2}{2}\, m_2 \;,$$

$$|\varphi(x_k) - y_k| \leq |\varphi(x_{k-1}) - y_{k-1}| +$$

$$+ h\,|f(x_{k-1}, \varphi(x_{k-1})) - f(x_{k-1}, y_{k-1})| + \frac{h^2}{2}\,|\varphi''(\xi_k)| \leq$$

$$\leq |\varphi(x_{k-1}) - y_{k-1}| + h\, m_1\, |\varphi(x_{k-1}) - y_{k-1}| + \frac{h^2}{2}\, m_2 \leq$$

$$\leq (1 + h\, m_1)\, |\varphi(x_{k-1}) - y_{k-1}| + \frac{h^2}{2}\, m_2 \leq$$

$$\leq (1 + h\, m_1)\Big[(1 + h\, m_1)\, |\varphi(x_{k-2}) - y_{k-2}| + \frac{h^2}{2}\, m_2\Big] + \frac{h^2}{2}\, m_2 =$$

$$= (1 + h\, m_1)^2\, |\varphi(x_{k-2}) - y_{k-2}| + (1 + h\, m_1)\frac{h^2}{2}\, m_2 + \frac{h^2}{2}\, m_2 \leq$$

$$\leq (1 + h\, m_1)^2\Big[(1 + h\, m_1)\, |\varphi(x_{k-3}) - y_{k-3}| + \frac{h^2}{2}\, m_2\Big] +$$

$$+ (1 + h\, m_1)\frac{h^2}{2} m_2 + \frac{h^2}{2} m_2 = (1 + h\, m_1)^3 |\varphi(x_{k-3}) - y_{k-3}| +$$

$$+ \Big[(1 + h\, m_1)^2 + (1 + h\, m_1) + 1\Big]\frac{h^2}{2}\, m_2 \leq \;\ldots\; \leq$$

$$\leq (1 + h\, m_1)^{k-1} |\varphi(x_1) - y_1| + \Big[(1 + h\, m_1)^{k-2} + \ldots + (1 + h m_1) + 1\Big]\frac{h^2}{2} m_2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} (1 + h\, m_1)^i\, \frac{h^2}{2} m_2 = \frac{h^2}{2}\, m_2\, \frac{(1 + h\, m_1)^k - 1}{(1 + h\, m_1) - 1} =$$

$$= h\frac{m_2}{2m_1}\left[(1+hm_1)^k - 1\right] .$$

Mivel

$$(1+hm_1)^k = (1+\frac{\alpha m_1}{n})^k \leq (1+\frac{\alpha m_1}{n})^n < e^{\alpha m_1}$$

(lásd I. Kötet, 16.2 Példa), ezért

$$|\varphi(x_k) - y_k| < h\frac{m_2}{2m_1}(e^{\alpha m_1} - 1), \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{5.14}$$

Meg kell becsülnünk a $\varphi(x) - \ell_n(x)$ eltérést. Legyen $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Jelöljük L_k-val azt a lineáris függvényt, melynek grafikonja az $(x_{k-1}, \varphi(x_{k-1}))$, $(x_k, \varphi(x_k))$ pontokat összekötő szakasz az adott intervallumban, azaz

$$L_k(x) = \varphi(x_{k-1}) + \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}),$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k] .$$

$$|\varphi(x) - \ell_n(x)| \leq |\varphi(x) - L_k(x)| + |L_k(x) - \ell_n(x)| . \tag{5.15}$$

Először a $|\varphi(x) - L_k(x)|$ eltérést, vagyis az integrálgörbének és húrjának ordinátaeltérését becsüljük. Mivel

$$\varphi(x_{k-1}) = L_k(x_{k-1}), \quad \text{ezért}$$

$$|\varphi(x) - L_k(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_{k-1})| + |L_k(x_{k-1}) - L_k(x)| \leq$$

$$\leq |\varphi'(\tilde{\xi}_k)|(x - x_{k-1}) + |L_k(x_k) - L_k(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq |\varphi'(\tilde{\xi}_k)|(x_k - x_{k-1}) + |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| =$$

$$= (|\varphi'(\tilde{\xi}_k)| + |\varphi'(\hat{\xi}_k)|)(x_k - x_{k-1}) \quad ,$$

ahol $\tilde{\xi}_k, \hat{\xi}_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Figyelembe véve az (5.10) azonosságot és f korlátosságát kapjuk, hogy

$$|\varphi(x) - L_k(x)| \leq 2\,M\,h, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Most az $L_k(x) - \ell_n(x)$ eltérést becsüljük az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumon. Mivel itt két lineáris függvény eltéréséről van szó egy intervallumon, a különbség is lineáris és a különbség abszolut értéke vagy az intervallum kezdő, vagy pedig a végpontjában maximális. Ezek szerint

$$|L_k(x) - \ell_n(x)| \leq \max(|L_k(x_k) - \ell_n(x_k)|, |L_k(x_{k-1}) - \ell_n(x_{k-1})|) =$$

$$= \max(|\varphi(x_k) - y_k|, |\varphi(x_{k-1}) - y_{k-1}|) <$$

$$< h\frac{m_2}{2m_1}(e^{\alpha m_1} - 1), \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad ,$$

ahol felhasználtuk az (5.14) becslést. A két utóbbi becslést (5.15) -ben felhasználva kapjuk, hogy

$$|\varphi(x) - \ell_n(x)| < h\left[2M + \frac{m_2}{2m_1}(e^{\alpha m_1} - 1)\right] \quad ,$$

$$x \in [x_0, \; x_0 + \alpha] \; . \qquad (5.16)$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott; (5.16) -ból adódik, hogy

$$|\varphi(x) - \ell_n(x)| < \varepsilon$$

minden $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$-ra, ha

$$h\left[2M + \frac{m_2}{2m_1}\left(e^{\alpha m_1} - 1\right)\right] = \frac{\alpha}{n}\left[2M + \frac{m_2}{2m_1}\left(e^{\alpha m_1} - 1\right)\right] < \varepsilon ,$$

vagyis ha

$$n > \frac{\alpha}{\varepsilon}\left[2M + \frac{m_2}{2m_1}\left(e^{\alpha m_1} - 1\right)\right] \quad .!$$

Megjegyezzük, hogy az $[x_0 - \alpha, x_0]$ intervallumra hasonló tétel érvényes, az ugyanugy bizonyitható és az (5.14), ill. az (5.16) becslések is érvényben maradnak.

Az (5.14) becslés gyakorlatilag is felhasználható a hibakorlát meghatározására, ha a kezdetiérték feladatot az Euler-módszerrel oldjuk meg (ekkor a megoldásfüggvény közelitése táblázat alakjában adódik, melyben az (x_k, y_k) értékek vannak feltüntetve $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$). (5.14) -ből látható, hogy a hiba "h nagyságrendü". Lényegesen jobb közelitést kapunk (ugyanannyi számolással), illetve ugyanezt a pontosságot elérhetjük lényegesen kevesebb számolással (lényegesen kevesebb számitógép idő felhasználásával), ha az Euler-módszernél finomabb eljárást, pl. az un. "Runge-Kutta módszert" alkalmazzuk (lásd [4]). Az Euler módszer finomitható azáltal, hogy minden y_k meghatározását egy "iterációsorozattal" végezzük. Az eredetileg definiált y_k-t jelöljük y_k^0 -lal, igy

$$y_k^0 = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})\, h \; .$$

Ennek segitségével adjuk meg az első közelitést:

$$y_k^1 = y_{k-1} + \frac{f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^0)}{2}\, h ,$$

s ezt folytatva az i-edik közelitést:

$$y_k^i = y_{k-1} + \frac{f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{i-1})}{2}\, h \; .$$

5.4 Példa. Tekintsük az $y' = 2\sqrt{y}$ $(y > 0)$ differenciálegyenletet. Először megadjuk az $y(1) = 1$ feltételnek eleget tevő közelitő megoldást a véges differenciák módszerével az $[1, 2]$ intervallum 8 egyenlő részre osztásával. A számitás a következő:

$x_0 = 1$	$y_0 = 1$	$\varphi(x_0) = 1$
$x_1 = 1,125$	$y_1 = y_0 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_0} = 1,25$	$\varphi(x_1) = 1,266$
$x_2 = 1,25$	$y_2 = y_1 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_1} = 1,529$	$\varphi(x_2) = 1,563$
$x_3 = 1,375$	$y_3 = y_2 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_2} = 1,838$	$\varphi(x_3) = 1,891$
$x_4 = 1,5$	$y_4 = y_3 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_3} = 2,177$	$\varphi(x_4) = 2,25$
$x_5 = 1,625$	$y_5 = y_4 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_4} = 2,546$	$\varphi(x_5) = 2,641$
$x_6 = 1,75$	$y_6 = y_5 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_5} = 2,945$	$\varphi(x_6) = 3,063$
$x_7 = 1,875$	$y_7 = y_6 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_6} = 3,374$	$\varphi(x_7) = 3,516$
$x_8 = 2$	$y_8 = y_7 + 0,125 \cdot 2\sqrt{y_7} = 3,839$	$\varphi(x_8) = 4$

(Az utolsó oszlopban összehasonlitásul a tényleges megoldásfüggvény értékei szerepelnek).

Most az $y(1) = 1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás értékét azonnal az $x_1 = 2$ helyen számitjuk ki, vagyis $n = 1$, $h = 1$, de iterációt alkalmazunk.

Nulladik közelités:

$$y_1^0 = 1 + 1 \cdot 2\sqrt{1} = 3,$$

első közelités:

$$y_1^1 = 1 + 1 \cdot \frac{2\sqrt{1} + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{y_1^0} \approx 3{,}732 \ ,$$

második közelités:

$$y_1^2 = 1 + 1 \cdot \frac{2\sqrt{1} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}} =$$

$$= 2 + \sqrt{y_1^1} \approx 3{,}932 \ ,$$

harmadik közelités:

$$y_1^3 = 1 + 1 \cdot \frac{2\sqrt{1} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} =$$

$$= 2 + \sqrt{y_1^2} \approx 3{,}983 \ ,$$

- - - - - - -

általában az ℓ -edik közelités:

$$y_1^\ell = 2 + \sqrt{y_1^{\ell - 1}} \ , \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

és

$$y_1^0 = 3 \ .$$

Matematikai indukcióval könnyen belátható, hogy az y_1^ℓ, $\ell \in T$ végtelen sorozat monoton növekvő és felülről korlátos (ezek bizonyitását az olvasóra bizzuk), tehát van határértéke, ha $\ell \to \infty$

$$\lim_{\ell \to \infty} y_1^\ell = A \ .$$

A rekurziós formula alapján

$$\lim_{\ell \to \infty} y_1^{\ell} = 2 + \sqrt{\lim_{\ell \to \infty} y_1^{\ell - 1}} \quad ,$$

és ebből az A határértékre az $A = 2 + \sqrt{A}$ egyenlet adódik. Az egyenlet megoldása $A = 4$.

DIFFERENCIÁLEGYENLET RENDSZEREK

6. A megoldás létezése és egyértelműsége

Legyen adott az $\Omega \subset R^n$ nyilt és összefüggő tartomány és az I_t nyilt intervallum. Legyen $f_i : (I_t \times \Omega) \mapsto R$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ $(n + 1)$ változós függvény. Vizsgáljuk a következő elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszert:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

$$- - - - - - -$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) . \tag{6.1}$$

<u>6.1 Definició.</u> Az I intervallumon differenciálható $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ rendezett függvény n-est a (6.1) differenciálegyenlet rendszer <u>megoldásának</u> nevezzük, ha minden $t \in I$ -re $(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in I_t \times \Omega$ és

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) ,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) ,$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \; .$$

Jelölje $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az R^n euklideszi tér tetszőleges pontját és $||\underline{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ az $\underline{x}$ vektor normáját.
Vezessük be az $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ jelölést. Ennek segitségével (6.1) összefoglalható a következőképpen:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}) \; . \tag{6.2}$$

Az R^n tér elemeit egyben n-dimenziós oszlopvektornak tekintjük. Igy (6.2) -ben

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} .$$

(6.2) <u>megoldása</u> (vagy <u>megoldás-vektora</u>) a 6.1 Definicióban megadott, I-n differenciálható

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

vektor-skalár függvény. Általában, egy n-dimenziós vektor-skalár függvény deriváltján, ill. integrálján a koordináták deriváltjaiból, ill. integráljaiból alkotott vektort értjük. Többször szükségünk lesz a következő becslésre.

6.1 Segédtétel. Ha $\underline{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumon ($\alpha < \beta$) folytonos, akkor

$$\left\| \int_\alpha^\beta \underline{v}(t)\, dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \| \underline{v}(t) \|\, dt. \qquad (6.3)$$

Bizonyitás. Vezessük be a következő jelöléseket

$$a_k = \int_\alpha^\beta v_k(t)\, dt, \qquad b_k = \frac{a_k}{\left[\sum_{i=1}^n a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_k}{\left\| \int_\alpha^\beta \underline{v}(t)\, dt \right\|},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\left[\sum_{i=1}^n a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[\sum_{k=1}^n a_k^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left\| \int_\alpha^\beta \underline{v}(t)\, dt \right\|.$$

Azonban a Cauchy-egyenlőtlenség (III. Kötet, 16.2 Következmény) felhasználásával

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n b_k \int_\alpha^\beta v_k(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n b_k v_k(t)\, dt \leq$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \left[\sum_{k=1}^n b_k^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n v_i^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_\alpha^\beta \| \underline{v}(t) \|\, dt,$$

mivel $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$. Ebből az egyenlőtlenségből az előző egyenlőség figyelembevételével (6.3) adódik.!

6.2 Definició. Legyen $\underline{x}(t)$ (6.2) megoldása. Az (n+1) -dimenziós térben a

$$t = t,$$
$$\underline{x} = \underline{x}(t), \qquad t \in I$$

egyenletü görbét a (6.1) (vagy ami ugyanaz a (6.2)) differenciálegyenlet rendszer integrálgörbéjének (megoldásgörbéjének), az n-dimenziós térben az

$$\underline{x} = \underline{x}(t), \qquad t \in I$$

egyenletü görbét (6.1), ill. (6.2) trajektóriájának (pályagörbéjének) nevezzük.

A továbbiakban általában az egyszerübb, vektoros irásmódot fogjuk alkalmazni.

Ha a (6.2) differenciálegyenlet rendszerhez $\underline{x}(\tau) = \underline{\xi}$ kezdeti feltételt csatolunk és olyan $\underline{x}(t)$ megoldást (megoldásvektort) keresünk, mely (6.2) mellett ezt a kezdeti feltételt is kielégiti, kezdetiérték feladatról beszélünk.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az n-edrendü differenciálegyenlet rendszerekkel kapcsolatos kezdetiérték feladat milyen összefüggésben van (6.2) -vel.

Legyen adva a következő

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{6.4}$$

n-edrendü explicit differenciálegyenlet, $f: (I_t \times \Omega) \mapsto R$ folytonos függvény, I_t nyilt intervallum, $\Omega \subset R^n$ nyilt és összefüggő tartomány. (6.4) megoldásfüggvénye az az I intervallumon legalább n-szer differenciálható y(t) függvény, melyre $(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \in I_t \times \Omega$ és

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}), \qquad t \in I .$$

Nyilvánvalóan itt is beszélhetünk kezdetiérték feladatról, ha valamely τ helyen előirjuk a megoldásfüggvénynek és deriváltjainak értékét az $(n-1)$ -edrendü deriváltig bezárólag.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y, \\
x_2 &= y', \\
x_3 &= y'', \\
&\cdots \\
x_n &= y^{(n-1)},
\end{aligned}
$$

ekkor (6.4) a

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\
&\cdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n, \\
\frac{dx_n}{dt} &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

alakot ölti. (6.4) és (6.5) kapcsolatát mondja ki az alábbi, "átviteli elvnek" nevezett

6.2 Tétel. Az $y \in C_I^n$ függvény akkor és csak akkor elégiti ki (6.4)-et és vele együtt az

$$y^{(k)}(\tau) = y_0^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

kezdeti feltételt, ha az

$$\underline{x}(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

vektor-skalár függvény (6.5) megoldása és kielégiti az

$$\underline{x}(\tau) = (y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$$

kezdeti feltételt.

Bizonyitás. Elégitse ki y a (6.4) differenciálegyenletet és a hozzá csatlakozó kezdeti feltételt. Ekkor fennállnak a következő egyenlőségek $t \in I$ -re:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) ,$$

$$y^{(k)}(\tau) = y_0^k , \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Ha az

$$x_1(t) = y(t) ,$$

$$x_2(t) = y'(t) ,$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

jelöléseket bevezetjük, akkor a

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) ,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) ,$$

$$- - - - - - -$$

$$\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t) ,$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

egyenlőségeket kapjuk minden $t \in I$ -re.

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $\underline{x}(t)$ megoldása (6.5) -nek, és (a kezdeti feltételek átjelölésével) a hozzá csatlakozó kezdetiérték feladatnak is.

Forditva, legyen (6.5) és a kapcsolt kezdetiérték feladat megoldása $\underline{x}(t)$. Ekkor minden $t \in I$ -re

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) ,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) ,$$

$$- - - - - - - -$$

$$\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t) ,$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) .$$

Miután a differenciálható $x_n(t)$ függvény $x_{n-1}(t)$ deriváltja, ez utóbbi $x_{n-2}(t)$ deriváltja, és igy tovább, következik, hogy $x_1(t)$ n-szer differenciálható függvény. Helyettesitsük be az első egyenlőségből $x_2(t)$ -t a másodikba, a második egyenlőségből $x_3(t)$ -t a harmadikba, stb., végül az (n-1) -ik egyenlőségből $x_n(t)$ -t az n-ikbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^n(x_1(t))}{dt^n} = f(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}) .$$

Ez azt jelenti, hogy az $y(t) = x_1(t)$ függvény megoldása (6.5) -nek. Az

$$\underline{x}(\tau) = (y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1})$$

egyenlőségből meg az következik, hogy

$$y^{(k)}(\tau) = y_0^k , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad .!$$

A 6.2 Tételben foglaltakat röviden ugy fejezzük ki, hogy a (6.4) n-ed rendü differenciálegyenlet és a (6.5) differenciálegyenlet rendszer ekvivalensek. Az átviteli elv biztositja, hogy bármely explicit differenciálegyenlet rendszer ekvivalens egy elsőrendü explicit differenciálegyenlet rendszerrel. Ugyanis az eredeti rendszer mindegyik egyenlete ekvivalens egy (6.5) tipusu rendszerrel. Igy valóban elegendő (6.1) tipusu, un. Cauchy-féle normál alaku differenciálegyenlet rendszer megoldásával foglalkoznunk.

6.1 Példa. Legyen adva az

$$y'' = f(t, y')$$

un. hiányos másodrendü differenciálegyenlet, $f : D \mapsto R$, $D \subset R^2$ nyilt és összefüggő tartomány. Az egyenlet Cauchy-féle normál alakja $x_1 = y$ és $x_2 = y'$ jelölésekkel a

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(t, x_2)$$

differenciálegyenlet rendszer. A második egyenlet x_1-et nem tartalmazza, ezért a differenciálegyenlet rendszer megoldása $x_2(t)$ meghatározásával kezdődhet. $x_2(t)$ ismeretében $x_1(t)$ integrálással meghatározható.

6.2 Példa. Legyen adva az

$$y'' = f(y, y')$$

differenciálegyenlet (ezt is hiányos másodrendü differenciálegyenletnek szokás nevezni, mert a t független változót explicite nem tartalmazza), $f : D \mapsto R$, $D \subset R^2$ nyilt és összefüggő, f folytonos. Az egyenlettel ekvivalens elsőrendü rendszer az

$$x_1 = y, \quad x_2 = y'$$

jelölésekkel a

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \tag{6.6}$$

rendszer. Itt függetlenül nem vizsgálható a második egyenlet, hiszen mindkét ismeretlen függvényt tartalmazza. Tételezzük azonban fel, hogy a (6.6) rendszer $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ pályagörbéjének egyenlete $x_2 = x_2(x_1)$ alakban megadható, ahol $x_2(x_1)$ differenciálható függvény. Ekkor a (6.6) rendszer második egyenletét az elsővel osztva és felhasználva a II. Kötet, 20.2 Tételt kapjuk, hogy az $x_2(x_1)$ függvény kielégíti a

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{x_2} f(x_1, x_2) \qquad (x_2 \neq 0)$$

elsőrendű differenciálegyenletet. Ha az utóbbi egyenletet megoldottuk és az $x_2(x_1)$ függvényt meghatároztuk, akkor a

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(x_1)$$

elsőrendű (3.1) tipusu differenciálegyenletből $x_1(t)$ függvény meghatározása következhet. Az eredeti másodrendű differenciálegyenlet megoldása az

$$y(t) = x_1(t)$$

függvény lesz.

A továbbiakban szükségünk lesz a vektor-vektor függvények egy speciális tulajdonságára.

<u>6.3 Definició.</u> Legyen $\underline{f}: (I_t \times \Omega) \mapsto R^n$ vektor-vektor függvény, $I_t \subset R$, $\Omega \subset R^n$ nyilt és összefüggő tartományok. Azt mondjuk, hogy az $\underline{f}$ függvény az $I_t \times \Omega$ tartományon <u>$\underline{x}$-ben eleget tesz a lokális Lipschitz-feltételnek,</u> ha minden $\tau \in I_t$, $\underline{\xi} \in \Omega$-hoz van L konstans és $K_{(\tau, \underline{\xi})} \subset I_t \times \Omega$ környezet, hogy minden $(t, \underline{x}^1)$, $(t, \underline{x}^2) \in K_{(\tau, \underline{\xi})}$-ra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\| \underline{f}(t, \underline{x}^1) - \underline{f}(t, \underline{x}^2) \| \leq L \| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \| . \qquad (6.7)$$

L a $K_{(\tau, \underline{\xi})}$ környezethez tartozó <u>Lipschitz konstans.</u>

<u>6.4 Definició.</u> Legyen $G \subset I_t \times \Omega$ nyilt és összefüggő tartomány. Ha található egy helytől független L Lipschitz konstans, mellyel fennáll (6.7) ((t, x^1), $(t, x^2) \in G$), akkor azt mondjuk, hogy $\underline{f}$ a G tartományban $\underline{x}$ -<u>ben eleget tesz az egységes Lipschitz-feltételnek.</u>

A következő tételben egy könnyen ellenőrizhető elégséges feltételt adunk a Lipschitz-feltétel teljesülésére.

<u>6.3 Tétel.</u> Legyen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ a 6.3 Definicióban szereplő függvény; ha

$$f'_{ix_k} \in C^0_{I_t \times \Omega},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

akkor $\underline{f}$ $\underline{x}$ -ben eleget tesz a lokális Lipschitz-feltételnek.

<u>Bizonyitás.</u> Tetszőleges $\tau \in I_t$, $\underline{\xi} \in \Omega$ -hoz van $K_{(\tau, \underline{\xi})}$ környezet, melynek $\overline{K}_{(\tau, \underline{\xi})}$ lezártja is $I_t \times \Omega$ részhalmaza: $\overline{K}_{(\tau, \underline{\xi})} \subset I_t \times \Omega$. Weierstrass tétele (V. Kötet, 4.6 Tétel) szerint ekkor van $k > 0$ állandó, melyre

$$| f'_{ix_k}(t, \underline{x}) | \leq k, \qquad (t, \underline{x}) \in \overline{K}_{(\tau, \underline{\xi})},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n .$$

A Lagrange-féle középértéktétel (V. Kötet, 9.1 Tétel) felhasználásával tetszőleges $(t, \underline{x}^1), (t, \underline{x}^2) \in K_{(\tau, \underline{\xi})}$-re van $\tilde{\underline{x}} \in K_{(\tau, \underline{\xi})}$, hogy

$$\| \underline{f}(t, \underline{x}^1) - \underline{f}(t, \underline{x}^2) \| \leq n \max_i | f_i(t, \underline{x}^1) - f_i(t, \underline{x}^2) | =$$

$$= n \max_i |(\operatorname{grad}_{\underline{x}} f_i(t, \tilde{\underline{x}}), \underline{x}^1 - \underline{x}^2)| \leq$$

$$\leq n \max_i \| \operatorname{grad}_{\underline{x}} f_i(t, \tilde{\underline{x}}) \| \; \| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \| \leq$$

$$\leq n\, n\, k \| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \| = L \| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \| ,$$

ahol $\operatorname{grad}_{\underline{x}} f_i$ az $f_i(t, \underline{x})$ függvénynek, mint $\underline{x}$ függvényének a gradiense, $(\underline{a}, \underline{b})$ két vektor skaláris szorzata, $L = n^2 k$, és felhasználtuk a Cauchy-egyenlőtlenséget (III. Kötet, (16.7)).!

Ezek után felvethetjük a kérdést, hogy (6.1) -nek milyen feltételek mellett létezik egy adott kezdeti feltételt is kielégítő megoldása.

6.4 Tétel. (Cauchy-Lipschitz-tétel). Legyen adott a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(\tau) = \underline{\xi} \tag{6.8}$$

kezdetiérték feladat és tételezzük fel, hogy ha $I_t = \{ t : |t - \tau| < a \}$ és $D = \{ \underline{x} \in R^n : \| \underline{x} - \underline{\xi} \| < b \}$, akkor $\underline{f} : I_t \times D \mapsto R^n$ folytonos, korlátos, vagyis van $M > 0$, hogy $\| \underline{f}(t, \underline{x}) \| < M$, továbbá kielégíti $\underline{x}$-ben az egységes Lipschitz-feltételt az $I_t \times D$ tartományon az L Lipschitz-állandóval. Legyen

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M}\right);$$

ekkor a (6.8) kezdetiérték feladatnak van egy és csak egy a $K_{\tau, \alpha} = (\tau - \alpha, \tau + \alpha)$ intervallumon értelmezett $\underline{x}(t)$ megoldása.

Bizonyitás. Ugyanugy, ahogy a 2.1 Tétel kimondása után megmutattuk, belátható, hogy a (6.8) kezdetiérték feladat megoldása ekvivalens az

$$\underline{x} = \underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{x})\, d\vartheta \tag{6.9}$$

integrálegyenlet megoldásával a következő értelemben: ha egy függvény (6.8) megoldása, akkor (6.9) -nek is megoldása, és ha egy folytonos függvény (6.9) megoldása, akkor folytonosan differenciálható és (6.8) -nak is megoldása. A (6.9) integrálegyenlet megoldásának létezését a "Picard-féle sorozatos közelitéssel" (szukcessziv approximációval) mutatjuk ki. Definiálunk egy függvénysorozatot, és arról bebizonyitjuk, hogy konvergens és határfüggvénye (6.9) folytonos megoldása. A függvénysorozat a következő:

$$\underline{x}^0(t) = \underline{\xi} \ ,$$

$$\underline{x}^k(t) = \underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{x}^{k-1}(\vartheta))\, d\vartheta, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (6.10)$$

(Az $\underline{x}^k(t)$ függvényt a megoldás k-adik approximációjának nevezzük). Először bebizonyitjuk, hogy $(t, \underline{x}^k(t)) \in I_t \times D$, ha $t \in K_{\tau,\alpha}$, $k \in T$. $k = 0$ -ra $\| x^0(t) - \underline{\xi} \| = \| \underline{0} \| < M\alpha \leq b$. Tételezzük fel, hogy $(t, \underline{x}^k(t)) \in I_t \times D$, ha $t \in K_{\tau,\alpha}$, pontosabban azt, hogy

$$\| \underline{x}^k(t) - \underline{\xi} \| < M\alpha \leq b \ .$$

Ekkor (6.3) felhasználásával

$$\| \underline{x}^{k+1}(t) - \underline{\xi} \| = \left\| \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{x}^k(\vartheta))\, d\vartheta \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\tau}^{t} \| \underline{f}(\vartheta, \underline{x}^k(\vartheta)) \|\, d\vartheta \right| \ .$$

Az indukciós feltevés szerint $(\vartheta, \underline{x}^k(\vartheta)) \in I_t \times D$, $\vartheta \in K_{\tau,\alpha}$, de ezen a tartományon $\underline{f}$ korlátos, tehát

$$\| \underline{x}^{k+1}(t) - \underline{\xi} \| \leq \left| \int_{\tau}^{t} M\, d\vartheta \right| < \int_{\tau}^{\tau+\alpha} M\, d\vartheta =$$

$$= M\alpha \leq b, \qquad t \in K_{\tau,\alpha} \ .$$

Ezek szerint a (6.10) rekurziós formulával értelmezett függvénysorozat minden tagja értelmezve van a $K_{\tau,\alpha}$ intervallumon és $(t, \underline{x}^k(t)) \in I_t \times D$. Legyen $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$ és képezzük a következő függvénysort:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underline{z}^k(t), \qquad t \in [\tau - \tilde{\alpha}, \quad \tau + \tilde{\alpha}] \quad ,$$

ahol

$$\underline{z}^0(t) = \underline{x}^0(t) = \underline{\xi} \quad ,$$

$$\underline{z}^k(t) = \underline{x}^k(t) - \underline{x}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots. \quad .$$

Bebizonyitjuk (matematikai indukcióval), hogy ez a függvénysor majorálható egy konvergens numerikus sorral.

$$\| \underline{z}^1(t) \| = \| \underline{x}^1(t) - \underline{x}^0(t) \| \leq \| \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{\xi})\, d\vartheta \| \leq M |t - \tau| \leq$$

$$\leq M \tilde{\alpha} = \frac{M}{L} \cdot \frac{L\tilde{\alpha}}{1!} \quad ,$$

$t \in [\tau - \tilde{\alpha}, \; \tau + \tilde{\alpha}]$. Tételezzük fel, hogy

$$\| \underline{z}^k(t) \| = \| \underline{x}^k(t) - \underline{x}^{k-1}(t) \| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t-\tau|)^k}{k!} \leq \frac{M}{L} \frac{(L\tilde{\alpha})^k}{k!} \quad .$$

Ekkor (6.3), (6.7) és az indukciós feltevés felhasználásával

$$\| \underline{z}^{k+1}(t) \| = \| \underline{x}^{k+1}(t) - \underline{x}^k(t) \| =$$

$$= \| \int_{\tau}^{t} (\underline{f}(\vartheta, \underline{x}^k(\vartheta)) - \underline{f}(\vartheta, \underline{x}^{k-1}(\vartheta))\, d\vartheta \| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\tau}^{t} L \| \underline{x}^k(\vartheta) - \underline{x}^{k-1}(\vartheta) \| \, d\vartheta \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{\tau}^{t} \frac{M}{L} \frac{(L|\vartheta - \tau|)^k}{k!} d\vartheta \right| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t-\tau|)^{k+1}}{(k+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{M}{L} \frac{(L\tilde{\alpha})^{k+1}}{(k+1)!} .$$

Ezek szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} \underline{z}^k(t)$ függvénysornak van konvergens majoráns numerikus sora:

$$\|\underline{\xi}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(L\tilde{\alpha})^k}{k!} ,$$

tehát a függvénysor a $[\tau - \tilde{\alpha} . \tau + \tilde{\alpha}]$ intervallumon egyenletesen konvergens (lásd IV. Kötet, 4.5 Tétel. Ez a tétel "skalárfüggvényekre vonatkozik", és itt egy vektor-skalár függvényekből álló sorról van szó. Azonban $\sum_{k=0}^{\infty} \underline{z}^k(t) = (\sum_{k=0}^{\infty} z_1^k(t), \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} z_n^k(t))$, és $| z_i^k(t) | \leq \| \underline{z}^k(t) \|$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $k \in T$). Mivel a függvénysor k-adik részletösszege az $\underline{x}^k(t)$ függvény, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ezért a (6.10) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $(\tau - \alpha , \tau + \alpha)$ intervallum minden zárt részintervallumán. A határfüggvény legyen $\underline{x}(t)$,

$$\underline{x}(t) = \lim_{k \to \infty} \underline{x}^k(t) .$$

$\underline{x}(t)$, $t \in (\tau - \alpha, \tau + \alpha)$ folytonos függvény, mert egyenletesen konvergens folytonos függvénysorozat határfüggvénye (lásd IV. Kötet, 4.6 Tétel). Továbbá $(t, \underline{x}(t)) \in I_t \times D$, $t \in (\tau - \alpha, \tau + \alpha)$. Ugyanis minden $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$ -ra, $0 < \varepsilon < M(\alpha - \tilde{\alpha})$ esetén az $\underline{x}^k(t)$, $k \in T$ végtelen függvénysorozat egyenletes konvergenciája miatt ε -hoz van $k \in T$, hogy

$$\| \underline{x}(t) - \underline{x}^k(t) \| < \varepsilon , \quad t \in (\tau - \tilde{\alpha}, \tau + \tilde{\alpha})$$

és igy

$$\|\underline{x}(t) - \underline{\xi}\| \leq \| \underline{x}(t) - \underline{x}^k(t)\| + \|\underline{x}^k(t) - \underline{\xi}\| <$$

$$< \varepsilon + M\tilde{\alpha} < M\alpha \ .$$

Most megmutatjuk, hogy az $\underline{x}(t)$ függvény (6.9) megoldása. Érvényes ugyanis $\underline{f}$ -re a Lipschitz-feltétel:

$$\| \underline{f}(t, \underline{x}^k(t)) - \underline{f}(t, \underline{x}(t))\| \leq L \| \underline{x}^k(t) - \underline{x}(t)\| \quad .$$

Emiatt

$$\lim_{k \to \infty} \underline{f}(t, \underline{x}^k(t)) = \underline{f}(t, \underline{x}(t)) \quad ,$$

és a konvergencia egyenletes. Igy

$$\underline{x}(t) = \lim_{k \to \infty} \underline{x}^{k+1}(t) = \lim_{k \to \infty} \left(\underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{x}^k(\vartheta))\, d\vartheta \right) =$$

$$= \underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \lim_{k \to \infty} \underline{f}(\vartheta, \underline{x}^k(\vartheta))\, d\vartheta = \underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{x}(\vartheta))\, d\vartheta ,$$

(lásd IV. Kötet, 5.3 Tétel). Tehát $\underline{x}(t)$, $t \in (\tau - \alpha . \tau + \alpha)$ valóban kielégiti (6.9) -et, vagyis a (6.8) kezdetiérték feladat megoldása.

Végül bebizonyitjuk az $\underline{x}(t)$ megoldás unicitását (egyértelmüségét) a $K_{\tau,\alpha}$ intervallumon. Tegyük fel, hogy van másik $\tilde{\underline{x}}(t)$ megoldás is. Megmutatjuk, hogy $\underline{x}(t) \equiv \tilde{\underline{x}}(t)$, $t \in (\tau - \alpha, \tau + \alpha)$. Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta > 0$, hogy

$$\| \underline{x}(t) - \underline{x}(\tau)\| < \varepsilon \quad , \quad |t - \tau| < \delta$$

és

$$\| \tilde{\underline{x}}(t) - \tilde{\underline{x}}(\tau)\| < \varepsilon \quad , \quad |t - \tau| < \delta \quad .$$

Ekkor mivel

$$\underline{x}(\tau) = \tilde{\underline{x}}(\tau) = \underline{\xi} \quad ,$$

ezért

$$\| \underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)\| \leq \|\underline{x}(t) - \underline{\xi}\| + \|\underline{\xi} - \tilde{\underline{x}}(t)\| < 2\varepsilon \quad .$$

Másrészt, mivel mindkét függvény kielégiti (6.9) -et, ezért

$$\|\underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)\| = \left\| \int_{\tau}^{t} \underline{f}(\vartheta, \underline{x}(\vartheta)) - \underline{f}(\vartheta, \tilde{\underline{x}}(\vartheta))\, d\vartheta \right\| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{\tau}^{t} \|\underline{x}(\vartheta) - \tilde{\underline{x}}(\vartheta)\|\, d\vartheta \right| < 2\,\varepsilon\, L\, |t - \tau| \;,$$

ahol felhasználtuk (6.3) -at és a Lipschitz feltételt. Tegyük fel, hogy

$$\|\underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)\| < 2\,\varepsilon\, \frac{L^k\, |t - \tau|^k}{k\,!} \;, \tag{6.11}$$

akkor

$$\|\underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)\| \leq \left| \int_{\tau}^{t} \|\underline{f}(\vartheta, \underline{x}(\vartheta)) - \underline{f}(\vartheta, \tilde{\underline{x}}(\vartheta))\|\, d\vartheta \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{\tau}^{t} \|\underline{x}(\vartheta) - \tilde{\underline{x}}(\vartheta)\|\, d\vartheta \right| <$$

$$< L \left| \int_{\tau}^{t} 2\varepsilon\, \frac{L^k\, |\vartheta - \tau|^k}{k\,!}\, d\vartheta \right| < 2\,\varepsilon\, \frac{L^{k+1}\, |t - \tau|^{k+1}}{(k+1)\,!} \;.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $k \in T$ -re fennáll a (6.11) becslés. De $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{(L\,|t - \tau|)^k}{k\,!} = 0$ miatt ez a két megoldás azonosságát jelenti a $K_{\tau,\delta}$ környezetben:

$$\underline{x}(t) \equiv \tilde{\underline{x}}(t) \;, \qquad |t - \tau| < \delta \;.$$

Jelölje (t_1, t_2) azt a maximális intervallumot, melyre az azonosság fennáll. Ha $(\tau - \alpha, \tau + \alpha) \subset (t_1, t_2)$, akkor állitásunkat bebizonyitottuk. Tegyük fel például, hogy $\tau - \alpha < t_1 < \tau$.

Az $\underline{x}(t)$ és $\underline{\tilde{x}}(t)$ függvények folytonosságából

$$\underline{x}(t_1) - \underline{\tilde{x}}(t_1) = \lim_{t \to t_1+0} (\underline{x}(t) - \underline{\tilde{x}}(t)) = 0$$

következik. De akkor a $(t_1, \underline{x}(t_1)) = (t_1, \underline{\tilde{x}}(t_1))$ pontra alkalmazható az előbbi gondolatmenet, igy e pontnak van környezete, melyben $\underline{x}(t) \equiv \underline{\tilde{x}}(t)$. Ez ellentmond annak, hogy (t_1, t_2) a maximális intervallum, melyben az azonosság fennáll.!

A 2.1 Tétel, melynek bizonyitását ott elhagytuk, a 6.3 és 6.4 Tétel közvetlen következménye.

Mint az 5. pontban utaltunk rá, a 6.3 Tétel bizonyitásában bemutatott szukcessziv approximáció a differenciálegyenletek közelitő megoldásának módszerei közé tartozik. Ezt illusztrálja a következő

6.3 Példa. Megoldjuk a $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ kezdetiérték feladatot a szukcessziv approximáció módszerével:

$$y^0 = 1,$$

$$y^1(x) = 1 + \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right) dt = 1 - [\ln t]_1^x = 1 - \ln x,$$

$$y^2(x) = 1 + \int_1^x \left(-\frac{1 - \ln t}{t}\right) dt = 1 - \ln x + \frac{\ln^2 x}{2},$$

$$------$$

ha

$$y^k(x) = 1 - \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} - + \ldots + (-1)^k \frac{\ln^k x}{k!},$$

akkor

$$y^{k+1}(x) = 1 + \int_1^x \frac{-1 + \ln t - + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{\ln^k t}{k!}}{t} dt =$$

$$= 1 - \ln x + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{\ln^{k+1} x}{(k+1)!} .$$

Tehát

$$y(x) = \lim_{k \to \infty} y^k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln x)^k}{k!} = e^{-\ln x} = -\frac{1}{x} .$$

(v.ö.: 5.1 Példa).

A 6.2 és 6.4 Tételből közvetlenül adódik a

6.5 Következmény. Legyen adott az

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y^{(k-1)}(\tau) &= \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{6.12}$$

kezdetiérték feladat és tételezzük fel, hogy az $I_t = \{t : |t - \tau| < a\}$,

$D = \{\underline{x} \in R^n : [\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2]^{\frac{1}{2}} < b\}$ jelölésekkel

$f : I_t x D \mapsto R$ folytonos, korlátos, vagyis van M, hogy $|f(t, \underline{x})| < M$, továbbá $f'_{x_k} \in C^0_{I_t xD}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és legyen $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$; akkor a (6.12) kezdetiérték feladatnak van egy és csak egy, a $(\tau - \alpha, \tau + \alpha)$ intervallumon értelmezett y(t) megoldása.

Igen fontos kérdés annak a vizsgálata, hogy valamely differenciálegyenlet rendszer megoldásai hogyan függnek a kezdeti értékektől. Ha ugyanis a differenciálegyenlet rendszer valamilyen fizikai, vagy egyéb rendszert ir le, a valóságban előirt kezdeti feltételeket csak pontatlanul lehet megvalósitani. Jelölje $\underline{x}(t; \tau, \underline{\xi})$ a $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x})$ differenciálegyenlet rendszer azon megoldását, melyre $\underline{x}(\tau; \tau, \underline{\xi}) = \underline{\xi}$ (vagyis feltüntettük azt, hogy a megoldása a kezdeti értékektől is függ).

6.6 Tétel. Ha a $\frac{dx}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x})$ differenciálegyenlet rendszerre teljesülnek a 6.4 Tétel feltételei, akkor az $\underline{x}(t\,;\,\tau, \underline{\xi})$ megoldás (mint a kezdeti értékek függvénye) folytonos függvény.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy a (6.10) rekurziós formulával értelmezett függvénysorozat minden $\underline{x}^k(t)$ tagja, mint t, τ és $\underline{\xi}$ ((n+2)-változós) függvénye folytonos. Ha a 6.4 Tételben szereplő τ és $\underline{\xi}$ értékeket most τ_0-lal és $\underline{\xi}^0$-lal jelöljük, akkor könnyen belátható, hogy a $t = \tau_0$, $\tau = \tau_0$, $\underline{\xi} = \underline{\xi}^0$ pont elég kis környezetében az $\underline{x}^k(t\,;\,\tau, \underline{\xi})$ sorozat konvergenciája egyenletes. Ebből pedig a IV. Kötet, 4.3 Tétel alapján (mely többváltozós függvények sorozatára ugyanugy bizonyitható) következik a határfüggvény $\underline{x}(t;\,\tau, \underline{\xi})$ folytonossága. ∎

7. Lineáris rendszerek

Legyen adott az $I_t = (a, b)$ nyilt intervallum és az $a_{ik} : I_t \mapsto R$, $b_i : I_t \mapsto R$, i, k = 1, 2, ..., n folytonos függvények. Vizsgáljuk a következő lineáris differenciálegyenlet rendszert:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \;,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \;,$$

- - - - - - -

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \;. \tag{7.1}$$

Nyilvánvalóan a (7.1) rendszer (6.1)-nek speciális esete, tehát bevezetve az $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i$, i = 1, 2, ..., n jelölést, (7.1) is összefoglalható a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}) \tag{7.2}$$

alakban.

Az R^n tér elemeit n- dimenziós oszlopvektoroknak (oszlopmátrixoknak) tekintjük, továbbá bevezetjük az n-edrendű

$$\underline{A} = [a_{ik}]$$

mátrixot. Ekkor (7.2) a következőképpen irható:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{b}(t) \ . \tag{7.3}$$

(7.3) megoldása az az $I \subset I_t$ intervallumon differenciálható

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

vektor-skalár függvény (mátrix-skalár függvény), melyre teljesül a következő azonosság:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ ----- & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \dots a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} .$$

7.1 Tétel. Legyenek $a_{ik} \in C^0_{(a,b)}$, $b_i \in C^0_{(a,b)}$, $i, k = 1,2,\dots, n$ és $\underline{A} = [a_{ik}]$ n-edrendű mátrix, $\underline{b} = [b_i]$-n dimenziós oszlopvektor.

Legyen adva $\tau \in (a,b)$ és $\underline{\xi} \in R^n$, valamint a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \; ,$$

$$\underline{x}(\tau) = \underline{\xi} \qquad (7.4)$$

kezdetiérték feladat. Ekkor van K_τ környezet, hogy (7.4) -nek van egy és csak egy K_τ -n értelmezett $\underline{x}(t)$ megoldása.

Bizonyitás. Mivel $((a,b)x\, R^n)$ nyilt tartomány, van $K^1_{(\tau,\,\underline{\xi})}$ környezet, melynek lezártjára fennáll $\bar{K}^1_{(\tau,\,\underline{\xi})} \subset ((a,b)x\, R^n)$. Az $\underline{A}(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$ függvény folytonos a $\bar{K}^1_{(\tau,\,\underline{\xi})}$ korlátos és zárt tartományon, tehát Weierstrass tétele (V. Kötet, 4.6 Tétel) szerint korlátos. Az $\underline{f}(t,\underline{x}) = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$ függvény teljesiti a 6.3 Tétel feltételeit (ugyanis $f'_{ix_k} = a_{ik}$, i, k = = 1, 2, ..., n), tehát eleget tesz a lokális Lipschitz-feltételnek. Igy van $K^2_{(\tau,\,\underline{\xi})}$, melyben e függvény eleget tesz az egységes Lipschitz-feltételnek. Ezek alapján a 6.4 Tétel alkalmazható olyan I_t x D nyilt tartományra, melyre $I_t \times D \subset K^1_{(\tau,\,\underline{\xi})} \cap K^2_{(\tau,\,\underline{\xi})}$. A 6.4 Tétel alapján van K_τ, hogy (7.4)-nek létezik egyértelmü $\underline{x}(t)$, $t \in K_\tau$ megoldása.!

Megjegyezzük, hogy a 7.1 Tétel állitásánál erősebb állitás is bizonyitható, ti. az, hogy (7.4) -nek az egyértelmüen létező $\underline{x}(t)$ megoldása az egész (a,b) intervallumon értelmezve van (a bizonyitást lásd pl. [3]). A továbbiakban a tételt ilyen formájában használjuk.

A 7.3 differenciálegyenlet rendszer vizsgálatát a $\underline{b}(t) \equiv 0$ esettel, vagyis a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\,\underline{x} \qquad (7.5)$$

homogén rendszer vizsgálatával folytatjuk. A megoldáshalmaz szerkezetének tanulmányozásához néhány fogalomra van szükségünk.

7.1 Definició. Az (a,b) intervallumon értelmezett $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^k$ vektor-skalár függvényeket az (a,b) intervallumon lineárisan függetleneknek nevezzük, ha

$$c_1\underline{x}^1(t) + c_2\underline{x}^2(t) + \dots + c_k\underline{x}^k(t) = 0$$

minden $t \in (a,b)$ -re csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ $(c_i \in R,\ i = 1,2,\dots,k)$.

7.2 Definició. Az (a,b) intervallumon értelmezett $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots \underline{x}^k$ függvényeket az (a,b) intervallumon lineárisan összefüggőknek nevezzük, ha nem függetlenek, azaz ha van $c_1, c_2, \dots, c_k$ valós szám k-as hogy $|c_1| + |c_2| \dots + |c_k| > 0$ és $c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 + \dots + c_k\underline{x}^k \equiv 0$.

7.3 Definició. Az (a,b) intervallumon értelmezett $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ vektor-skalár függvényrendszer Wronski-féle determinánsának nevezzük a

$$W(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 \dots & x_2^n \\ - & - - - & - \\ x_n^1 & x_n^2 \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

determinánst.

(v.ö.: 3.1, 3.2, 3.3 Definició)

7.2 Tétel. Ha $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ lineárisan összefüggők az (a,b) intervallumon, akkor

$$W(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n) \equiv 0.$$

Bizonyitás. A 7.2 Definició alapján van $c_1, c_2, \dots, c_n$ valós szám n-es, hogy

$$|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| > 0$$

és

$$c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 + \dots + c_n\underline{x}^n \equiv 0 .$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$c_1x_1^1(t) + c_2x_1^2(t) + \dots + c_nx_1^n(t) = 0 ,$$

$$c_1x_2^1(t) + c_2x_2^2(t) + \dots + c_nx_2^n(t) = 0 ,$$

$$c_1x_n^1(t) + c_2x_n^2(t) + \dots + c_nx_n^n(t) = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszernek $t \in (a,b)$ esetén van nem triviális $c_1, c_2, \dots, c_n$ megoldása. Ez csak ugy állhat fenn, (lásd III. Kötet, 14.4 Következmény), ha minden $t \in (a,b)$ -re a rendszer determinánsa zérus, azaz $W(\underline{x}^1(t), \underline{x}^2(t), \dots, \underline{x}^n(t)) = 0$. !

A tétel megforditása nem igaz, ezt bizonyitja a következő

7.1 Példa. Legyen

$$\underline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} , \qquad \underline{x}^2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad t \in R .$$

Nyilványalóan igaz, hogy $W(\underline{x}^1, \underline{x}^2) \equiv 0$. Ugyanakkor az $\underline{x}^1$ és $\underline{x}^2$ függvények lineárisan függetlenek a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, ui. a

$$c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 \equiv 0$$

azonosságból az következik, hogy minden $t \in R$ -re

$$c_1 t + c_2 = 0 .$$

Mivel egy pontosan elsőfoku polinom egynél több helyen nem lehet zérus, $c_1 = 0$. Ennek következtében azonban $c_2 = 0$.

7.3 Tétel. Legyenek $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^k$ (7.5) megoldásai és $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tetszőleges állandók, akkor a $\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i$ függvény is (7.5) megoldása.

Bizonyitás. Helyettesitsük be (7.5) -be a $\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i$ függvényt, akkor a következő azonosság adódik:

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i(t)\right)}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{d\underline{x}^i(t)}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i \underline{A}(t)\underline{x}^i(t) \equiv$$

$$\equiv \underline{A}(t)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i(t)\right) . !$$

Bár a 7.2 Tétel megforditása, mint láttuk, általában nem igaz, egy homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldásaira érvényes a következő

7.4 Tétel. Ha az (a,b) intervallumon értelmezett $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ függvények (7.5) megoldásai és van $t_0 \in (a,b)$, hogy

$$W(\underline{x}^1(t_0), \underline{x}^2(t_0), \ldots, \underline{x}^n(t_0)) = 0 ,$$

akkor az $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ függvények lineárisan összefüggők (a,b)-n.

Bizonyitás. A feltételekből következik, hogy a

$$c_1 x_1^1(t_0) + c_2 x_1^2(t_0) + \ldots + c_n x_1^n(t_0) = 0 \,,$$

$$c_1 x_2^1(t_0) + c_2 x_2^2(t_0) + \ldots + c_n x_2^n(t_0) = 0 \,,$$

$$- - - - -$$

$$c_1 x_n^1(t_0) + c_2 x_n^2(t_0) + \ldots + c_n x_n^n(t_0) = 0 \qquad (7.6)$$

egyenletrendszernek van nem triviális $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*$ megoldása. Tekintsük az

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \underline{x}^i(t) \quad \text{függvényt;}$$

ez a 7.3 Tétel alapján (7.5) megoldása és kielégiti az $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$ kezdeti feltételt. Ilyen megoldás viszont $\underline{x} \equiv 0$, ami a 7.1 Tétel felhasználásával (unicitás!) azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^* \underline{x}^i \equiv 0 \,.$$

Ez viszont az adott függvények lineáris összefüggését jelenti az (a, b) intervallumon.!

7.5 Tétel. (7.5)-nek az (a, b)-n értelmezett $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ megoldásai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha van $t_0 \in (a,b)$, melyre

$$W(\underline{x}^1(t_0), \underline{x}^2(t_0), \ldots, \underline{x}^n(t_0)) \neq 0 \,.$$

Bizonyitás. Ha $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ lineárisan függetlenek, akkor kell, hogy minden $t \in (a,b)$-re $W(\underline{x}^1(t), \underline{x}^2(t), \dots, \underline{x}^n(t)) \neq 0$ legyen, mert ha van $t_0 \in (a,b)$, melyre ez nem áll fenn, akkor a 7.4 Tétel miatt $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ lineárisan összefüggők lennének. Forditva, ha van $t_0 \in (a,b)$, melyre

$$W(\underline{x}^1(t_0), \underline{x}^2(t_0), \dots, \underline{x}^n(t_0)) \neq 0, \text{ akkor } \underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$$

lineárisan függetlenek, mert ha összefüggők lennének, akkor a Wronski determinánsuk mindenütt, igy a t_0 helyen is zérus lenne (lásd 7.2 Tétel).!

7.4 Definició. A (7.5) homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ megoldásainak halmazát alaprendszernek nevezzük, ha $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ lineárisan függetlenek.

7.6 Tétel. (7.5)-nek van alaprendszere.

Bizonyitás. Legyen $\tau \in (a,b)$, $\underline{C} = [c_{ik}]$ egy $(n \times n)$-es valós elemü reguláris mátrix, és határozzuk meg (7.5)-nek azokat a megoldásait, melyek rendre kielégitik az

$$\underline{x}^1(\tau) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}, \quad \underline{x}^2(\tau) = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{x}^n(\tau) = \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

kezdeti feltételeket. Az igy meghatározott $\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n\}$ halmaz, (7.5) alaprendszere, ugyanis a 7.5 Tétel szerint, ha van $\tau \in (a,b)$, melyre

$$\underline{W}(\underline{x}^1(\tau), \underline{x}^2(\tau), \dots, \underline{x}^n(\tau)) \neq 0, \text{ akkor az } \underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$$

függvények lineárisan függetlenek, és

$$W(\underline{x}^1(\tau), \underline{x}^2(\tau), \dots, \underline{x}^n(\tau)) = \det \underline{C} \neq 0 .!$$

7.7 Tétel. Legyen $\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n\}$ (7.5) alaprendszere, akkor (7.5) bármely $\underline{x}(t)$ megoldásához van egy és csak egy rendezett szám n-es $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ hogy $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{x}^i(t)$. (7.5) összes megoldásainak

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{x}^i(t) : c_i \quad R, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

halmazát, vagy rövidebben a $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{x}^i(t)$ n-paraméteres függvénysereget nevezzük a homogén differenciálegyenlet rendszer általános megoldásának.

Bizonyitás. A 7.3 Tételből következik, hogy $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{x}^i(t)$ valóban megoldás. Legyen $\underline{x}(t)$ valamely más megoldás, $t_0 \in (a, b)$ és tekintsük a

$$c_1 x_1^1(t_0) + c_2 x_1^2(t_0) + \dots + c_n x_1^n(t_0) = x_1(t_0),$$

$$c_1 x_2^1(t_0) + c_2 x_2^2(t_0) + \dots + c_n x_2^n(t_0) = x_2(t_0),$$

$$\dots$$

$$c_1 x_n^1(t_0) + c_2 x_n^2(t_0) + \dots + c_n x_n^n(t_0) = x_n(t_0)$$

egyenletrendszert. A rendszer determinánsa a 7.5 Tétel miatt nem zérus. Tehát a III. Kötet, 13.4 Tétel szerint van egyértelműen meghatározott $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$ megoldása.

Tekintsük most ezekkel a c_i^* értékekkel (7.5)-nek a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^* \underline{x}^i(t)$$

megoldását. Erre teljesül, hogy

$$\underline{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \underline{x}^i(t_0) ,$$

ami a megoldás egyértelmüsége miatt azt jelenti, hogy

$$\underline{x}(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i^* \underline{x}^i(t) . \tag{7.7}$$

Ha az előbbi azonosság mellett fennáll

$$\underline{x}(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i \underline{x}^i(t) ,$$

akkor az előbbit az utóbbiból kivonva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (\tilde{c}_i - c_i^*) \underline{x}^i(t) \equiv 0 .$$

Mivel azonban $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n$ lineárisan függetlenek, innen $\tilde{c}_i = c_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ következik, vagyis a (7.7) előállitás egyértelmü.!

A 7.7 Tétel valóban indokolja az alaprendszer elnevezést, hiszen ezen megoldások ismeretében az összes megoldás előállitható. A 7.7 Tételt ugy is szokták fogalmazni, hogy (7.5) lineárisan független megoldásainak maximális száma n.

Tekintsük most az előbbiekben definiált $\underline{A}$ mátrixszal a

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = \underline{A}\underline{X} \tag{7.8}$$

"mátrix-differenciálegyenletet". ($\underline{X}$ n-edrendű mátrix. Egy mátrixot ugy differenciálunk, hogy minden elemét differenciáljuk.) Könnyen belátható, hogy ha $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ (7.5) megoldásfüggvényei, akkor az

$$\underline{X}(t) = \left[\underline{x}^1(t), \underline{x}^2(t), \ldots, \underline{x}^n(t)\right]$$

mátrixfüggvény (melynek k-adik oszlopvektora $\underline{x}^k$) megoldása a fenti mátrix-differenciálegyenletnek. Ezek alapján, ha $\left\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n\right\}$ (7.5) alaprendszere, akkor az

$$\underline{X}(t) = \left[\underline{x}^1(t), \underline{x}^2(t), \ldots, \underline{x}^n(t)\right]$$

mátrix-függvényt (7.5) "alapmátrixának" nevezzük. Az alapmátrix reguláris. Általában, ha az $\underline{X}(t)$ n-edrendű reguláris mátrix kielégiti (7.8)-at, akkor (7.5) alapmátrixának nevezzük.

7.8 Tétel. Ha a (7.5) rendszer $\underline{x}(\tau) = \underline{\xi}$ kezdeti feltételt kielégitő megoldását keressük és $\underline{X}(t)$ (7.5) egy alapmátrixa, akkor a

$$\underline{c} = \underline{X}^{-1}(\tau)\,\underline{\xi}$$

jelöléssel a keresett megoldás

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(t)\,\underline{c}\,. \tag{7.9}$$

Bizonyitás. Tetszőleges állandó $\underline{c}$ oszlopvektorra $\underline{x}(t) = \underline{X}(t)\,\underline{c}$ (7.5) megoldásvektora, amint erről behelyettesitéssel könnyen meggyőződhetünk:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d\underline{X}(t)}{dt}\,\underline{c} = (\underline{A}(t)\,\underline{X}(t))\,\underline{c} = \underline{A}(t)\,(\underline{X}(t)\,\underline{c}) =$$

$$= \underline{A}(t)\,\underline{x}(t)\,.$$

Továbbá

$$\underline{x}(\tau) = \underline{X}(\tau)\,\underline{c} = \underline{X}(\tau)\,\underline{X}^{-1}(\tau)\,\underline{\xi} = \underline{\xi}\quad .!$$

A 7.8 Tételből nyilvánvaló, hogy tetszőleges $\underline{X}(t)$ alapmátrix oszlopvektorai (7.5) alaprendszerét alkotják.

Végül a 7.3 és 7.7 Tételek egyszerű következményeképpen kimondható a

7.9 Tétel. A (7.5) differenciálegyenlet rendszer megoldásai a folytonosan differenciálható függvények lineáris terének n-dimenziós alterét alkotják (lásd III. Kötet, 16.8 és 17.3 Definició).

Megjegyezzük, hogy alaprendszer, vagy akár egyetlen megoldás meghatározására kvadraturával nincs általános módszer. Ha azonban egy megoldás ismert, akkor további független megoldások meghatározása eggyel alacsonyabbdimenziós problémára vezet, más szóval egy megoldás ismeretében a homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer egyenleteinek száma és az ismeretlen függvények száma eggyel csökkenthető (lásd [6] I. 143. o.).

A továbbiakban vizsgáljuk a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \tag{7.10}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszert. Tételezzük fel, hogy a (7.10)-ben szereplő függvények teljesitik a 7.1 Tétel feltételeit, tehát minden τ, $\underline{\xi}$ -hez van egy és csak egy, az (a,b) intervallumon értelmezett $\underline{x}(t)$ megoldás, melyre $\underline{x}(\tau) = \underline{\xi}$.

7.10 Tétel. Ha $\underline{x}^1$ és $\underline{x}^2$ (7.10) megoldásai, akkor $\underline{x}^1 - \underline{x}^2$ a (7.5) homogén rendszer megoldása.

Bizonyitás. Mivel $\underline{x}^1$ és $\underline{x}^2$ (7.10) megoldásai, fennállnak az alábbi azonosságok:

$$\frac{d\underline{x}^1(t)}{dt} \equiv \underline{A}(t)\,\underline{x}^1(t) + \underline{b}(t) ,$$

$$\frac{d\underline{x}^2(t)}{dt} \equiv \underline{A}(t)\,\underline{x}^2(t) + \underline{b}(t) .$$

Ezek kivonásából a

$$\frac{d\underline{x}^1(t)}{dt} - \frac{d\underline{x}^2(t)}{dt} \equiv \underline{A}(t)\,\underline{x}^1(t) - \underline{A}(t)\,\underline{x}^2(t) \quad ,$$

vagyis a

$$\frac{d\,(\underline{x}^1(t) - \underline{x}^2(t))}{dt} \equiv \underline{A}(t)\,(\underline{x}^1(t) - \underline{x}^2(t))$$

azonosság következik. !

7.11 Következmény. Ha $\underline{x}^I$ (7.10) megoldása és $\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n\}$ (7.5) alaprendszere, akkor (7.10) összes megoldásainak halmaza:

$$\left\{\underline{x}^I + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{x}^j : c_j \in R, \quad j = 1,2,\dots, n\right\}.$$

Ezt a halmazt, vagy rövidebben az

$$\underline{x}^I + \sum_{j=1}^{n} c_j\, \underline{x}^j \quad n\text{ - paraméteres}$$

függvénysereget hivjuk az inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer általános megoldásának.

Bizonyitás. Legyen $\underline{x}$ (7.10) tetszőleges megoldása. Ekkor a 7.10 Tétel alapján az $\underline{x} - \underline{x}^I$ függvény (7.5) megoldása és igy a 7.7 Tétel alapján van $c_1, c_2, \dots, c_n$ valós szám n-es, hogy

$$\underline{x} - \underline{x}^I \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j\, \underline{x}^j \quad .!$$

(7.10) megoldásainak meghatározása (7.5) alaprendszerének (vagy ami ugyanaz, alapmátrixának) ismeretében az "állandók variálásának módszerével" történik.

__7.12 Tétel.__ ("__Az állandók variálása__") Ha $\underline{X}(t)$ (7.5) alapmátrixa, akkor van $\underline{c} : (a,b) \mapsto R^n$ differenciálható (oszlopvektor) függvény, melyre az

$$\underline{x}^I(t) = \underline{X}(t)\,\underline{c}(t) \tag{7.11}$$

függvény (7.10) megoldása.

Ha összevetjük (7.11)-et (7.9)-cel, látjuk, hogy az inhomogén rendszer $\underline{x}^I(t)$ megoldását a (7.9)-ben szereplő $\underline{c}$ állandó "variálásával" kapjuk, vagyis ugy, hogy a $\underline{c}$ állandó helyébe egy alkalmasan választott $\underline{c}(t)$ függvényt irunk.

__Bizonyitás.__ Amellett, hogy bebizonyitjuk a tételt, egyben explicit módon előállitjuk a (7.11)-ben szereplő $\underline{c}(t)$ függvényt. Tételezzük fel, hogy van $\underline{c}(t)$, melyre $\underline{X}(t)\,\underline{c}(t)$ a (7.10) inhomogén rendszer megoldása. E megoldást (7.10)-be helyettesitve a következő azonosságot nyerjük:

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{X}(t)\,\underline{c}(t)\right] \equiv \underline{A}(t)\,\underline{X}(t)\,\underline{c}(t) + \underline{b}(t) ,$$

vagyis

$$\frac{d\underline{X}(t)}{dt}\,\underline{c}(t) + \underline{X}(t)\,\frac{d\,\underline{c}(t)}{dt} \equiv \underline{A}(t)\,\underline{X}(t)\,\underline{c}(t) + \underline{b}(t) .$$

Innen

$$\underline{X}(t)\,\frac{d\,\underline{c}(t)}{dt} \equiv \left[\underline{A}(t)\,\underline{X}(t) - \frac{d\,\underline{X}(t)}{dt}\right]\,\underline{c}(t) + \underline{b}(t) ,$$

vagy, mivel $\underline{X}(t)$ a (7.8) mátrix differenciálegyenlet megoldása, és igy a jobb oldal első tagja azonosan zérus, ezért

$$\underline{X}(t)\,\frac{d\,\underline{c}(t)}{dt} \equiv \underline{b}(t) .$$

$\underline{X}(t)$ reguláris mátrix, létezik tehát inverze $\underline{X}^{-1}(t)$.

Szorozzuk meg az utóbbi azonosság mindkét oldalát balról $\underline{X}^{-1}(t)$-vel:

$$\frac{d\,\underline{c}(t)}{dt} \equiv \underline{X}^{-1}(t)\,\underline{b}(t)$$

adódik. Az utóbbi azonosságot integrálva (mátrixot ugy integrálunk, hogy minden elemét integráljuk)

$$\underline{c}(t) \equiv \int \underline{X}^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt \tag{7.12}$$

adódik.

(7.10)-be való közvetlen behelyettesitéssel kapjuk, hogy

$$\underline{x}^{I}(t) = \underline{X}(t)\int \underline{X}^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt \tag{7.13}$$

valóban az inhomogén rendszer megoldása.!

Ha (7.11)-ben az $\underline{X}(t)$ alapmátrix oszlopvektorait rendre $\underline{x}^{1}(t), \ldots, \underline{x}^{n}(t)$ -vel jelöljük, akkor $\{\underline{x}^{1}(t), \ldots, \underline{x}^{n}(t)\}$ (7.5) alaprendszere. Az állandók variálása elvének (7.11)-gyel ekvivalens alakja az, hogy ha $\{\underline{x}^{1}(t), \ldots, \underline{x}^{n}(t)\}$ (7.5) alaprendszere, akkor (7.10)-nek van

$$\underline{x}^{I}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,\underline{x}^{i}(t) \tag{7.14}$$

alaku megoldása és itt a $c_i(t)$ függvények a rendszerbe való behelyettesitéssel egyszerüen meghatározhatók.

<u>7.2 Példa.</u> Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet rendszer általános megoldását:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + (2-t)\,x_2 + t^2 + t,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t}\,x_1 + \left(\frac{1}{t} - 1\right)x_2 + t, \qquad t > 0\ .$$

Mátrixos alakba irva:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t} - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 + t \\ t \end{bmatrix} .$$

Először foglalkozzunk a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t} - 1 \end{bmatrix}\underline{x}$$

homogén egyenlettel. Behelyettesitéssel igazoljuk, hogy az $\underline{x}^1(t) = (t^2, t)$ vektor-skalár függvény megoldás. Ugyanis

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t} - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + 2t - t^2 \\ \frac{t^2}{t} + \frac{t}{t} - t \end{bmatrix}$$

valóban azonosan egyenlők. Megmutatjuk, hogy a homogén rendszernek van

$$\underline{x}^2(t) = v(t)\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z(t) \end{bmatrix}$$

alaku, $\underline{x}^1(t)$-től független megoldása. Itt v és z egyelőre ismeretlen függvények, melyekre éppen azáltal kapunk feltételeket, hogy az $\underline{x}^2$ függvényt behelyettesitjük a homogén rendszerbe.

Ekkor fenn kell állnia a következő azonosságnak:

$$\frac{dv(t)}{dt}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + v(t)\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t}-1 \end{bmatrix} \left(v(t)\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z(t) \end{bmatrix} \right),$$

amiből minden $t > 0$-ra a

$$\frac{dv(t)}{dt}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z(t) \end{bmatrix}$$

egyenlőség következik. Ebből

$$\frac{dv(t)}{dt} t^2 = (2-t)\, z(t) ,$$

ill.

$$\frac{dv(t)}{dt} t + \frac{dz(t)}{dt} = \left(\frac{1}{t} - 1\right) z(t) ,$$

ahonnan $v(t)$ kiküszöbölésével

$$\frac{dz(t)}{dt} = \left(\frac{1}{t} - 1\right) z(t) - \frac{2-t}{t} z(t) = -\frac{z(t)}{t} .$$

Tehát z kielégíti a

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{z}{t}$$

szétválasztható változóju differenciálegyenletet, azaz integrálással

$$z(t) = \frac{1}{t} .$$

Ezek szerint

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{t^2}(2-t)\frac{1}{t},$$

$$v(t) = \int \frac{2-t}{t^3}\,dt = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}.$$

Igy

$$\underline{x}^2(t) = \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Közvetlen behelyettesitéssel meggyőződhetünk arról, hogy $\underline{x}^2(t)$ valóban a homogén rendszer megoldása. Mivel $\det\left[\underline{x}^1(t),\ \underline{x}^2(t)\right] \neq 0$, $\underline{x}^1(t)$ és $\underline{x}^2(t)$ alaprendszert alkotnak, tehát az alapmátrix:

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t-1 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldására az állandó variálásának módszerét alkalmazzuk. A 7.12 Tétel alapján van $\underline{c} : (a,b) \mapsto R^2$ differenciálható függvény, hogy a $c_1(t)\,\underline{x}^1(t) + c_2(t)\,\underline{x}^2(t)$ függvény az inhomogén rendszer megoldása (lásd (7.14)), és

$$\underline{c} = \int \underline{X}^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt,$$

ahol példánkban

$$\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} t^2 + t \\ t \end{bmatrix},$$

$$\underline{X}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1-t}{t} \\ -1 & t \end{bmatrix},$$

$$\underline{X}^{-1}(t)\,\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1-t}{t} \\ -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1+1-t \\ -t^2-t+t^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c}(t) = \int \underline{X}^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt = \begin{bmatrix} 2t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Igy az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$\left\{(2t+k_1)\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + \left(-\frac{t^2}{2}+k_2\right)\begin{bmatrix} t-1 \\ 1 \end{bmatrix} : k_1, k_2 \in R\right\}.$$

8. Állandó együtthatós lineáris rendszer megoldása

A (7.3), ill. (7.5) n-dimenziós lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldására kvadraturával az $n \geq 2$ esetben nincs általános módszer. Fontos speciális eset az, amikor a rendszer együttható mátrixa állandó. Ez utóbbi esetben van módszerünk az általános megoldás meghatározására. Ezzel foglalkozunk ebben a pontban. Szükségünk van azonban bizonyos, a mátrix-analizis témakörébe tartozó előkészitésre.

Polinom-elemü mátrixnak (vagy "λ-mátrixnak") nevezzük azt a mátrixot, melynek elemei a λ változó polinomjai. Mátrix-együtthatóju polinomnak nevezzük azt a polinomot, melynek együtthatói azonos rendü négyzetes mátrixok. Minden polinom-elemü mátrix azonosan egyenlő (a változó minden komplex értékére egyenlő) egy mátrix-együtthatóju polinommal.

8.1 Példa. λ minden komplex értékére érvényes a következő azonosság:

$$\begin{bmatrix} 2\lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+1 \\ \lambda+1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \lambda^2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a bal oldalon álló mátrix elemei legfeljebb másodfoku polinomok, a jobb oldalon pedig egy mátrix együtthatóju másodfoku polinom áll.

8.1 Segédtétel. (Bézout tétele v.ö. III. Kötet, 7.2 Tétel).

Legyen $P(\lambda) = a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0$ m-edfoku polinom, $\underline{A}$, $\underline{C}_0$, $\underline{C}_1$, ..., $\underline{C}_{m-1}$ n-edrendü mátrixok,

$$\underline{C}(\lambda) = \underline{C}_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + \underline{C}_1 \lambda + \underline{C}_0$$

(m-1) -edfoku mátrix együtthatóju polinom és $\underline{E}$ az n-edrendü egységmátrix; ha

$$P(\lambda)\,\underline{E} = (\underline{A} - \lambda \underline{E})\ \underline{C}(\lambda) \ ,$$

akkor

$$P(\underline{A}) = a_m \underline{A}^m + \dots + a_1 \underline{A} + a_0 \underline{E} = \underline{0} \ ,$$

ahol $\underline{0}$ az n-edrendü zérusmátrix.

Megjegyezzük, hogy a látszólag triviális tétel külön bizonyitására ezért van szükség, mivel a mátrix-szorzás általában nem kommutativ. Megjegyezzük továbbá, hogy valamely $P(\lambda)$ polinom értékét az $\underline{A}$ négyzetes mátrixon ugy kapjuk, hogy a λ változó helyébe $\underline{A}$-t helyettesitjük és a polinom konstans tagját a megfelelő rendü egységmátrixszal szorozzuk.

Bizonyitás.

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E})\,\underline{C}(\lambda) = \underline{A}\,\underline{C}_0 + \lambda(\underline{A}\,\underline{C}_1 - \underline{C}_0) + \lambda^2(\underline{A}\,\underline{C}_2 - \underline{C}_1) + \dots -$$

$$- \underline{C}_{m-1} \lambda^m \ .$$

Mivel a feltevés szerint a $P(\lambda)\,\underline{E}$ polinom azonosan egyenlő az utóbbi polinommal, a megfelelő együtthatóknak meg kell egyezniük:

$$a_m \underline{E} = - \underline{C}_{m-1}$$

$$a_{m-1}\ \underline{E} = \underline{A}\ \underline{C}_{m-1} - \underline{C}_{m-2}$$

$$\vdots$$

$$a_2 \underline{E} = \underline{A}\,\underline{C}_2 - \underline{C}_1$$

$$a_2 \underline{E} = \underline{A}\,\underline{C}_1 - \underline{C}_0$$

$$a_0 \underline{E} = \underline{A}\,\underline{C}_0$$

Szorozzuk meg balról az első egyenlőséget $\underline{A}^m$-mel, a másodikat $\underline{A}^{m-1}$-nel, stb. az utolsó előttit $\underline{A}$-val, az utolsót $\underline{E}$-vel és adjuk össze az egyenlőségeket. A jobb oldalon a tagok rendre kiesnek és azt kapjuk, hogy

$$a_m \underline{A}^m + a_{m-1} \underline{A}^{m-1} + \ldots + a_2 \underline{A}^2 + a_1 \underline{A} + a_0 \underline{E} = \underline{0} \; .$$

<u>8.2 Tétel.</u> <u>(Cayley-Hamilton tétel).</u>
Minden négyzetes mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét (lásd III. Kötet, 14.3 Definíció), vagyis ha $\underline{A}$ n-edrendű négyzetes mátrix és

$$D(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = (-1)^n \lambda^n +$$

$$+ d_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + d_1 \lambda + d_0 ,$$

akkor

$$D(\underline{A}) = (-1)^n \underline{A}^n + d_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \ldots$$

$$+ d_1 \underline{A} + d_0 \underline{E} = \underline{0} ,$$

ahol $\underline{0}$ az n-edrendű zérusmátrix.

<u>Bizonyítás.</u> Jelöljük az $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ mátrix asszociáltját $(\underline{A} - \lambda \underline{E})^*$-gal. A III. Kötet, 11.1 Segédtétel szerint

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E})(\underline{A} - \lambda \underline{E})^* = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \,.\, \underline{E} = D(\lambda)\, \underline{E} \; .$$

Miután az $(\underline{A} - \lambda \underline{E})^*$ mátrix elemei az $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ mátrix determinánsának (n-1)-edrendű aldeterminánsai, $(\underline{A} - \lambda \underline{E})^*$ olyan mátrix, melynek elemei legfeljebb (n-1)-edfokú polinomok.

Ekkor azonban $(\underline{A} - \lambda \underline{E})^{*}$ (n-1)-edfoku mátrix-együtthatóju polinomnak tekinthető, és $P(\lambda) = D(\lambda)$ -val a 8.1 Segédtétel alkalmazható.!

Szükségünk lesz a Lagrange-féle interpolációs polinom egy elvileg egyszerű és természetes általánositására, melyet a következő tételben fogalmazunk meg (v.ö. II. Kötet, 2.9 Tétel). A tételt hely hiányában nem bizonyitjuk (a bizonyitást lásd [2]II. 22. o.).

8.3 Tétel. Ha előirjuk valamely (általában komplex) polinom értékét, első, második, stb. (m_i-1)-edik deriváltjának az értékét a λ_i helyen $(i = 1, 2, \ldots, \ell;\ \lambda_i \neq \lambda_k,\ i \neq k)$,

és

$$n = \sum_{i=1}^{\ell} m_i,$$ akkor van egy és csak egy legfeljebb (n-1)-edfoku polinom, mely deriváltjaival együtt az adott helyeken az előirt értékeket veszi fel. Ezt a polinomot az előirt értékrendszerhez tartozó Hermite-féle interpolációs polinomnak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a Lagrange-féle interpolációs polinom a Hermite-féle polinom azon speciális esete, amikor $m_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, \ell;\ \ell = n$.

Ha az Hermite-féle interpolációs polinom

$$h(\lambda) = h_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + h_1\lambda + h_0,$$ akkor a

$$h^{(k)}(\lambda_i) = H_{ik},\quad (i = 1, 2, \ldots, \ell;\quad k = 0, 1, \ldots, m_i-1),$$

feltételek (H_{ik} az előirt értékek) n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert alkotnak az ismeretlen $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ együtthatók meghatározására.

Most értelmezzük analitikus függvény értékét valamely négyzetes mátrixon. A "függvényérték" ugyanolyan rendű négyzetes mátrix lesz. Az értelmezés azon alapul, hogy természetes módon már értelmeztük polinom értékét mátrixon.

8.1 Definició. Legyen f (komplex) analitikus függvény:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k ,$$

és $\underline{A}$ négyzetes mátrix; definició szerint

$$f(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{A}^k \tag{8.1}$$

vagyis, ha f hatványsorának N-edik részletösszegét $s_N(\lambda)$ -val jelöljük,

$$s_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} c_k \lambda^k ,$$

akkor

$$f(\underline{A}) = \lim_{N\to\infty} s_N(\underline{A}) . \tag{8.2}$$

Egy mátrix-sorozatról akkor mondjuk, hogy egy adott mátrixhoz konvergál, ha mindegyik a megfelelő helyen álló elemekből alkotott sorozat a "limes-mátrix" megfelelő eleméhez tart.

8.4 Tétel. Legyen

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$$

analitikus függvény és $\underline{A}$ n-edrendű mátrix; ha f hatványsorának (nyilt) konvergencia köre tartalmazza $\underline{A}$ összes sajátértékét (lásd III. Kötet, 14.2 Definició), akkor "f az $\underline{A}$ helyen értelmezve van", vagyis az $f(\underline{A})$ n-edrendű mátrix létezik.

Bizonyitás. A következő bizonyitás egyben módszert ad $f(\underline{A})$ meghatározására anélkül, hogy a (8.1) végtelen mátrix-tagu sort összegezni kellene. Legyenek az $\underline{A}$ mátrix különböző sajátértékei λ_i, $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ és a

λ_i sajátérték multiplicitása legyen m_i $(n = \sum_{i=1}^{\ell} m_i)$. Ezek szerint az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$D(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} .$$

Legyen f hatványsorának N-edik részletösszege $s_N(\lambda)$ és osszuk el az $s_N(\lambda)$ N-edfoku plinomot a $D(\lambda)$ n-edfoku karakterisztikus polinommal. A hányadost $q_N(\lambda)$ -val, a maradékot $r_N(\lambda)$ -val jelölve

$$s_N(\lambda) = D(\lambda)\, q_N(\lambda) + r_N(\lambda) , \quad (N = 1, 2, \ldots) .$$

Felhivjuk a figyelmet arra a fontos tényre, hogy minden N-re az $r_N(\lambda)$ polinom fokszáma legfeljebb (n-1), vagyis N-től független. Az előbbi azonosságot rendezve

$$s_N(\lambda) - r_N(\lambda) = D(\lambda)\, q_N(\lambda) . \tag{8.3}$$

Innen

$$\left[s_N(\lambda) - r_N(\lambda)\right]_{\lambda = \lambda_i} = 0 ,$$

illetve

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[s_N(\lambda) - r_N(\lambda)\right]_{\lambda = \lambda_i} = 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, \ell , \\ k = 0, 1, 2, \ldots, m_i - 1 , \end{array}$$

adódik. Ezek szerint

$$r_N^{(k)}(\lambda_i) = s_N^{(k)}(\lambda_i) ,$$

$$i = 1,2,\dots,\ell; \quad k = 0,1,\dots, m_{i-1}, \quad N = 1,2,\dots \ .$$

Mivel a λ_i számok f konvergencia körében vannak

$$\lim_{N\to\infty} r_N^{(k)}(\lambda_i) = \lim_{N\to\infty} s_N^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i). \tag{8.4}$$

A 8.3 Tétel értelmében van egy és csak egy

$$h(\lambda) = h_{n-1}\lambda^{n-1} + h_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + h_1\lambda + h_0$$

legfeljebb (n-1)-edfoku polinom, melyre

$$h^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i) \ ,$$

$$i = 1,2,\dots,\ell; \quad k = 0,1,\dots, m_i-1 \ .$$

$r_N(\lambda)$, $N = 1,2,\dots$, legfeljebb (n-1)-edfoku polinomok végtelen sorozata, melyre (8.4) miatt teljesül, hogy

$$\lim_{N\to\infty} r_N^{(k)}(\lambda_i) = h_N^{(k)}(\lambda_i) \ .$$

Ebből azonban az következik, hogy az $r_N(\lambda)$ sorozat a legfeljebb (n-1)-edfoku $h(\lambda)$ Hermite-féle interpolációs polinomhoz konvergál:

$$h(\lambda) = \lim_{N\to\infty} r_N(\lambda) \ . \tag{8.5}$$

(Ezt ugy kell érteni, hogy mindegyik a megfelelő együtthatókból álló sorozat $h(\lambda)$ megfelelő együtthatójához tart. Itt meg kell jegyeznünk, hogy ha egy (n-1)-edfoku polinomot együtthatói n-paraméteres függvényének tekintünk, akkor a polinom e paraméterek, az együtthatók folytonos függvénye. A polinom és deriváltjainak egy adott helyen vett értékei azonban lényegében a polinom együtthatói, ha a polinomot e helyhez tartozó Taylor-polinomjává rendezzük át. Lásd IV. Kötet, 7.2 Példa.)

(8.3)-ból és a Cayley-Hamilton-tételből (8.2 Tétel) következik, hogy

$$s_N(\underline{A}) = r_N(\underline{A}), \qquad N = 1,2,\ldots \quad .$$

Tehát (8.5) alapján

$$\lim_{N\to\infty} s_N(\underline{A}) = \lim_{N\to\infty} r_N(\underline{A}) = h(\underline{A}),$$

vagyis $f(\underline{A})$ létezik és

$$f(\underline{A}) = h(\underline{A}) . !$$

Az előbbiek szerint tehát adott $f(\lambda)$ analitikus függvény és $\underline{A}$ négyzetes mátrix esetén meghatározzuk f Hermite-féle interpolációs polinomját, mely az m_i multiplicitálásokkal vett λ_i helyekhez tartozik és $f(\underline{A})$ nem más, mint a polinom értéke az $\underline{A}$ helyen.

Megjegyezzük, hogy a $D(\lambda)$ karakterisztikus polinomnak az előző bizonyításban játszott szerepét betöltheti az a legalacsonyabb fokszámu $p(\lambda)$ polinom, az un. "minimálpolinom", melyre $p(\underline{A}) = \underline{0}$. Ezzel a számitás gyakorlatilag egyszerüsithető (lásd [3]).

<u>8.2 Példa.</u> Kiszámitjuk az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix 100-adik hatványát. Az $f(\lambda) = \lambda^{100}$ függvény az egész komplex sikon analitikus és önmagának hatványsora. $\underline{A}$ karakterisztikus egyenlete

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 .$$

$\lambda = 1$ kétszeres sajátérték. Az $f(1) = 1$, $f'(1) = 100$ értékekhez tartozó $h(\lambda) = h_1\lambda + h_0$ Hermite-féle interpolációs polinomra

$$1 = h(1) = h_1 + h_0 .$$

$$100 = h'(1) = h_1 .$$

Vagyis $h(\lambda) = 100\lambda - 99$. Ezek szerint

$$\underline{A}^{100} = 100\,\underline{A} - 99\,\underline{E} = \begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 99 & 0 \\ 0 & 99 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

A továbbiakban minket elsősorban az exponenciális függvény mátrixon felvett értéke érdekel. Az $f(\lambda) = e^{\lambda}$ függvény az egész komplex sikon analitikus, tehát $e^{\underline{A}}$ minden $\underline{A}$ négyzetes mátrixra értelmezve van.

<u>8.5 Tétel.</u> Ha az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ n-edrendű mátrixok felcserélhetők, vagyis

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} ,$$

akkor

$$e^{\underline{A}} e^{\underline{B}} = e^{\underline{A}+\underline{B}} .$$

<u>Bizonyitás.</u> Definició szerint

$$e^{\underline{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k}{k!} , \qquad e^{\underline{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{B}^k}{k!} .$$

Itt a jobb oldalak olyan mátrixnak tekinthetők, melyek elemei végtelen sorok. E sorokról könnyen látható, hogy abszolut konvergensek és igy alkalmazható a Cauchy-féle szorzási szabály (IV. Kötet, 3.5 Tétel):

$$e^{\underline{A}} e^{\underline{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!} \underline{A}^i \underline{B}^{k-i} \right) .$$

Másrészt .

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}+\underline{B})^k}{k!} .$$

Mivel $\underline{A}$ és $\underline{B}$ felcserélhetők, alkalmazható a binomiális tétel, vagyis

$$\frac{1}{k!} (\underline{A}+\underline{B})^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \underline{A}^i \underline{B}^{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!} \underline{A}^i \underline{B}^{k-i} .$$

Tehát

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!} \underline{A}^i \underline{B}^{k-i} \right) .!$$

Mivel az $\underline{A}$ és a $(-\underline{A})$ mátrixok nyilván felcserélhetők, az előbbi tétel egyszerű következménye, hogy

$$e^{\underline{A}} e^{-\underline{A}} = e^{\underline{0}} = \underline{E} + \frac{\underline{0}}{1!} + \frac{\underline{0}^2}{2!} +\ldots+ \frac{\underline{0}^k}{k!} +\ldots = \underline{E} . \qquad (8.6)$$

(8.6)-ból következik, hogy tetszőleges $\underline{A}$ négyzetes mátrixra $e^{\underline{A}}$ reguláris mátrix és inverze

$$\left(e^{\underline{A}}\right)^{-1} = e^{-\underline{A}} . \qquad (8.7)$$

<u>8.6 Tétel.</u> Tetszőleges rögzitett $\underline{A}$ négyzetes mátrixra az $e^{\underline{A}\,t}$ mátrix függvény (t valós változó) differenciálható és

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{A}\,t} = \underline{A}\, e^{\underline{A}\,t} . \qquad (8.8)$$

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy $e^{\underline{A}t}$ minden rögzitett $t \in R$-re értelmezve van és

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^k}{k!} .$$

Itt a jobb oldal olyan mátrixnak tekinthető, melynek elemei t hatványai szerint haladó konvergens hatványsorok. Ezek nyilván tagonként differenciálhatók (egy mátrixot viszont ugy differenciálunk, hogy minden elemét differenciáljuk). Ezek figyelembevételével

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k t^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\underline{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \underline{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^{k-1}}{(k-1)!} = \underline{A} e^{\underline{A}t} .!$$

Ezek után elvileg egyszerü az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer általános megoldásának, vagy ami azzal ekvivalens, egy alapmátrixának előállitása.

8.7 Tétel. Legyen $\underline{A}$ n-edrendü (valós) állandó elemü mátrix és tekintsük a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\,\underline{x} \tag{8.9}$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszert; (8.9) egy alapmátrixa az

$$\underline{X}(t) = e^{\underline{A}t}$$

mátrix.

Bizonyitás. (8.8) alapján nyilvánvaló. !

Elvi szempontból igen fontos a következő észrevétel. Ha $\underline{A}$ különböző sajátértékei λ_i, és λ_i multiplicitása m_i, $(i = 1, 2, \dots, \ell$; $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n)$, akkor $e^{\underline{A}t}$ meghatározásához elő kell állitani az $f(\lambda, t) = e^{\lambda t}$ függvény megfelelő Hermite-féle interpolációs polinomját a

$$h(\lambda, t) = h_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + h_{n-2}(t)\lambda^{n-2} + \dots + h_1(t)\lambda + h_0$$

polinomot. Mivel

$$\frac{\partial^k f(\lambda, t)}{\partial \lambda^k} = t^k e^{\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

ezért az Hermite-polinom együtthatóit a

$$h^{(k)}(\lambda_i) = t^k e^{\lambda_i t}, \tag{8.10}$$

$$i = 1, 2, \dots, \ell; \quad k = 0, 1, \dots, m_{i-1},$$

feltételi egyenletekből kell meghatározni. (8.10) a $h_j(t)$, $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ együtthatókra nézve inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek együttható mátrixa reguláris és "konstans vektora"

$$(e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_\ell t}, te^{\lambda_\ell t}, \dots,$$

$$\dots, t^{m_\ell - 1} e^{\lambda_\ell t}).$$

Innen látható, hogy a $h_j(t)$ együtthatók $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ $t^k e^{\lambda_i t}$ alaku tagok lineáris kombinációi, és ennek következtében az

$$e^{\underline{A}\,t} = h_{n-1}(t)\,\underline{A}^{n-1} + \ldots + h_1(t)\,\underline{A} + h_0(t)\,\underline{E}$$

mátrix elemei is $t^k\, e^{\lambda_i t}$ alaku tagok lineáris kombinációi.

Megjegyezzük továbbá, hogy mivel $\underline{A}$ sajátértékei között komplex számok is lehetnek, $e^{\underline{A}\,t}$ elemei általában komplex értékü (valós változós) függvények lehetnek. Ilyen koordinátáju oszlopvektorok is kielégithetik a (8.9)-rendszert. Ezek megfelelő lineáris kombinációiként azonban mindig előállitható olyan alaprendszer (ill. alapmátrix), melynek koordinátái valós értékü függvények.

<u>8.3 Példa.</u> Legyen adva a következő állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszer:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 4x_2 + 2x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 - 2x_2 - x_3.$$

Mátrixos alakban:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\,\underline{x},$$

ahol $\underline{x} \in R^3$ és

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Célunk az alapmátrix meghatározása. Ehhez szükségünk van az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeire, melyeket a $\det(\underline{A} - \lambda\,\underline{E}) = 0$ harmadfoku egyenletből határozhatunk meg ($\underline{E}$ a harmadrendű egységmátrix).

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)+2\right] + 4 - 2(1-\lambda) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2+1) + 2(1+\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2+1-2) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0,$$

ahonnan $\lambda = 1$ egyszeres és $\lambda = -1$ kétszeres sajátérték. Ennek megfelelően az $e^{\lambda t}$ függvény

$$h(\lambda, t) = h_2(t)\lambda^2 + h_1(t)\lambda + h_0(t)$$

Hermite-féle interpolációs polinomját kell előállitani a következő feltételekkel:

$$h(1, t) = e^t,$$

$$h(-1, t) = e^{-t},$$

$$\frac{\partial h(-1, t)}{\partial \lambda} = te^{-t},$$

ami részletesen kiirva az alábbi egyenletrendszer megoldását követeli:

$$h_2(t) + h_1(t) + h_0(t) = e^t,$$

$$h_2(t) - h_1(t) + h_0(t) = e^{-t},$$

$$-2h_2(t) + h_1(t) = te^{-t}.$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$h_0(t) = \frac{1}{4}\left[e^t + (3 + 2t)\, e^{-t}\right],$$

$$h_1(t) = \frac{1}{4}\left(2e^t - 2e^{-t}\right),$$

$$h_2(t) = \frac{1}{4}\left[e^t - (1 + 2t)\, e^{-t}\right].$$

Ezek alapján az alapmátrix:

$$e^{\underline{A}\,t} = h(\underline{A},\ t) = h_2(t)\,\underline{A}^2 + h_1(t)\,\underline{A} + h_0(t)\,\underline{E} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^t - (1 + 2t)\, e^{-t}\right]\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(2e^t - 2e^{-t}\right)\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+\left[\frac{1}{4}\quad e^t + (3 + 2t)\, e^{-t}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2e^t + (2-4t)\, e^{-t} & 4e^t + (-4 + 8t)\, e^{-t} & 4e^t - 4e^{-t} \\ e^t - (1+2t)\, e^{-t} & 2e^t + (2 + 4t)\, e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 4t\ e^{-t} & -8t\ e^{-t} & 4\, e^{-t} \end{bmatrix},$$

Vizsgáljuk ezek után a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{b}(t) \tag{8,11}$$

inhomogén differenciálegyenlet rendszert ($\underline{A}$ n-edrendü, valós, állandó elemü mátrix, $\underline{b}(t)$ n-dimenziós, folytonos oszlopvektor). Ha ismerjük a megfelelő (8.9) homogén rendszer alapmátrixát, az $e^{\underline{A}t}$ mátrixot, akkor a 7.11 Következmény alapján az inhomogén differenciálegyenlet rendszer egyetlen megoldását kell ismernünk ahhoz, hogy megkaphassuk az általános megoldást. Mivel az $e^{\underline{A}t}$ alapmátrix inverze az $e^{-\underline{A}t}$ mátrix (lásd (8.7)), a (8.11) inhomogén rendszer egy megoldása (7.13) alapján

$$\underline{x}^I(t) = e^{\underline{A}t} \int e^{-\underline{A}t}\, \underline{b}(t)\, dt \;. \tag{8.12}$$

Mivel $\left(e^{\underline{A}t}\right)^{-1} = e^{-\underline{A}t} = e^{\underline{A}(-t)}$, ezért $e^{\underline{A}t}$-t ugy invertáljuk, hogy t helyére mindenütt (-t)-t irunk.

A továbbiakban visszatérünk a (8.9) állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldásához. Azt a speciális esetet vizsgáljuk, amelyben az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei mind különbözők. Egy fontos mátrixelméleti tételt használunk fel:

8.8 Tétel. Legyen $\underline{A}$ egy n-edrendü mátrix, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei és a megfelelő sajátvektor rendszer: $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \ldots, \underline{s}^n$ (lehetségesek komplex sajátértékek és sajátvektorok is). Tételezzük fel, hogy $\lambda_i \neq \lambda_k$, ha $i \neq k$, $(i,k = 1,2,\ldots,n)$. Ekkor $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \ldots, \underline{s}^n$ lineárisan független vektorok (lásd III. Kötet, 9.1 Definició).

Bizonyitás. A sajátértékekre, ill. sajátvektorokra vonatkozó matematikai indukciót alkalmazunk. $k = 1$-re nyilván igaz az állitás, hiszen $c_1\underline{s}^1 = 0$ csak ugy állhat fenn, ha $c_1 = 0$. Tételezzük fel, hogy $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \ldots, \underline{s}^k$ lineárisan függetlenek $(1 \leq k < n)$, azaz a

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, \underline{s}^i = 0 \quad \text{egyenlőségből} \quad c_i = 0, \; (i = 1,2,\ldots,k)$$

következik. Bizonyitani akarjuk $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \ldots, \underline{s}^{k+1}$ lineáris függetlenségét. Tegyük fel az állitással ellentétben, hogy

$$c_1\underline{s}^1 + c_2\underline{s}^2 + \ldots + c_k\underline{s}^k + c_{k+1}\underline{s}^{k+1} = 0 \tag{8.13}$$

ugy, hogy $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| + |c_{k+1}| > 0$. Szorozzuk meg (8.13)-at balról az $\underline{A}$ mátrixszal:

$$\underline{A} c_1 \underline{s}^1 + \underline{A}\, c_2 \underline{s}^2 + \dots + \underline{A}\, c_k \underline{s}^k + \underline{A}\, c_{k+1} \underline{s}^{k+1} = 0,$$

amiből

$$\lambda_1 c_1 \underline{s}^1 + \lambda_2 c_2 \underline{s}^2 + \dots + \lambda_k c_k \underline{s}^k + \lambda_{k+1} c_{k+1} \underline{s}^{k+1} = 0 \qquad (8.14)$$

adódik. Ha (8.13) λ_{k+1}-szeresét kivonjuk (8.14)-ből, a

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) c_1 \underline{s}^1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) c_k \underline{s}^k = 0$$

egyenlőség adódik. Ami az indukciós feltevés alapján csak ugy lehetséges, ha

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) c_1 = (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) c_2 = \dots = (\lambda_k - \lambda_{k+1}) c_k = 0.$$

Mivel a sajátértékek különbözők, ezért ebből a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ egyenlőségek következnek és ez (8.13)-mal összevetve a $c_{k+1} = 0$-t is adja, ami ellentmond a feltevésnek. !

<u>8.9 Tétel.</u> Legyen $\underline{A}$ egy n-edrendü mátrix, melynek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékei mind különbözők. Ekkor a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\, \underline{x} \qquad (8.15)$$

differenciálegyenlet rendszer egy alaprendszere

$$\left\{ e^{\lambda_1 t} \underline{s}^1, e^{\lambda_2 t} \underline{s}^2, \dots, e^{\lambda_n t} \underline{s}^n \right\}, \qquad (8.16)$$

ahol $\underline{s}^j$ a λ_j-hez tartozó sajátvektor ($j = 1, 2, \dots, n$).

Bizonyitás. $e^{\lambda_j t}\,\underline{s}^j$ (8.15) megoldása. Ugyanis behelyettesitve (8.15)-be, a

$$\lambda_j e^{\lambda_j t}\,\underline{s}^j = \underline{A} e^{\lambda_j t}\,\underline{s}^j \equiv e^{\lambda_j t}\,\lambda_j \underline{s}^j, \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

azonosság adódik. Az $e^{\lambda_1 t}\,\underline{s}^1, \dots, e^{\lambda_n t}\,\underline{s}^n$ függvények lineáris függetlensége a 8.9 Tétel egyenes következménye. !

8.4 Példa. Megmutatjuk, hogy a (8.16) alaprendszer kiadódik a 8.7 Tételből is. Legyen $\underline{A}$ n-edrendű mátrix, melynek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékei mind különbözők és $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \dots, \underline{s}^n$ a megfelelő sajátvektorok. A

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\,\underline{x} \tag{8.17}$$

differenciálegyenlet rendszer $e^{\underline{A}t}$ alapmátrixának felirásához az $e^{\lambda t}$ függvény Hermite-féle interpolációs polinomja szükséges, ami itt speciálisan az $L_{n-1}(\lambda, t)$ Lagrange-féle interpolációs polinom (II. Kötet, 2.9 Tétel).

$$L_{n-1}(\lambda, t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t}\, p_k(\lambda),$$

ahol

$$p_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1})\dots(\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\dots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\dots(\lambda_k - \lambda_n)},$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Igy $e^{\underline{A}t} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} p_k(\underline{A})$. A 7.8 Tétel alapján nyilvánvaló, hogy az $e^{\underline{A}t}\underline{s}^1, e^{\underline{A}t}\underline{s}^2, \ldots, e^{\underline{A}t}\underline{s}^n$ vektorok (8.17) megoldásai. Továbbá

$$\underline{X}(t) = \left[e^{\underline{A}t}\underline{s}^1, e^{\underline{A}t}\underline{s}^2, \ldots, e^{\underline{A}t}\underline{s}^n\right]$$

reguláris mátrix, ugyanis az $e^{\underline{A}t}$ és az $\left[\underline{s}^1, \underline{s}^2, \ldots, \underline{s}^n\right]$ reguláris mátrix szorzata (lásd 8.8 Tétel). Igy $\underline{X}(t)$ alapmátrix. Továbbá mivel

$$p_k(\underline{A})\,\underline{s}^j = \frac{(\underline{A}-\lambda_1\underline{E})\ldots(\underline{A}-\lambda_{k-1}\underline{E})(\underline{A}-\lambda_{k+1}\underline{E})\ldots(\underline{A}-\lambda_n\underline{E})\,\underline{s}^j}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} =$$

$$= \frac{(\underline{A}-\lambda_1\underline{E})\ldots(\underline{A}-\lambda_{k-1}\underline{E})(\underline{A}-\lambda_{k+1}\underline{E})\ldots(\underline{A}\underline{s}^j-\lambda_n\underline{E}\,\underline{s}^j)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} =$$

$$= \frac{(\underline{A}-\lambda_1\underline{E})\ldots(\underline{A}-\lambda_{k-1}\underline{E})(\underline{A}-\lambda_{k+1}\underline{E})\ldots(\lambda_j\underline{s}^j-\lambda_n\underline{s}^j)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} =$$

$$= \frac{(\underline{A}-\lambda_1\underline{E})\ldots(\underline{A}-\lambda_{k-1}\underline{E})(\underline{A}-\lambda_{k+1}\underline{E})\ldots\underline{s}^j(\lambda_j-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} =$$

$$=\ldots= \frac{\underline{s}^j(\lambda_j-\lambda_1)\ldots(\lambda_j-\lambda_{k-1})(\lambda_j-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k \neq j \\ \underline{s}^j, & \text{ha} \quad k = j, \end{cases} \qquad (j,\ k = 1, 2, \ldots, n)\ ,$$

ezért

$$e^{\underline{A}t}\,\underline{s}^j = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t}\, p_k(\underline{A})\,\underline{s}^j = e^{\lambda_j t}\,\underline{s}^j, \quad j=1,2,\dots,n.$$

(Speciálisan ez azt jelenti, hogy $e^{\underline{A}}$ sajátvektorai, ill. sajátértékei $\underline{A}$ sajátvektoraival, ill. az e^{λ_j} számokkal egyenlők.)

8.5 Példa. Tekintsük a

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3 + 2x_4,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

differenciálegyenlet rendszert. Egy alaprendszer meghatározásához szükségünk van az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

együttható mátrix sajátértékeire. A

$$\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2) = 0$$

egyenletből a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1+i, \quad \lambda_4 = 1-i$$

(i az imaginárius egység). Mint egyszerü számolással meggyőződhetünk róla, a megfelelő sajátvektorok a következőképpen választhatók:

$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} -2+i \\ 2-i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^4 = \begin{bmatrix} -2-i \\ 2+i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Így a komplex alaprendszer:

$$\underline{x}^1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{x}^2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{x}^3(t) = e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} -2+i \\ 2-i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \qquad \underline{x}^4(t) = e^{(1-i)t} \begin{bmatrix} -2-i \\ 2+i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Itt λ_3 és λ_4, ill. $\underline{s}^3$ és $\underline{s}^4$, ill. $\underline{x}^3$ és $\underline{x}^4$ egymás komplex konjugáltjai. A gyakorlatban rendszerint valós alaprendszerre van szükségünk. Az $\underline{x}^3$ és $\underline{x}^4$ megoldásokból az

$$\underline{x}^5(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{x}^3(t) + \underline{x}^4(t)\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{x}^3(t)\right)$$

és az

$$\underline{x}^6(t) = \frac{1}{2i}\left(\underline{x}^3(t) - \underline{x}^4(t)\right) = \operatorname{Im}\left(\underline{x}^3(t)\right)$$

valós megoldások származtathatók:

$$\underline{x}^5(t) = e^t \cos t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - e^t \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{x}^6(t) = e^t \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \sin t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3, \underline{x}^4$ lineárisan függetlenek, ezért $\det\left[\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3, \underline{x}^4\right] \neq 0$. Viszont

$$\det\left[\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3, \underline{x}^4\right] = \det\left[\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3 + \underline{x}^4, \underline{x}^4\right] =$$

$$= \det\left[\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3 + \underline{x}^4, \frac{\underline{x}^4 - \underline{x}^3}{2}\right] =$$

$$= -4i \det\left[\underline{x}^1, \underline{x}^2, \frac{\underline{x}^3 + \underline{x}^4}{2}, \frac{\underline{x}^3 - \underline{x}^4}{2i}\right],$$

ami azt jelenti, hogy

$$\det\left[\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^5, \underline{x}^6\right] \neq 0,$$

tehát $\underline{x}^1(t), \underline{x}^2(t), \underline{x}^5(t), \underline{x}^6(t)$ alaprendszert alkotnak.

9. Stabilitás

Ebben a pontban ismét visszatérünk az általános

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}) \tag{9.1}$$

differenciálegyenlet rendszer vizsgálatához (v.ö. (6.2); $\underline{x}$ és $\underline{f}$ n-dimenziós oszlopvektor). Tételezzük fel, hogy az $\underline{f}$ függvény RxR^n-ben kielégíti a 6.4 Tétel feltételeit. Ekkor minden $(t_0, \underline{x}^0)$-ra van (9.1)-nek egy és csak egy megoldása, melyre $\underline{x}(t_0) = \underline{x}^0$. Ezt a megoldást $\underline{x}(t;\ t_0, \underline{x}^0)$-lal jelöljük, tehát $\underline{x}(t_0;\ t_0, \underline{x}^0) = \underline{x}^0$. A 6.6 Tétel kimondja, hogy az $\underline{x}(t;\ t_0, \underline{x}^0)$ függvény folytonos, azaz (9.1) megoldásai a kezdeti értékeknek is folytonos függvényei. A gyakorlatban igen sokszor felmerül a kérdés, hogy ez a folytonos függés $t \to \infty$ esetén is megmarad-e, vagyis a kezdeti feltételek "kicsiny" megváltoztatása mennyire változtatja meg a megoldásfüggvényt minden t-re, melyre $t > t_0$.

A mechanikai, fizikai, kémiai, müszaki "rendszerek" egy jelentős részének matematikai modellje valamilyen differenciálegyenlet rendszer. A "rendszer" állapotát (annak változását pl. az időben), a rendszerben végbemenő jelenség lefolyását, valamely gép müködését ekkor a megfelelő differenciálegyenlet rendszer egy megoldása irja le. A jelenség lefolyását ezekben az esetekben a rendszer kezdeti állapota határozza meg, melyet a differenciálegyenlet rendszerhez csatlakozó kezdeti feltételek reprezentálnak. Ha azt kivánjuk, hogy a jelenség előre meghatározott módon folyjék le, a gép adott üzemmódban müködjék, be kell állitanunk az ennek megfelelő kezdeti állapotot. A rendszer kezdeti állapotának beállitása azonban rendszerint csak közelitő pontossággal (bizonyos hibával) lehetséges. Ezért müszaki szempontból alapvetően fontos az a kérdés, hogy a rendszer, pontosabban a rendszer meghatározott kezdeti állapothoz tartozó müködése "stabilis"-e. A kivánalom (melynek teljesülése nélkül a rendszer müszakilag hasznavehetetlen) az, hogy a kezdeti állapot kis megváltozása ne befolyásolja lényegesen a rendszerben végbemenő jelenséget a (kezdeti pillanatot követő) jövőben, más szóval az, hogy a rendszer müködése stabilis legyen. A stabilitás müszaki értelemben vett fogalmának legfontosabb és leghasználhatóbb matematikai modellje A. M. Ljapunovtól származik.

9.1 Definició. Legyen $\underline{\varphi}(t)$ (9.1)-nek azon megoldása, melyre $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{\varphi}^0$. A $\underline{\varphi}(t)$ megoldást Ljapunov értelmében stabilisnak nevezzük, ha

a) van $\varrho > 0$, hogy a $\underline{\varphi}^0$ pont $K_{\underline{\varphi}^0, \varrho}$ környezetének minden $\underline{x}^0$ elemére a (9.1) rendszer $\underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0)$ megoldása a (t_0, ∞) intervallumban értelmezve van,

b) minden $\varepsilon > 0$-hoz van $0 < \delta < \varrho$ ugy, hogy $\underline{x}^0 \in K_{\underline{\varphi}^0, \delta}$ esetén $\| \underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0) - \underline{\varphi}(t) \| < \varepsilon$, ha $t > t_0$.

9.2 Definició. A (9.1) rendszer $\underline{\varphi}(t)$ megoldását, melyre $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{\varphi}^0$, aszimptotikusan stabilisnak mondjuk, ha Ljapunov értelmében stabilis (teljesül az előző definició a) és b) feltétele), továbbá

c) van $0 < \eta < \varrho$ ugy, hogy

$$\underline{x}^0 \in K_{\underline{\varphi}^0, \eta} \quad \text{esetén}$$

$$\lim_{t \to \infty} \| \underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0) - \underline{\varphi}(t) \| = 0.$$

Az előbbiekben felvetett kérdéseket e fogalmak ismeretében ugy fogalmazhatjuk meg, hogy a (9.1) differenciálegyenlet rendszer megoldásainak stabilitását, ill. aszimptotikus stabilitását kell eldöntenünk. Különösen fontos és gyakran felmerülő kérdés valamely rendszer "egyensulyi helyzetének" stabilitás vizsgálata. Az $\underline{x}^0$ állandó vektort a (9.1) rendszer szinguláris megoldásának (egyensulyi helyzetnek vagy pontmegoldásnak) nevezzük (lásd 4. pont), ha $\underline{f}(t, \underline{x}^0) \equiv \underline{0}$. (Ekkor nyilvánvalóan az $\underline{x}(t) \equiv \underline{x}^0$ állandó (9.1) megoldása. A pontmegoldás elnevezés arra utal, hogy az egyensulyi helyzet trajektóriája (lásd 6.2 Definició) egyetlen pont, ponttrajektória).

Először az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer,

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\,\underline{x} \tag{9.2}$$

egyensulyi helyzeteinek stabilitásával foglalkozunk ($\underline{A}$ n-edrendü konstans mátrix).

$\underline{x}^0$ (9.2)-nek akkor és csak akkor egyensulyi helyzete, ha az

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$$

egyenlet megoldása. Ha $\underline{A}$ reguláris mátrix, akkor $\underline{x}^0 = \underline{0}$ az egyetlen egyensulyi helyzet.

9.3 Definició. Egy $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$, $a_j \in R$, $j = 0,1,2,\dots,n$, $a_n \neq 0$ polinomot stabilis (vagy Hurwitz) polinomnak nevezünk, ha $p(\lambda)$ minden gyökének valós része negativ.

Polinomok stabilitásának szükséges feltételét mondja ki a következő

9.1 Tétel. Ha a $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$ polinom stabilis, és $a_n > 0$, akkor $a_j > 0$, $j = 0,1,2,\dots,n$.

Bizonyitás. Legyenek $p(\lambda)$ komplex, ill. valós gyökei $\lambda_\ell = -\alpha_\ell \pm i\beta_\ell$, ($\sigma_\ell$ multiplicitással, $\ell = 1,\dots,r$), ill. $\lambda_k = -\gamma_k$ (s_k multiplicitással, $k = 1,\dots,q$). Mivel $p(\lambda)$ stabilis polinom, ezért $\alpha_\ell > 0$, $\gamma_k > 0$, ($\ell = 1,\dots,r$; $k = 1,\dots,q$). Tekintsük most $p(\lambda)$ gyöktényezős felbontását (lásd III. Kötet, 7.7 és 7.10 Következmény, (7.7), (5.21) és (5.25)):

$$p(\lambda) = a_n \prod_{\ell=1}^{r} (\lambda + \alpha_\ell - i\beta_\ell)^{\sigma_\ell} (\lambda + \alpha_\ell + i\beta_\ell)^{\sigma_\ell} \prod_{k=1}^{q} (\lambda + \gamma_k)^{s_k} =$$

$$= a_n \prod_{\ell=1}^{r} (\lambda^2 + 2\alpha_\ell\lambda + |\lambda_\ell|^2)^{\sigma_\ell} \prod_{k=1}^{q} (\lambda + \gamma_k)^{s_k} .$$

Mivel $a_n > 0$, és az utóbbi szorzatban az összes tényező összes együtthatója pozitiv, ezért a szorzás elvégzése és rendezés után is minden a_j együttható pozitiv lesz $j = 0, 1, \ldots, n$.!

Megjegyezzük, hogy a 9.1 Tétel feltétele az n=1 és az n=2 esetben egyben elégséges is a polinom stabilitásához, $n > 2$ esetén azonban általában nem. Az olvasó maga is könnyen ellenőrizheti azt, hogy $p(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, ahol $a_2 > 0$, akkor és csak akkor stabilis, ha $a_1 > 0$ és $a_0 > 0$.

Szükségünk lesz a következő becslésre.

9.2 Segédtétel. Legyen $\underline{Y} = [y_{ik}]$ n-edrendű mátrix; ekkor minden $\underline{x}$ n-dimenziós oszlopvektorra érvényes

$$\|\underline{Y}\underline{x}\| \leq n \max_{i,k} |y_{ik}| \cdot \|\underline{x}\| . \tag{9.3}$$

Bizonyitás. Jelöljük $\underline{Y}$ sorvektorait rendre $\underline{\eta}_1', \underline{\eta}_2', \ldots, \underline{\eta}_n'$-vel. Ekkor minden tagban a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmazva (lásd III. Kötet, 16.2 Következmény)

$$\|\underline{Y}\,\underline{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (\underline{\eta}_i'\underline{x})^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \|\underline{\eta}_i'\|^2 \|\underline{x}\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|\underline{x}\| \left[n \max_i \|\underline{\eta}_i'\|^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Mivel $\underline{\eta}_i' = [y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}]$, ezért

$$\max_i \|\underline{\eta}_i'\|^2 = \max_i \sum_{k=1}^{n} |y_{ik}|^2 \leq n \max_{i,k} |y_{ik}|^2 .$$

Az előző egyenlőtlenségláncot az utóbbi eredmény felhasználásával folytatva

$$\| \underline{Y}\,\underline{x} \| \leq \| \underline{x} \| \left[n^2 \max_{i,k} |y_{ik}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= n \max_{i,k} |y_{ik}| \cdot \| \underline{x} \| \,.!$$

9.3 Tétel. Ha (9.2)-ben az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja stabilis, ($\underline{A}$ "stabilis mátrix"), akkor az $\underline{x} = 0$ (egyetlen) egyensulyi helyzet aszimptotikusan stabilis.

Bizonyitás. Ha $\underline{A}$ stabilis mátrix, akkor a $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ egyenlet gyökei között nem szerepelhet a zérus (u.i. $\mathrm{Re}\, 0 = 0$ lenne). Igy $\det \underline{A} \neq 0$, azaz $\underline{A}$ reguláris mátrix, tehát (9.2) egyetlen egyensulyi helyzete $\underline{x} = \underline{0}$. Az $\underline{x}(t) \equiv 0$ megoldásfüggvény minden t-re értelmezve van. Tekintsük ezek után (9.2)-nek az $\underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0)$ megoldását. Alkalmazva a 8.7, 7.8, valamint a 8.5 Tételt adódik, hogy

$$\underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\, \underline{x}^0 \,.$$

A 8.7 Tételt követő megjegyzésből látható, hogy az $e^{\underline{A}(t-t_0)}$ mátrix elemei $(t-t_0)^k\, e^{\lambda_j (t-t_0)}$ alaku tagok lineáris kombinációi, $k = 0, 1, \ldots, m_j - 1$, ahol λ_j az $\underline{A}$ mátrix sajátértéke m_j multiplicitással $(j = 1, 2, \ldots, \ell;\ \sum_{j=1}^{\ell} m_j = n)$. Legyen $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j$.
Mivel $\underline{A}$ stabilis mátrix, ezért $\alpha_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$, és

$$\left| (t-t_0)^k\, e^{\lambda_j (t-t_0)} \right| = \left| (t-t_0)^k\, e^{-\alpha_j (t-t_0)}\, e^{i\beta_j (t-t_0)} \right| =$$

$$= |t-t_0|^k e^{-\alpha_j (t-t_0)} .$$

Továbbá, mivel $t \to \infty$ esetén $e^{\alpha_j (t-t_0)}$ erősebben tart végtelenhez, mint $(t-t_0)$ bármilyen pozitiv hatványa (lásd II. Kötet, 16.3 Példa), ezért

$$\lim_{t \to \infty} |t-t_0|^k e^{-\alpha_j (t-t_0)} = 0 , \quad k = 0, 1, \dots, m_j-1 ; \quad j = 1, 2, \dots, \ell .$$

Mivel az előbbiek szerint az $e^{\underline{A}(t-t_0)}$ mátrix minden $y_{ik}(t)$ eleme minden véges intervallumon korlátos és $t \to \infty$ esetén zérushoz tart, ezért van $M > 0$ szám, hogy

$$|y_{ik}(t)| < M, \text{ ha } t > t_0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \tag{9.4}$$

(9.3) és (9.4) alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra érvényes a következő becslés:

$$\| \underline{x}(t; t_0, \underline{x}^0) - \underline{0} \| = \| e^{\underline{A}(t-t_0)} \underline{x}^0 \| \leq$$

$$\leq M \cdot n \| \underline{x}^0 \| < \varepsilon , \qquad t \geq t_0,$$

ha $\| \underline{x}^0 \| < \dfrac{\varepsilon}{M \cdot n} = \delta$, és ebből az $\underline{x} \equiv \underline{0}$ Ljapunov értelmében vett stabilitása következik. Abból, hogy $e^{\underline{A}(t-t_0)}$ minden $y_{ik}(t)$ eleme zérushoz tart $t \to \infty$ esetén, nyilván az is következik, hogy (tetszőleges $\underline{x}^0$-ra!)

$$\lim_{t \to \infty} \| \underline{x}(t; t_0, \underline{x}^0) \| = 0,$$

ami az aszimptotikus stabilitást biztositja. !

Ha egy (nem szükségképpen állandó együtthatós és nem szükségképpen homogén) lineáris differenciálegyenlet rendszer egyik megoldása stabilis (aszimptotikusan stabilis), akkor az összes megoldás stabilis (aszimptotikusan stabilis). Ezen az alapon jogos lineáris rendszerek esetén nemcsak az egyes megoldásoknak, hanem magának a rendszernek a stabilitásáról (aszimptotikus stabilitásáról) beszélni.

9.4 Tétel. Tételezzük fel, hogy a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \tag{9.5}$$

rendszerben az $\underline{A}(t)$ együttható mátrix és a $\underline{b}(t)$ oszlopvektor a $(-\infty, \infty)$ intervallumon folytonos és (9.5) egy $\underline{\varphi}(t)$ megoldása stabilis (aszimptotikusan stabilis); ekkor (9.5) minden megoldása stabilis (aszimptotikusan stabilis), vagyis (9.5) stabilis (aszimptotikusan stabilis) rendszer.

Bizonyitás. Legyen t_0 tetszőlegesen rögzitett. A 7.1 Tétel bizonyitását követő megjegyzés szerint (9.5) összes megoldása értelmezve van a $[t_0, \infty)$ intervallumban. Először megmutatjuk, hogy $\underline{\varphi}(t)$ stabilitásából (aszimptotikus stabilitásából) következik a (9.5)-höz tartozó

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\,\underline{x} \tag{9.6}$$

homogén rendszer $\underline{x} \equiv 0$ egyensulyi helyzetének stabilitása (aszimptotikus stabilitása). Ha $\underline{\varphi}^0 = \underline{\varphi}(t_0)$ és $\underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0)$-lal jelöljük (9.5)-nek azt a megoldását, mely a t_0 helyen az $\underline{x}^0$ értéket veszi fel, akkor a 7.10 Tétel szerint $\underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0) - \underline{\varphi}(t)$ (9.6) megoldása. Továbbá minden $\Delta\underline{x}^0$-hoz van $\underline{x}^0$, melyre $\Delta\underline{x}^0 = \underline{x}^0 - \underline{\varphi}^0$ és igy (9.6) tetszőleges $\underline{x}^H(t;\, t_0,\, \Delta\underline{x}^0)$ megoldására

$$\underline{x}^H(t;\, t_0,\, \Delta\underline{x}^0) = \underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}^0) - \underline{\varphi}(t) .$$

$\underline{\varphi}(t)$ stabilitásából következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta > 0$, melyre a

$$\|\Delta \underline{x}^0\| = \| \underline{x}^0 - \underline{\varphi}^0 \| < \delta$$

egyenlőtlenségből

$$\|\underline{x}^H(t;\ t_0, \Delta \underline{x}^0)\| = \| \underline{x}(t;\ t_0, \Delta \underline{x}^0) - \underline{\varphi}(t) \| < \varepsilon,$$

$$t > t_0$$

következik. ($\underline{\varphi}(t)$ aszimptotikus stabilitásából

$$\lim_{t \to \infty} \| \underline{x}^H(t;\ t_0, \Delta \underline{x}^0) \| = \lim_{t \to \infty} \| \underline{x}(t;\ t_0, \underline{x}^0) - \underline{\varphi}(t) \| = 0$$

adódik). Ezzel beláttuk, hogy $\underline{x} \equiv \underline{0}$ (9.6) stabilis (aszimptotikusan stabilis) megoldása.

Legyen most $\underline{\psi}(t)$ (9.5) tetszőleges megoldása, $\underline{\psi}(t_0) = \underline{\psi}^0$ és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor (9.6) $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldásának stabilitásából (aszimptotikus stabilitásából) következik, hogy van $\delta > 0$, melyre ha $\|\Delta \underline{x}^0\| = \| \underline{x}^0 - \underline{\psi}^0 \| < \delta$, akkor

$$\| \underline{x}^H(t;\ t_0, \Delta \underline{x}^0) \| = \| \underline{x}(t;\ t_0, \underline{x}^0) - \underline{\psi}(t) \| < \varepsilon,$$

$$t > t_0$$

$$\left(\lim_{t \to \infty} \| \underline{x}^H(t;\ t_0, \Delta \underline{x}^0) \| = \lim_{t \to \infty} \| \underline{x}(t;\ t_0, \underline{x}^0) - \underline{\psi}(t) \| = 0\right),$$

vagyis $\underline{\psi}(t)$ stabilis (aszimptotikusan stabilis). !

A (9.2) differenciálegyenlet rendszer speciális esete egy igen fontos differenciálegyenlet rendszer csoportnak, az "autonom" differenciálegyenlet rendszernek. A

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) \tag{9.7}$$

differenciálegyenlet rendszert autonomnak nevezzük, ha (9.7) jobb oldala explicit módon nem függ t-től. Szokásos a dinamikai rendszer elnevezés is.

Az autonom rendszerek egy jellemző tulajdonsága a következő: ha $\underline{\varphi}(t)$ (9.7) egy megoldása, akkor tetszőleges τ állandóra a $\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t+\tau)$ függvény is (9.7) megoldása. Ugyanis

$$\frac{d\,\underline{\psi}(t)}{dt} \equiv \frac{d\,\underline{\varphi}(t+\tau)}{dt} \equiv \underline{f}(\underline{\varphi}(t+\tau)) = \underline{f}(\underline{\psi}(t)) \ .$$

Az autonóm rendszerek egy másik fontos tulajdonsága a következő. Ha (9.7) jobb oldala kielégíti a 6.4 Tétel feltételeit, akkor az $\underline{x}$ változó n-dimenziós terében (az un. "fázistérben") egy ponton át egy és csak egy trajektória halad át, vagyis érvényes az unicitás a pályagörbékre is (lásd 6.2 Definició. Megjegyezzük, hogy általános, nem-autonóm rendszer esetén az unicitás csak a $(t, \underline{x})$ változók (n+1)-dimenziós terében érvényes. Más szóval nem-autonóm rendszer esetén az (n+1)-dimenziós tér egy pontján egy és csak egy integrálgörbe halad át, de a trajektóriák az n-dimenziós térben metszhetik egymást). Ezt a tulajdonságot a következőképpen bizonyitjuk.

Tekintsünk két tetszőleges olyan megoldást, melyek pályagörbéi ugyanazon $\underline{x}^0$ ponton haladnak át. Az egyik legyen $\underline{x}(t;\ t_0,\ \underline{x}^0)$, a másik $\underline{x}(t;\ t_0-\tau\ ,\ \underline{x}^0)$. Az előző tulajdonság értelmében $\underline{x}(t+\tau\ ;\ t_0,\ \underline{x}^0)$ is megoldás, mégpedig az a megoldás, mely a $t_0-\tau$ helyen veszi fel az $\underline{x}^0$ értéket:

$$\underline{x}(t+\tau\ ;\ t_0,\ \underline{x}^0)\Big|_{t=t_0-\tau} = \underline{x}(t_0;\ t_0,\ \underline{x}^0) = \underline{x}^0 \ .$$

Ekkor azonban a megoldások unicitása miatt

$$\underline{x}(t+\tau\ ;\ t_0,\ \underline{x}^0) \equiv \underline{x}(t;\ t_0-\tau\ ,\ \underline{x}^0) \ .$$

Miután $\underline{x} = \underline{x}(t+\tau\ ;\ t_0,\ \underline{x}^0)$ ugyanannak a görbének az egyenlete, mint $\underline{x} = \underline{x}(t;\ t_0,\ \underline{x}^0)$ más paraméterezésben, ezzel állitásunkat igazoltuk.!

A (9.7) differenciálegyenlet rendszer egyensulyi helyzetei az $\underline{f}(\underline{x}) = 0$ egyenlet megoldásai.

Legyen $\underline{a}$ egyensulyi helyzet, vagyis $\underline{f}(\underline{a}) = \underline{0}$, továbbá $\underline{x}(t)$ (9.7) valamely más megoldása:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} \equiv \underline{f}(\underline{x}(t)) .$$

Ekkor

$$\frac{d(\underline{x}(t) - \underline{a})}{dt} \equiv \underline{f}(\underline{x}(t)) - \underline{f}(\underline{a}) . \tag{9.8}$$

Tételezzük fel, hogy $\underline{f}$ koordinátái, az f_i n-változós függvények kétszer folytonosan differenciálhatók és helyettesitsük $\underline{f}(\underline{x})$-et az $\underline{x} = \underline{a}$ helyhez tartozó Taylor polinomjával és a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{a}) + \sum_{k=1}^{n} f'_{ix_k}(\underline{a})(x_k - a_k) +$$

$$+ \frac{1}{2!} d^2 f_i(\underline{a} + \vartheta(\underline{x} - \underline{a}) ; (\underline{x} - \underline{a})) ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1 ,$$

(lásd V. Kötet, 9.3 Tétel). Vektorosan összefoglalva, $\underline{f}(\underline{x})$ deriváltmátrixát (az $f_i(\underline{x})$ függvényrendszer derivált mátrixát, lásd V. Kötet, (11.5))

$\frac{d\underline{f}}{d\underline{x}} = \left[f'_{ix_k} \right]$ -val jelölve ez az

$$\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a}) = \frac{d\,\underline{f}(\underline{a})}{d\,\underline{x}} (\underline{x} - \underline{a}) +$$

$$+ \frac{1}{2} d^2 \underline{f}(\underline{a} + \vartheta(\underline{x} - \underline{a}) ; (\underline{x} - \underline{a}))$$

egyenlőségbe megy át.

Igy (9.8) a következőképpen irható:

$$\frac{d\,(\underline{x}(t) - \underline{a})}{dt} = \frac{d\,\underline{f}\,(\underline{a})}{d\underline{x}\,(t)}\,(\underline{x}\,(t) - \underline{a}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,d^2\,\underline{f}\,(\underline{a} + \vartheta\,(\underline{x}(t) - \underline{a})\,,\ \underline{x}(t) - \underline{a})\ .$$

Ha elhanyagoljuk az utóbbi azonosságban a másodrendű differenciált, azt látjuk, hogy az $\underline{y}(t) = \underline{x}(t) - \underline{a}$ megváltozás ("variáció") "közelitőleg egy lineáris differenciálegyenlet rendszert elégit ki". A (9.8)-ból ily módon "linearizálással" nyerhető

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \frac{d\underline{f}\,(\underline{a})}{d\,\underline{x}}\ \underline{y} \qquad (9.9)$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszert a (9.8) autonom rendszer $\underline{a}$-hoz tartozó első variációs rendszerének nevezzük. Érvényes a

9.5 Tétel. Ha (9.8) első variációs rendszerében az

$$\underline{A} = \frac{d\underline{f}\,(\underline{a})}{d\,\underline{x}}$$

együttható mátrix karakterisztikus polinomja stabilis, akkor az $\underline{a}$ egyensulyi helyzet (9.7) aszimptotikusan stabilis megoldása.

A tételt nem bizonyitjuk, bizonyitását lásd [3].

Végezetül egy önmagában is fontos példán keresztül mutatjuk meg, hogyan viselkedhetnek a megoldások egyensulyi helyzetek közelében.

9.1 Példa. Vizsgáljuk a

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2\ ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \qquad (9.1.)$$

differenciálegyenlet rendszer egyensulyi helyzeteit. Ha bevezetjük az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

jelölést, akkor (9.10) a következőképpen foglalható össze:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\,\underline{x} .$$

Csak azzal az esettel foglalkozunk, amelynél az $\underline{A}$ mátrix λ_1 és λ_2 sajátértékei különbözők (egyszeresek). Ekkor az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Az $\underline{A}$ mátrix λ_1-hez, ill. λ_2-höz tartozó sajátvektorait $\underline{s}^1$-gyel, ill. $\underline{s}^2$-vel jelöljük. Az általános megoldást az

$$\underline{x}^1(t) = e^{\lambda_1 t}\,\underline{s}^1, \quad \underline{x}^2(t) = e^{\lambda_2 t}\,\underline{s}^2$$

alaprendszer ismeretében elő tudjuk állitani:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\,\underline{s}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\,\underline{s}^2 .$$

Legyen $\det \underline{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$.

Vizsgáljuk először a valós sajátértékek esetét. Ekkor az $\underline{s}^1$ és $\underline{s}^2$ sajátvektorok is valósak, igy az általános megoldás az $\underline{s}^1$, $\underline{s}^2$ által kifeszitett (ξ_1, ξ_2) ferdeszögü koordináta-rendszerben

$$\xi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t},$$

$$\xi_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

ami a trajektória paraméteres egyenlete.

Ha a paramétert kiküszöböljük, a

$$\xi_2 = k\,\xi_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

görbe egyenletet kapjuk. Ha λ_1 és λ_2 azonos előjelü, akkor a trajektória egyenlete

$$\xi_2 = k\,\xi_1^{\mu}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

ami egy un. "általánositott parabola"-egyenletének felel meg.

a) Legyen először $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Mivel ekkor

$$\lim_{t\to\infty} |\xi_1(t)| = \lim_{t\to\infty} |\xi_2(t)| = \infty,$$

az $\underline{x} = \underline{0}$ egyensulyi helyzetet nem stabilis (labilis) csomópontnak nevezzük (lásd 9.1 ábra - a trajektóriák rajzán t növekedésének irányát a nyilak jelzik). A $c_1 = 0$, ill. $c_2 = 0$ esetnek a ξ_1 ill. ξ_2 tengely felel meg.

b) Vizsgáljuk most a $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ esetet. Ekkor az origó stabilis csomópont (lásd 9.2 Tétel). Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \xi_1(t) = \lim_{t\to\infty} \xi_2(t) = 0,$$

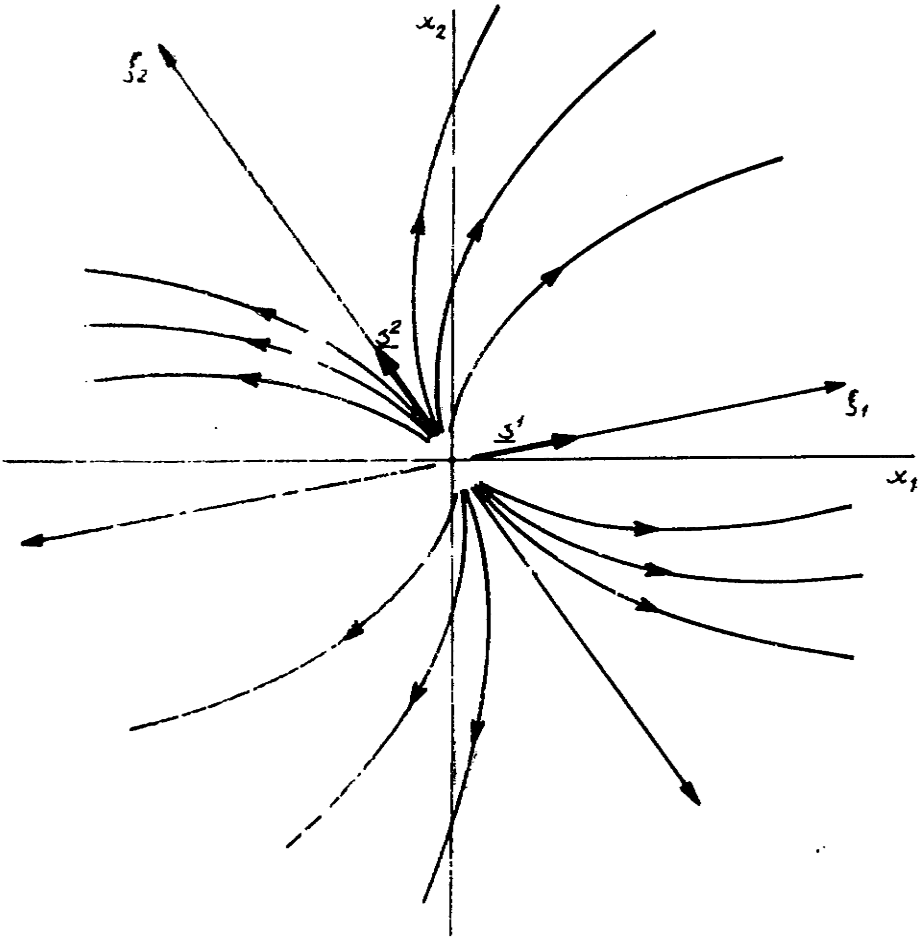
és fennáll az aszimptotikus stabilitás (lásd 9.2 ábra).

c) Legyen most $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Ekkor a trajektória egyenlete

$$\xi_2 = k\,\xi_1^{-\mu}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

és ez "általánositott hiperbola". Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \xi_1(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} |\xi_2(t)| = \infty.$$

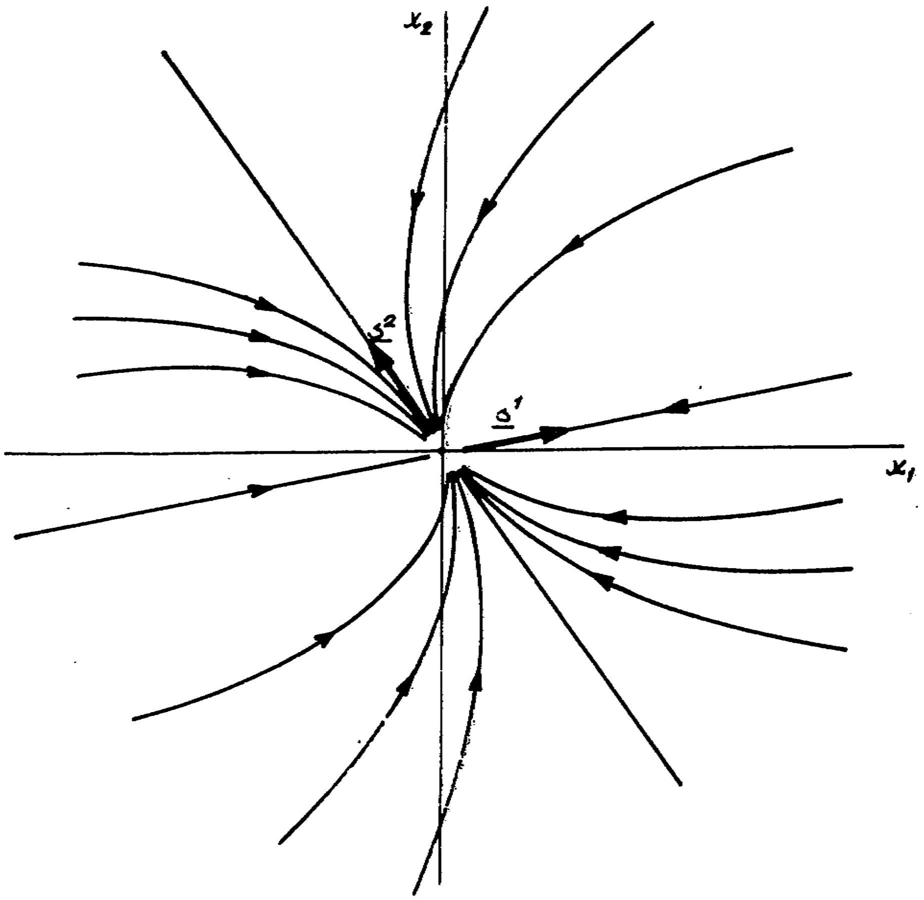


9.1 ábra

Ekkor az origót (nem stabilis) nyeregpontnak nevezzük (lásd 9.3 ábra).

Vizsgáljuk most a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\beta \neq 0$ komplex sajátértékek esetét. Ekkor a valós alaprendszer:

$$\underline{x}^1(t) = \mathrm{Re}\, e^{\lambda_1 t} \underline{s}^1, \qquad \underline{x}^2(t) = \mathrm{Im}\, e^{\lambda_1 t} \underline{s}^1,$$



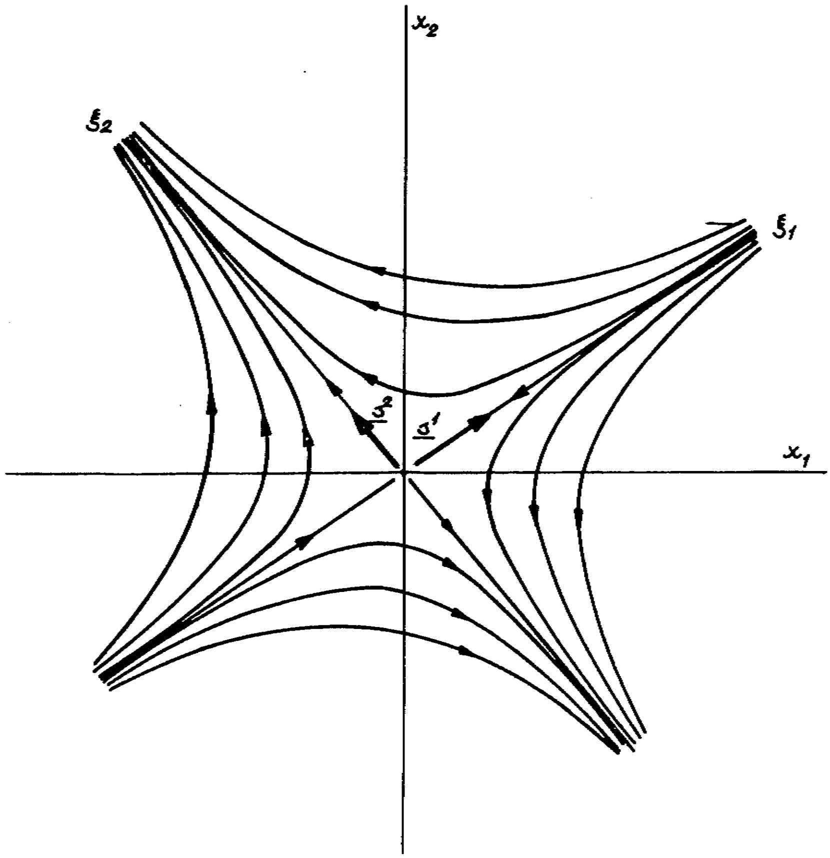
9.2 ábra

az általános megoldás pedig

$$\underline{x}(t) = c_1\,(e^{\alpha t}\cos\beta t\,\underline{v}^1 - e^{\alpha t}\sin\beta t\,\underline{v}^2) +$$

$$+\,c_2\,(e^{\alpha t}\sin\beta t\,\underline{v}^1 + e^{\alpha t}\cos\beta t\,\underline{v}^2),$$

ahol $\underline{s}^1 = \underline{v}^1 + i\,\underline{v}^2$, $\underline{v}^1$, $\underline{v}^2$ valós vektorok (lásd 8.5 Példa).



9.3 ábra

Mivel $\underline{v}^1$ és $\underline{v}^2$ lineárisan függetlenek, ezért az általuk kifeszített ferdeszögű koordináta-rendszerben a trajektóriák egyenlete:

$$\xi_1(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos\beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin\beta t ,$$

$$\xi_2(t) = c_2 e^{\alpha t} \cos\beta t - c_1 e^{\alpha t} \sin\beta t .$$

Vezessük be a

$$c_1 = a \cos\varphi , \quad c_2 = - a \sin\varphi ,$$

jelöléseket, akkor

$$\xi_1(t) = a \cos(\beta t + \varphi) e^{\alpha t},$$

$$\xi_2(t) = a \sin(\beta t + \varphi) e^{\alpha t}.$$

Innen

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = a^2 e^{2\alpha t} = \varrho^2,$$

ami a (ϱ , t) "ferdeszögü" polárkoordináta-rendszerben a

$$\varrho = |a| e^{\alpha t}$$

egyenletü görbének felel meg.

d) Az $\alpha = 0$ esetben a

$$\varrho = |a|$$

egyenlet ellipszisnek felel meg - ekkor az origó stabilis (de nem aszimptotikusan stabilis) egyensulyi helyzet, un. centrum (lásd 9.4 ábra), a trajektóriák zártak (ez felel meg a periódikus megoldásnak).

e) Ha $\alpha > 0$, akkor mivel

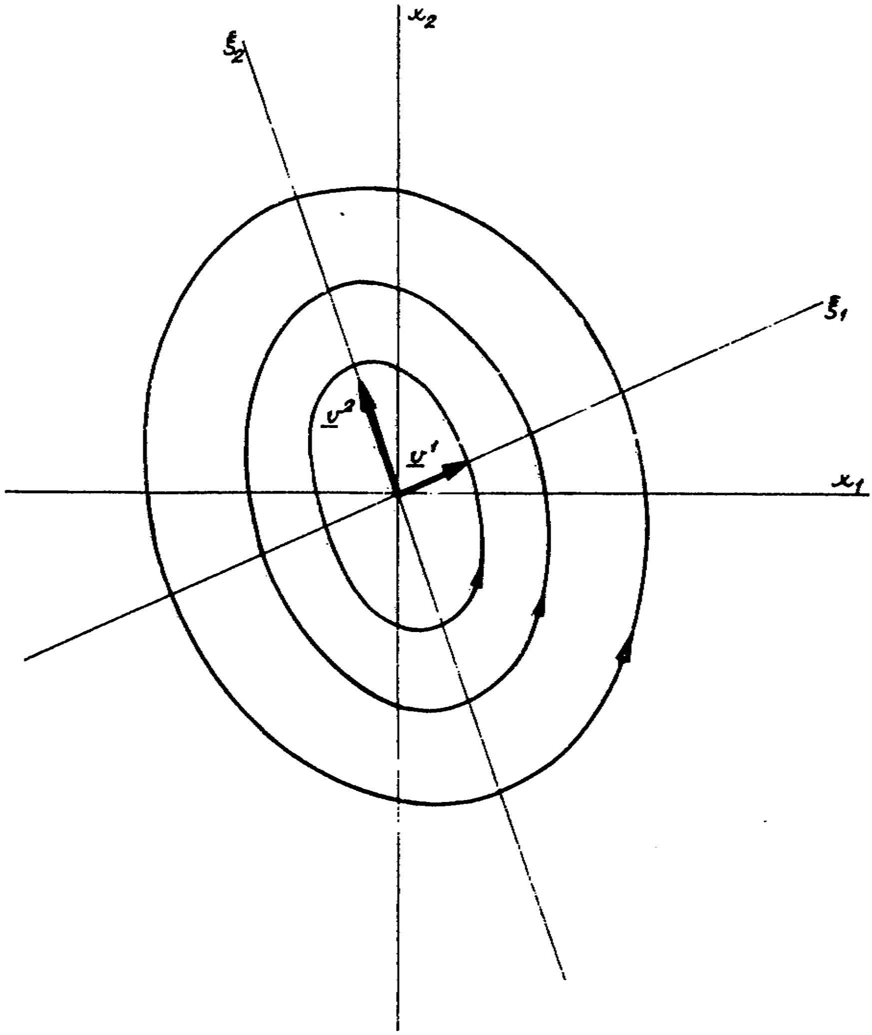
$$\lim_{t \to \infty} \varrho(t) = \infty$$

az origót labilis fókusznak nevezzük (lásd 9.5 ábra).

f) $\alpha < 0$ esetén

$$\lim_{t \to \infty} \varrho(t) = 0,$$

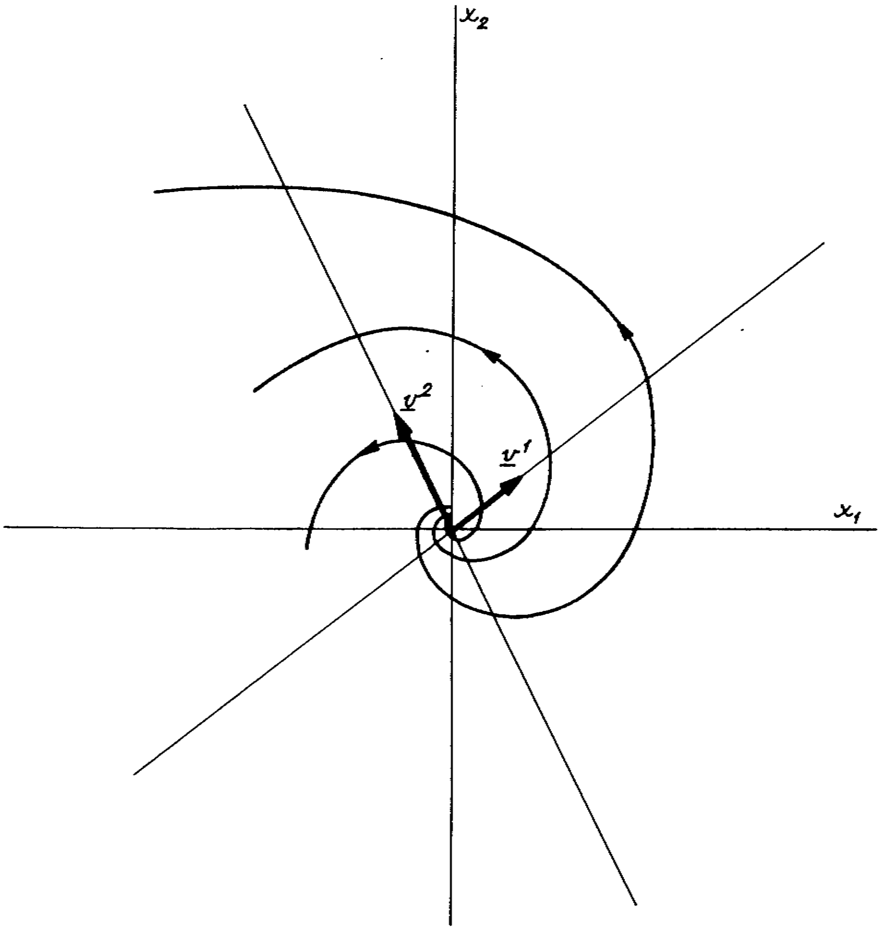
ezért az origót stabilis fókusznak nevezzük (lásd 9.6 ábra). Az origó ekkor aszimptotikusan stabilis.



9.4 ábra

Legyen most $\det \underline{A} = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_1 \neq 0$. Ekkor az általános megoldás

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s}^1 + c_2 \underline{s}^2 .$$

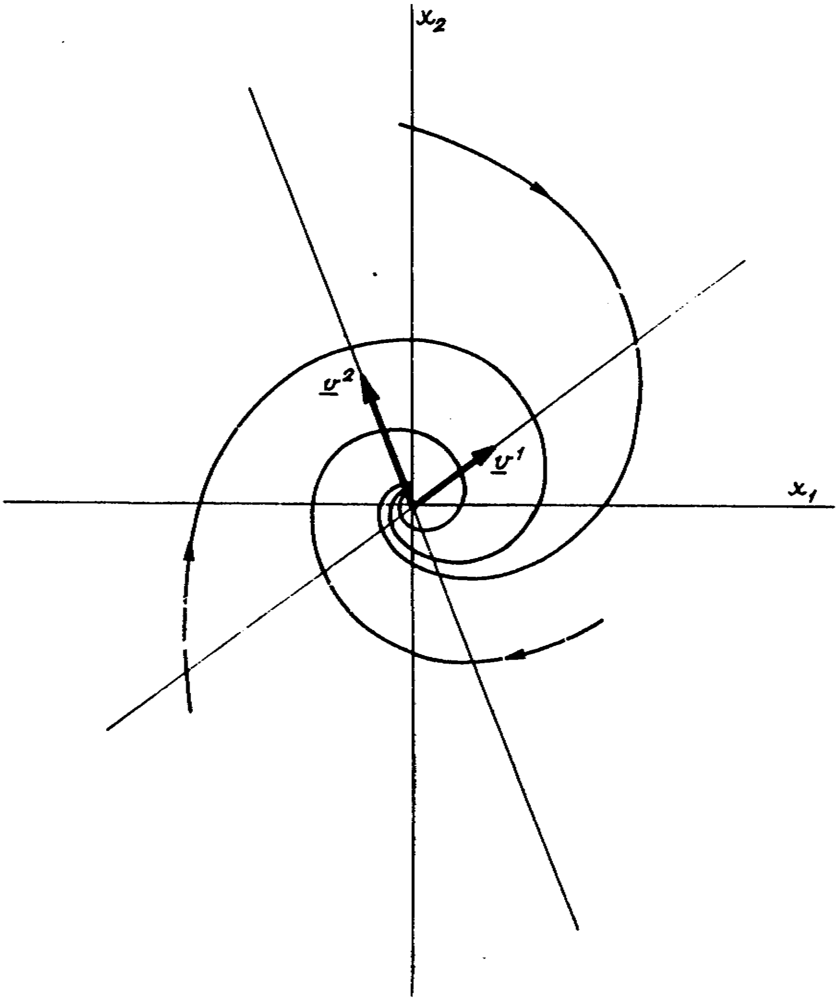


9.5 ábra

Ez $\underline{s}^1$ és $\underline{s}^2$ ferdeszögű rendszerében a

$$\xi_1(t) = c_1 \, e^{\lambda_1 t} \quad , \quad \xi_2(t) = c_2$$

paraméteres egyenletet jelenti. Ekkor a $\xi_1 = 0$ egyenes minden pontja ($c_1 = 0$, c_2 tetszőleges) egyensulyi helyzet, az origó nem izolált szinguláris pont.

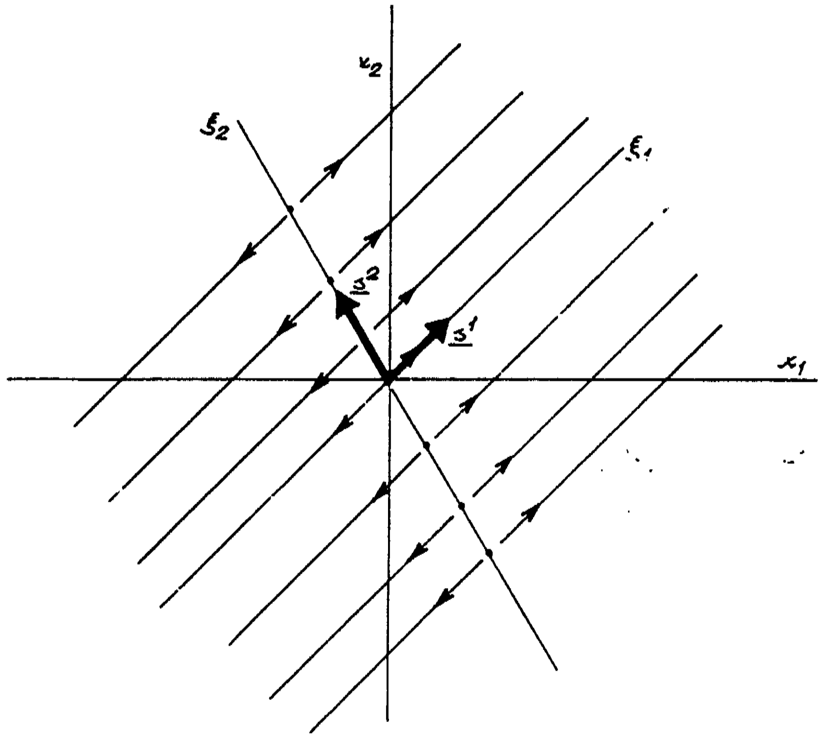


9.6 ábra

Ha $\lambda_1 > 0$, akkor

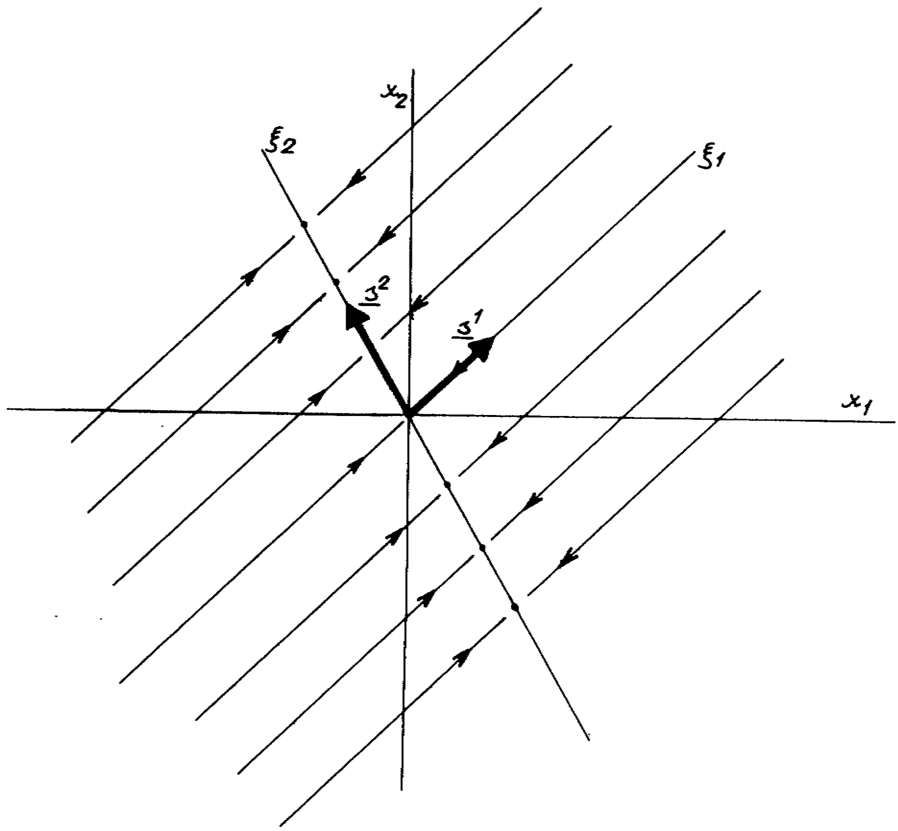
$$\lim_{t \to \infty} |\xi_1(t)| = \infty$$

lévén az origó és a $\xi_1 = 0$ egyenes minden pontja nem stabilis egyensulyi helyzet (lásd 9.7 ábra).



9.7 ábra

Ha $\lambda_1 < 0$, akkor a $\xi_1 = 0$ egyenes minden pontja stabilis (de nem aszimptotikusan stabilis) egyensulyi helyzet (lásd 9.8 ábra).



9.8 ábra

10. Az n-edrendű lineáris differenciálegyenlet

Legyen adott az I_t nyilt intervallum és az $a_i : I_t \mapsto R$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $b : I_t \mapsto R$ folytonos függvények. Vizsgáljuk az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \qquad (10.1)$$

n-edrendü explicit inhomogén lineáris differenciálegyenletet. (10.1) a (6.4) általános n-edrendü differenciálegyenlet speciális esete. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= y', \\ x_3 &= y'', \\ &- - - - - \\ x_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

ekkor (10.1) a

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &- - - - - \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n, \end{aligned}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_0(t)\,x_1 - a_1(t)\,x_2 - \ldots - a_{n-1}(t)\,x_n + b(t) \qquad (10.2)$$

alakot ölti. Az átviteli elv alapján (6.1 Tétel) (10.1) és (10.2) ekvivalensek. A bevezetett jelölésekkel (10.2) mátrixos alakja:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t), \qquad (10.3)$$

ahol

$$\underline{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & - - - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ - - - & & & & - - - & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \ldots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján (10.3)-ra a 7.1 Tétel nyilvánvalóan alkalmazható, pontosabban fennáll a következő

<u>10.1 Tétel.</u> Legyenek a_i, $b \in C^0_{I_t}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, és legyen $\tau \in I_t$, $\underline{\xi} \in R^n$ tetszőleges. Ekkor (10.1)-nek van egy és csak egy, az I_t-n értelmezett $y(t)$ megoldása, melyre

$$
\begin{aligned}
y(\tau) &= \xi_1, \\
y'(\tau) &= \xi_2, \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(\tau) &= \xi_n .
\end{aligned}
$$

<u>Bizonyitás.</u> (10.3)-nak van egy és csak egy $\underline{x}(t)$ megoldása, melyre $\underline{x}(\tau) = \underline{\xi}$ és $\underline{x}(t)$ értelmezve van az I_t intervallumon (lásd 7.1 Tétel). Az átviteli elv (6.1 Tétel) alapján viszont az

$$y(t) = x_1(t)$$

függvény (10.1) megoldása, melyre

$$
\begin{aligned}
y(\tau) &= \xi_1, \\
y'(\tau) &= \xi_2, \\
y^{(n-1)}(\tau) &= \xi_n .
\end{aligned}
$$

Foglalkozzunk először itt is az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0 \qquad (10.4)$$

homogén differenciálegyenlettel, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}(t)\, \underline{x} \qquad (10.5)$$

differenciálegyenlet rendszerrel ($\underline{A}$ az előbbiekben bevezetett n-edrendü mátrix). (10.4) megoldáshalmazának vizsgálatához elegendő azt tudni, hogy (10.5) megoldásvektorainak első koordinátái (10.4) megoldásai. Igy változtatás nélkül érvényesek a homogén lineáris rendszer megoldásaira vonatkozó tételek itt is; a 7.3 Tétel megfelelője a

<u>10.2 Tétel.</u> Ha $y^1, y^2, \ldots, y^k$ (10.4) megoldásai és c_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ tetszőleges állandó, akkor a

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y^i$$

függvény is megoldása (10.4)-nek.

Ha $y^1, y^2, \ldots, y^n$ (10.4) megoldásai és a nekik megfelelő $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ függvények (10.5) megoldásai, akkor a két függvényrendszer Wronski determinánsa egyenlő:

$$W(y^1, y^2, \ldots, y^n) = W(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n)$$

(lásd 3.3 és 7.3 Definició). Ennek és a 7.5 Tételnek következménye a

<u>10.3 Tétel.</u> (10.4) $y^1, y^2, \ldots, y^n$ megoldásai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek az I_t intervallumon (lásd 3.1 Definició), ha van $t_0 \in I_t$, melyre

$$W(y^1(t_0), y^2(t_0), \ldots, y^n(t_0)) \neq 0 .$$

<u>10.1 Definició.</u> Legyenek $y^1, y^2, \ldots, y^n$ (10.4) megoldásai. Az $\{y^1, y^2, \ldots, y^n\}$ halmazt a (10.4) homogén lineáris differenciálegyenlet <u>alaprendszerének</u> nevezzük, ha $y^1, y^2, \ldots, y^n$ az I_t intervallumon lineárisan függetlenek.

A 7.6 Tétel alapján nyilvánvaló a

10.4 Tétel. (10.4)-nek van alaprendszere.

Továbbá a 7.7 Tétel megfelelője a

10.5 Tétel. Legyen $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ (10.4) alaprendszere, akkor (10.4) bármely $y(t)$ megoldásához van egy és csak egy $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ rendezett szám n-es, hogy

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^i(t) .$$

(10.4) összes megoldásainak

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i y^i(t) : c_i \in R, \qquad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

halmazát nevezzük a homogén lineáris differenciálegyenlet *általános megoldásának.*

Az alaprendszer meghatározására általános esetben itt sincs módszer. Azonban egy nem triviális megoldás ismeretében a differenciálegyenlet rendje eggyel csökkenthető.

10.6 Tétel. Legyen $y_1 \not\equiv 0$ (10.4) megoldása, akkor van $v : I \mapsto R$, $I \subset I_t$ legalább n-szer differenciálható függvény, hogy az $y_2 = v\, y_1$ függvény is (10.4) megoldása, és y_1 és y_2 az I intervallumon lineárisan függetlenek.

Bizonyítás. A bizonyítás során megmutatjuk, hogy v és ezzel az y_1-től független y_2 megoldás meghatározása egy (n-1)-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásán múlik. Ha $y_1(t)$ (10.4) megoldása, akkor fennáll az

$$y_1^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\, y_1'(t) + a_0(t)\, y_1(t) \equiv 0$$

azonosság, vagy az $a_n(t) \equiv 1$ jelöléssel a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_1^{(k)}(t) \equiv 0$$

azonosság. Tételezzük fel, hogy van v (nem azonosan konstans) függvény, melyre az $y_2 = v\, y_1$ függvény is (10.4) megoldása. Ekkor fenn kell állnia

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_2^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, (v \cdot y_1(t))^{(k)} \equiv 0$$

azonosságnak. Mivel azonban

$$y_2^{(k)} = (v \cdot y_1)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v^{(i)}\, y_1^{(k-i)},$$

(lásd II. Kötet, 14.1 Tétel), ezért ez utóbbi azonosság a következőképpen irható át:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v^{(i)}(t)\, y^{(k-i)}(t) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \binom{k}{0} v^{(0)}(t)\, y_1^{(k-0)}(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} v^{(i)}(t)\, y_1^{(k-i)}(t) \equiv$$

$$\equiv v(t) \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_1^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, v^{(k)}(t) \equiv 0 .$$

Mivel $y_1(t)$ (10.4) megoldása, $v(t)$ együtthatója zérus, és mivel $A_k(t)$ az ismert $a_k(t)$ és $y_1^{(k)}(t)$ függvények szorzataiból álló ismert függvény, az azonosságból az következik, hogy a $v(t)$ függvénynek ki kell elégitenie a

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(t)\ v^{(k)} = 0$$

lineáris differenciálegyenletet.
Mivel:

$$A_n(t) = a_n(t) \cdot \binom{n}{n} y_1^{(n-n)}(t) \equiv y_1(t) \not\equiv 0 ,$$

van olyan $I \subset I_t$ intervallum, melyben a fenti differenciálegyenlet pontosan n-edrendü, $y_1(t) \neq 0$, $t \in I$.

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy ha v a kivánt feltételeknek eleget tevő függvény, akkor a $z(t) = v'(t)$ derivált függvény kielégiti a

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1}(t)\ z^{(k)} = 0$$

pontosan (n-1)-edrendü differenciálegyenletet. Megforditva, legyen $z(t)$ ennek a differenciálegyenletnek egy nem triviális megoldása (ilyen létezik, lásd 10.4 Tétel). Ekkor a $v(t) = \int z(t)\,dt$ függvény nem azonosan kons-

Térjünk vissza a (10.1) inhomogén lineáris differenciálegyenlet, ill. a vele ekvivalens (10.3) rendszer megoldásainak vizsgálatához. A rendszerre vonatkozó tételek megfelelő inhomogén esetben is érvényesek: (lásd: 7.10 Tétel, 7.11 Következmény):

<u>10.7 Tétel.</u> Ha y^1 és y^2 (10.1) megoldásai, akkor $y^1 - y^2$ (10.4) megoldása.

<u>10.8 Tétel.</u> Ha y^I (10.1) megoldása és $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ (10.4) alaprendszere, akkor (10.1) összes megoldásainak halmaza:

$$\left\{ y^I + \sum_{j=1}^{n} c_j y^j : c_j \in R, \quad j = 1,2,\dots,n \right\} .$$

Ezt a halmazt nevezzük az inhomogén lineáris differenciálegyenlet <u>általános megoldásának.</u>

Az előbbi tételből látható, hogy (10.4) alaprendszerének ismeretében (10.1) általános megoldásának meghatározásához (10.1) egy megoldását kell ismernünk. Ez utóbbinak meghatározására "az állandók variálásának" módszerét alkalmazzuk.

10.9 Tétel. Legyen $\{y^1, y^2, \ldots, y^n\}$ (10.4) alaprendszere, akkor vannak olyan $c_i : I_t \mapsto R$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ legalább n-szer differenciálható függvények, hogy

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, y^i(t)$$

(10.1) megoldása (v.ö. (7.14)).

Bizonyitás. A bizonyitáshoz elegendő megjegyezni azt, hogy a (10.1)-nek megfelelő (10.3) rendszerre alkalmazható a 7.12 Tétel és (10.1) megoldását a (7.11) (ill. ami ugyanaz a (7.14)) vektorfüggvény első koordinátája szolgáltatja.!

A (10.1) inhomogén differenciálegyenletben szereplő $b(t)$ függvényt külső kényszernek nevezzük. Külső kényszerek "szuperpoziciója" esetén érvényes a következő

10.10 Tétel. ("Szuperpozició elve"). Legyen $y^1(t)$ az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' +$$

$$+ a_0(t)\, y = b_1(t)\,,$$

ill. $y^2(t)$ az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' +$$

$$+ a_0(t)\, y = b_2(t)$$

differenciálegyenlet megoldása, akkor $y^1(t) + y^2(t)$ az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' +$$

$$+ a_0(t)\, y = b_1(t) + b_2(t)$$

differenciálegyenlet megoldása.

Bizonyitás. Ha $y^1(t)$, ill. $y^2(t)$ a kivánt megoldás, akkor fennállnak az alábbi azonosságok:

$$y^{1^{(n)}}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{1^{(n-1)}}(t) + \ldots + a_1(t)\, y^{1'}(t) +$$

$$+ a_0(t)\, y^1(t) \equiv b_1(t),$$

$$y^{2^{(n)}}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{2^{(n-1)}}(t) + \ldots + a_1(t)\, y^{2'}(t) +$$

$$+ a_0(t)\, y^2(t) \equiv b_2(t).$$

Az azonosságokat összeadva az

$$y^{1^{(n)}}(t) + y^{2^{(n)}}(t) + a_{n-1}(t)\, (y^{1^{(n-1)}}(t) + y^{2^{(n-1)}}(t)) + \ldots +$$

$$+ a_1(t)\, (y^{1'}(t) + y^{2'}(t)) + a_0(t)\, (y^1(t) + y^2(t)) \equiv$$

$$\equiv (y^1(t) + y^2(t))^{(n)} + a_{n-1}(t)\, (y^1(t) + y^2(t))^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ a_1(t)\, (y^1(t) + y^2(t))' + a_0(t)\, (y^1(t) + y^2(t)) \equiv$$

$$\equiv b_1(t) + b_2(t)$$

azonosság adódik.!

Legyen most speciálisan $a_i(t)$, $(i = 0, 1, \dots, n)$ konstans függvény, $a_i(t) \equiv a_i'$ és foglalkozzunk az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(t) \qquad (10.6)$$

<u>állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlettel.</u> Legyen először $b(t) \equiv 0$, azaz

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = 0 . \qquad (10.7)$$

Ha (10.7)-et rendszerré irjuk át, a szokásos jelölésekkel, akkor a

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\,\underline{x} \qquad (10.8)$$

homogén lineáris differenciálegyenlet rendszert kell vizsgálnunk, ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

n-edrendű konstans mátrix. A (10.8) rendszerre alkalmazható 8.7 Tétel alapján (10.8) alapmátrixa az

$$\underline{X}(t) = e^{\underline{A}t}$$

mátrix.

Ennek meghatározásához az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeire, azaz a det $(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeire van szükségünk:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Emeljük ki a determináns utolsó sorából a (-1) szorzót. Adjuk hozzá a determináns utolsó oszlopának λ -szorosát az utolsó előttihez, majd az uj utolsó előtti oszlop λ -szorosát az azelőttihez, és igy tovább, végül az uj második oszlop λ -szorosát az elsőhöz. Ekkor a főátlóban álló $(-\lambda)$-k helyét nullák veszik át, az utolsó sorban pedig az történik, mint amikor a

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \qquad (10.9)$$

polinomot a Horner elrendezés szerint (lásd II. Kötet, (21.10)) irjuk fel. Igy

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & . \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ D(\lambda) & D_{n-1}(\lambda) & \dots & \lambda(\lambda + a_{n-1}) + a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} ,$$

ahol az utolsó sor elemeit rendre $D(\lambda)$, $D_{n-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda)$-val jelölve $D_k(\lambda)$ k-adfoku polinom $(k = 1, 2, \dots, n-1)$.

Az első oszlop szerint kifejtve

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = (-1)^{n+2} D(\lambda) \det \underline{E}_{n-1} = (-1)^n D(\lambda) .$$

Ezek szerint az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja (egy esetleges (-1) szorzótól eltekintve) (10.9) és a sajátértékek a

$$D(\lambda) = \lambda^n a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \qquad (10.10)$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. (10.10)-et az állandó együtthatós, homogén lineáris (10.7) differenciálegyenlet <u>karakterisztikus egyenletének</u>, a karakterisztikus egyenlet megoldásait (10.7) <u>sajátértékeinek</u> nevezzük. Megjegyezzük, hogy a karakterisztikus egyenlethez más uton is eljuthatunk.

Ugyanis, ha feltételezzük, hogy (10.7)-nek van $e^{\lambda t}$ megoldása, és ezt behelyettesitjük (10.7)-be, akkor az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\lambda^n e^{\lambda t} + \lambda^{n-1} a_{n-1} e^{\lambda t} + \ldots + \lambda a_1 e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \equiv 0,$$

és ez nyilván csak ugy állhat fenn, ha λ kielégiti a $D(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletet. A λ sajátértékek ismeretében az $\underline{X}(t)$ alapmátrix meghatározható. (10.7) alaprendszerének ismeretében azonban erre nincs is szükség. A 10.12 Tételben explicit módon felirjuk (10.7) egy alaprendszerét. Ehhez azonban egy kis előkészitésre van szükség. Bevezetjük a következő szimbolikus jelölést. "A t változó szerinti differenciálás operátorát" p-vel jelöljük, vagyis

$$p = \frac{d}{dt} .$$

Ha y differenciálható függvény, akkor

$$py = \frac{dy}{dt} .$$

A p operátor k-adik hatványa ($k = 1, 2, \ldots$)

$$p^k = \frac{d^k}{dt^k} ,$$

$$p^0 = 1.$$

Ha y k-szor differenciálható függvény, akkor

$$p^k y = \frac{d^k y}{dt^k} .$$

Legyen $B(\lambda)$ N-edfoku polinom:

$$B(\lambda) = b_N \lambda^N + b_{N-1} \lambda^{N-1} + \ldots + b_1 \lambda + b_0 . \qquad (10.11)$$

A p operátor $B(p)$ polinomja a

$$B(p) = \sum_{k=0}^{N} b_k p^k = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k}{dt^k}$$

szimbólum, vagyis ha y N-szer differenciálható függvény, akkor

$$B(p)\, y = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k}{dt^k} y = \sum_{k=0}^{N} b_k y^{(k)} .$$

<u>10.11 Segédtétel.</u> Legyen $B(\lambda)$ a (10.11) polinom és $m \in T$; ekkor

$$B(p)\left[t^m e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t} \sum_{h=0}^{N} \binom{m}{h} B^{(h)}(\lambda) t^{m-h} ,$$

ahol $B^{(h)}(\lambda)$ B-nek λ szerinti h-adik deriváltját jelöli.

<u>Bizonyitás.</u> Vezessük be az $y(t) = t^m e^{\lambda t}$ jelölést. Ekkor a Leibniz-féle differenciálási szabály (II. Kötet, 14.1 Tétel) alkalmazásával

$$y^{(k)}(t) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \left(t^m\right)^{(h)} \left(e^{\lambda t}\right)^{(k-h)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} m(m-1)\dots(m-h+1)\, t^{m-h} \lambda^{k-h} e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{h=0}^{N} \binom{k}{h} m(m-1)\dots(m-h+1)\, t^{m-h} \lambda^{k-h} ,$$

$$(k = 1, 2, \dots, N) ,$$

mivel $\binom{k}{h} = 0$, ha $h > k$.

$$B(p)\, y(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k y^{(k)}(t) =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{N} \sum_{h=0}^{N} b_k \binom{m}{h} t^{m-h} k(k-1)\dots(k-h+1) \lambda^{k-h} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{h=0}^{N} \binom{m}{h} t^{m-h} \sum_{k=0}^{N} b_k (\lambda^k)^{(h)} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{h=0}^{N} \binom{m}{h} t^{m-h} B^{(h)}(\lambda) . !$$

<u>10.12 Tétel.</u> Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ a (10.10) karakterisztikus egyenlet különböző gyökei rendre $m_1, m_2, \dots, m_\ell$ multiplicitással $\left(\sum_{k=1}^{\ell} m_k = n \right)$, akkor (10.7) alaprendszere a

$$\left\{ t^{r_k} e^{\lambda_k t} : r_k = 0, 1, \dots, m_k - 1; \quad k = 1, 2, \dots, \ell \right\}$$

függvényhalmaz.

Bizonyitás. Az, hogy a függvényhalmaz elemei (10.7) megoldásai, azonnal adódik a 10.11 Segédtételből. Ugyanis bevezetve az $y_{rk} = t^{r_k} e^{\lambda_k t}$ jelölést

$$D(p)\, y_{rk} = e^{\lambda_k t} \sum_{h=0}^{n} \binom{r_k}{h} D^{(h)}(\lambda_k)\, t^{r_k - h} =$$

$$= e^{\lambda_k t} \sum_{h=0}^{r_k} \binom{r_k}{h} D^{(h)}(\lambda_k)\, t^{r_k - h} = 0,$$

mivel

$$D(\lambda_k) = D'(\lambda_k) = \ldots = D^{(r_k)}(\lambda_k) = 0,$$

hiszen λ_k a $D(\lambda)$ polinom m_k-szoros gyöke és $m_k > r_k$, $k = 1, 2, \ldots, \ell$.

Bebizonyitjuk, hogy az y_{rk} függvények alaprendszert alkotnak. Tekintsük a függvények Wronski-determinánsát. Ennek a determinánsnak első sorában az y_{rk} függvények, a másodikban ezek deriváltjai, a harmadikban a másodrendű deriváltak, ..., az n-edikben az (n-1)-edrendű deriváltak állnak. Megmutatjuk, hogy a Wronski-determináns nem zérus. Ebből a 10.3 Tétel alapján állitásunk következik. Azt, hogy a Wronski-determináns nem zérus, sorainak lineáris függetlensége biztositja. Tegyük fel, hogy a Wronski-determináns sorainak valamilyen lineáris kombinációja zérus, vagyis vannak olyan $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ állandók, hogy minden $r = r_k$-ra és k-ra

$$c_0 y_{rk} + c_1 y'_{rk} + c_2 y''_{rk} + \ldots + c_{n-1} y^{(n-1)}_{rk} = 0 .$$

Ha bevezetjük az $M(p) = c_{n-1} p^{n-1} + \ldots + c_1 p + c_0$ jelölést, azt látjuk, hogy az y_{rk} függvények az $M(p)\, y = 0$ differenciálegyenlet megoldásai.

Ez a 10.11 Segédtétel szerint azt jelenti, hogy

$$M(p)\, y_{rk} = M(p)\left[t^{r_k} e^{\lambda_k t}\right] =$$

$$= e^{\lambda_k t} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{r_k}{h} M^{(h)}(\lambda_k)\, t^{r_k - h} \equiv 0,$$

ahonnan

$$M(\lambda_k) = M'(\lambda_k) = M''(\lambda_k) = \ldots = M^{(r_k)}(\lambda_k) = 0$$

következik ($k = 1, 2, \ldots \ell$; $r_k = 0, 1, \ldots, m_k - 1$). Ezek szerint λ_k az $M(\lambda)$ polinom m_k-szoros gyöke ($k = 1, 2, \ldots, \ell$). Mivel $\sum_{k=1}^{\ell} m_k = n$, ez azt jelenti, hogy a legfeljebb $(n-1)$-edfoku $M(\lambda)$ polinomnak (multiplicitásokkal számitva) legalább n számu gyöke van. Innen a III. Kötet, 7.7 Következmény alapján adódik, hogy $c_{n-1} = \ldots = c_1 = c_0 = 0$, vagyis a Wronski-determináns sorai valóban lineárisan függetlenek. !

10.1 Példa. Oldjuk meg a

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, t\, y' + a_0\, y = 0, \quad t > 0$$

Euler-tipusu lineáris differenciálegyenletet (a_k, ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) állandó).

Ez az egyenlet uj független változó bevezetésével állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletté alakitható. Legyen $t = e^{\vartheta}$. Ha $y(t)$ megoldás, akkor behelyettesitve a differenciálegyenletbe azonosságot nyerünk:

$$t^n y^{(n)}(t) + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots +$$

$$+ a_1\, t y'(t) + a_0 y(t) \equiv 0 \quad . \tag{10.12}$$

Az uj változó bevezetésével, az $y(t(\vartheta)) = y(e^{\vartheta})$ függvényt $\tilde{y}$-mal jelölve

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{t} \, .$$

Feltételezzük, hogy a k-adik deriváltra

$$\frac{d^k y}{dt^k} = \left(\frac{d^k \tilde{y}}{d\vartheta^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1}\tilde{y}}{d\vartheta^{k-1}} + \ldots + c_1 \frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}\right)\frac{1}{t^k} \, ,$$

$$c_i \in R, \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{10.13}$$

akkor a (k+1)-edik derivált

$$\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} = \frac{d}{dt} \frac{d^k y}{dt^k} =$$

$$= \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{d^k \tilde{y}}{d\vartheta^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1}\tilde{y}}{d\vartheta^{k-1}} + \ldots + c_1 \frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}\right) \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{1}{t^k} +$$

$$+ \left(\frac{d^k \tilde{y}}{d\vartheta^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1}\tilde{y}}{d\vartheta^{k-1}} + \ldots + c_1 \frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}\right) \frac{-k}{t^{k+1}} =$$

$$= \left[\frac{d^{k+1}\tilde{y}}{d\vartheta^{k+1}} + (c_{k-1} - k) \frac{d^k \tilde{y}}{d\vartheta^k} + (c_{k-2} - k\, c_{k-1}) \frac{d^{k-1}\tilde{y}}{d\vartheta^{k-1}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (c_1 - k\, c_2) \frac{d^2 \tilde{y}}{d\vartheta^2} - k c_1 \frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}\right] \frac{1}{t^{k+1}} \, ,$$

vagyis matematikai indukcióval beláttuk, hogy meghatározott, k-tól függő c_i állandókkal (10.13) minden k-ra fennáll.

A deriváltakat (10.12)-be helyettesitve tehát a

$$\frac{d^n\tilde{y}}{d\vartheta^n}+\tilde{a}_{n-1}\frac{d^{n-1}\tilde{y}}{d\vartheta^{n-1}}+\ldots+\tilde{a}_1\frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}+\tilde{a}_0\tilde{y}\equiv 0$$

azonosság adódik, ami azt jelenti, hogy az

$$y(e^{\vartheta})=\tilde{y}(\vartheta)$$

függvény kielégiti a

$$\frac{d^n\tilde{y}}{d\vartheta^n}+\tilde{a}_{n-1}\frac{d^{n-1}\tilde{y}}{d\vartheta^{n-1}}+\ldots+\tilde{a}_1\frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}+\tilde{a}_0\tilde{y}=0$$

állandó együtthatós differenciálegyenletet. Legyenek ez utóbbi differenciálegyenlet sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ rendre $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ multiplicitással, akkor a 10.12 Tétel szerint az alaprendszer a

$$\left\{ \vartheta^{r_k} e^{\lambda_k\vartheta} : r_k=0,1,\ldots,m_k-1;\ k=1,2,\ldots,\ell \right\}$$

függvényhalmaz, vagyis az eredeti t változóra visszatérve az Euler-féle differenciálegyenlet alaprendszere

$$\left\{ t^{\lambda_k} \ln^{r_k} t : r_k=0,1,\ldots,m_k-1;\quad k=1,2,\ldots,\ell \right\}.$$

A (10.6) állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásának megkeresése az állandók variálásával történhet (lásd 10.9 Tétel). Igen sok, gyakorlatban fontos esetben alkalmazható azonban egy egyszerübb módszer, az un. "Ansatz"-cal való megoldás.

<u>10.13 Tétel.</u> Legyen $a_i \in R$, továbbá

$$b(t) = e^{\omega_1 t}(P_1(t)\cos\omega_2 t + $$

$$+ P_2(t)\sin\omega_2 t), \qquad (10.14)$$

ahol ω_1, ω_2, $\in R$ és P_1, valamint P_2 (legfeljebb N-edfoku polinomok. Ilyen feltételek mellett az

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' +$$

$$+ a_0 y = b(t)$$

differenciálegyenletnek van

$$y(t) = t^r e^{\omega_1 t}(Q_1(t)\cos\omega_2 t +$$

$$+ Q_2(t)\sin\omega_2 t) \qquad (10.15)$$

megoldása, ahol r az $\omega_1 + i\,\omega_2$ gyök multiplicitása a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenletben, Q_1 és Q_2 pedig (legfeljebb) N-edfoku polinomok.

A tételt nem bizonyitjuk. A bizonyitást lásd [7] 153.o. Alkalmazása minden konkrét esetben tulajdonképpen a szóban forgó esetre bizonyitás. A 10.13 Tételt gyakorlatilag ugy alkalmazzuk, hogy a Q_1 és Q_2 polinomokat határozatlan együtthatókkal vesszük fel és az együtthatókat a differenciálegyenletbe való behelyettesités utján határozzuk meg.

10.2 Példa. Vizsgáljuk egy rugó egyik végéhez rögzitett m tömegü test rezgéseit harmonikus "kényszer" hatására. A rugó tömegét elhanyagoljuk és a nehézségi erő hatását is kiküszöböljük, vagy elhanyagoljuk (m-et tehát csak mint "tehetetlen tömeget" és nem mint "sulyos tömeget" vesszük figyelembe). Az elmozdulást jelöljük y-nal. Hooke törvénye szerint a rugóban fellép az egyensulyi helyzete felé mutató, a kitéréssel arányos "rugó erő": $-ky$, ahol k a rugalmassági állandó (rugóállandó). Hat a testre a sebességgel arányos, a mozgást akadályozó $-b\frac{dy}{dt}$ erő ("csillapitás" a külső surlódás, ill. a "hiszterézis" következtében), továbbá egy külső periódikus kényszererő: $a\cos\omega t$. Ezen erők hatására létrejövő mozgást Newton II. törvénye szerint az

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} + a\cos\omega t$$

differenciálegyenlet irja le, m, k, b, a pozitiv konstansok, t az idő, $\frac{dy}{dt}$ a sebesség és $\frac{d^2y}{dt^2}$ a gyorsulás. Rendezve az egyenletet a

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{a}{m}\cos\omega t \qquad (10.16)$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet kapjuk.

Vizsgáljuk először az $a = 0$ homogén esetet, tehát azt, amikor nincs külső kényszer. A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0,$$

amiből a sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

$b \neq 0$, tehát λ_1, λ_2 nem tiszta képzetes gyökök.

Legyen $b^2 > 4\,m\,k$, akkor λ_1, λ_2 valós negativ számok, tehát az általános megoldás

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} .$$

Ha $b^2 = 4\,m\,k$, akkor $\lambda_1 = \lambda_2$ valósak, az általános megoldás

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t\, e^{\lambda_2 t} .$$

Ha $b^2 < 4\,m\,k$, akkor λ_1 és λ_2 egymás komplex konjugáltjai, a valós általános megoldás:

$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2m} t} \cos \varrho\, t + c_2 e^{-\frac{b}{2m} t} \sin \varrho\, t, \quad \varrho = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m},$$

ϱ -t a rendszer <u>sajátfrekvenciájának</u> szokták nevezni. Mindhárom esetben a mozgás csillapodó.

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0,$$

ez megfelel az $y = 0$ egyensulyi helyzet aszimptotikus stabilitásának.

A külső kényszer hatására történő mozgást leiró (10.16) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását ugy kapjuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk (10.16) egy megoldását. A 10.13 Tétel alkalmazható. Mivel most a P_1 és P_2 polinomok nulladfokuak, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega$ és $i\omega$ nem sajátérték, igy (10.16) egy megoldása

$$y^I(t) = A_1 \cos \omega\, t + A_2 \sin \omega\, t = A \cos(\omega t + \varphi),$$

ahol A és φ alkalmas állandók.

Miután a homogén egyenlet általános megoldása $t \to \infty$ esetén zérushoz tart, az $y^{I}(t)$ megoldás aszimptotikusan stabilis. Ezek szerint bizonyos idő elteltével a rugó átveszi a kényszer frekvenciáját és ennek megfelelő harmonikus rezgést végez. Az átmeneti állapotot, mig ez a helyzet beáll, tranziens jelenségnek nevezik.

Sok esetben a csillapodás gyakorlatilag elhanyagolható, $\frac{b}{m} \ll 1$. Ekkor a "szabad rezgést" (külső kényszer nélkül) leiró differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 .$$

Amiből

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 ,$$

azaz

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Tehát az általános megoldás

$$y(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t .$$

$\sqrt{\frac{k}{m}}$ a rendszer sajátfrekvenciája. A test valóban csillapitatlan periódikus mozgást végez. Itt $y(t)$ korlátos és elég kis kezdeti értékeket választva tetszőlegesen kis amplitudóju rezgést létre tudunk hozni; $y = 0$ stabilis egyensulyi helyzet.

Végül vizsgáljuk a kényszer hatásának kitett, csillapitatlan rendszert:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = \frac{a}{m} \cos \omega t .$$

Legyen először $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$, vagyis $i\omega$ ne legyen sajátérték.

Ekkor a 10.13 Tétel alapján van

$$y(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

alaku megoldás.

$$\frac{dy(t)}{dt} = C \omega \cos \omega t - D\omega \sin \omega t ,$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = - C \omega^2 \sin \omega t - D \omega^2 \cos \omega t ,$$

amiből a differenciálegyenletbe helyettesitve

$$- C \omega^2 \sin \omega t - D \omega^2 \cos \omega t + \frac{k}{m} C \sin \omega t + \frac{k}{m} D \cos \omega t \equiv$$

$$\equiv \frac{a}{m} \cos \omega t$$

adódik. Tehát

$$(- C \omega^2 + \frac{k}{m} C) \sin \omega t \equiv 0 ,$$

$$(- D \omega^2 + \frac{k}{m} C) \cos \omega t \equiv \frac{a}{m} \cos \omega t .$$

Igy

$$C = 0 \quad \text{és} \quad D = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

Az általános megoldás:

$$y(t) = c_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\frac{a}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \cos \omega t .$$

Ha ω és $\sqrt{\frac{k}{m}}$ viszonya racionális, akkor a rezgés periódikus, ha irracionális, akkor aperiódikus mozgás jön létre.

Legyen most $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tehát a kényszer frekvenciája egyezzék meg a rugó sajátfrekvenciájával. Ekkor, mivel ω egyszeres sajátérték, a megoldás a 10.13 Tétel szerint

$$y(t) = t(C_1 \sin\omega t + D_1 \cos\omega t) .$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = C_1 \sin\omega t + D_1 \cos\omega t +$$

$$+ t(C_1\omega \cos\omega t - D_1\omega \sin\omega t) ,$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 2C_1\omega \cos\omega t - 2D_1\omega \sin\omega t -$$

$$- t(C_1\omega^2 \sin\omega t + D_1\omega^2 \cos\omega t) .$$

Behelyettesitve a differenciálegyenletbe:

$$2C_1\omega \cos\omega t - 2D_1\omega \sin\omega t - t(C_1\omega^2 \sin\omega t +$$

$$+ D_1\omega^2 \cos\omega t) + \frac{k}{m} t(C_1 \sin\omega t + D_1 \cos\omega t) =$$

$$= \frac{a}{m} \cos\omega t .$$

Amiből

$$2C_1\omega \cos\omega t = \frac{a}{m} \cos\omega t ,$$

$$2D_1\omega \sin\omega t = 0 ,$$

azaz

$$C_1 = \frac{a}{2m\omega}, \quad D_1 = 0 .$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(t) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t + \frac{a}{2m\omega} t \cos\omega t .$$

Ez lényegileg különbözik az összes többi esettől, mert $y(t)$ nem korlátos. A rezgés amplitudója minden határon tul nő, un. "rezonancia" jön létre.

11. A Bessel-féle differenciálegyenlet. Bessel-függvények

Több fontos müszaki-fizikai feladat vezet az

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - p^2\right) y = 0 \qquad (11.1)$$

differenciálegyenletre, ahol $p \neq -1, -2, \ldots$, egyébként tetszőleges valós szám. Különösen gyakran vezetnek (11.1)-re a hengerszimmetriát mutató feladatok.

A (11.1) differenciálegyenletet p-indexü Bessel-féle differenciálegyenletnek nevezzük.

Megmutatjuk, hogy (11.1)-nek van

$$y(x) = x^p\, Y(x)$$

alaku megoldása, ahol Y a $(-\infty, \infty)$ intervallumon analitikus függvény. Közvetlen behelyettesitéssel adódik, hogy ha y kielégiti (11.1)-et, akkor Y a következő differenciálegyenlet megoldása (és forditva)

$$x\frac{d^2Y}{dx^2} + (2p+1)\frac{dY}{dx} + xY = 0 . \qquad (11.2)$$

Megmutatjuk, hogy (11.2)-nek van

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

analitikus megoldása. Tételezzük fel először, hogy e hatványsor összege megoldás, és helyettesitsük a hatványsort (11.2)-be. Mivel

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n nx^{n-1}, \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2},$$

kapjuk, hogy

$$.x \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + (2p+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n nx^{n-1} +$$

$$+ x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv 0 .$$

Az első két tagban az $n-1 = k$, a harmadikban az $n+1 = k$ összegező indexet bevezetve, majd k helyébe n-et irva a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1)\, n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2p+1)\, c_{n+1} (n+1)\, x^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \equiv 0 ,$$

vagyis a

$$(2p+1)\, c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(2p+1+n)\, c_{n+1} + c_{n-1} \right] x^n \equiv 0$$

azonosságot nyerjük. Ebből következik, hogy x^n $(n \in T)$ együtthatója zérus, vagyis a

$$(2p+1)\,c_1 = 0, \qquad (11.3)$$

$$c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{(n+1)(2p+n+1)}, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (11.4)$$

összefüggésekhez jutunk. (11.3)-ból $p \neq -\frac{1}{2}$ esetén következik, hogy $c_1 = 0$. Válasszuk c_1-et zérusnak $p = -\frac{1}{2}$ esetén is. Ekkor ugyanis (11.4) miatt minden páratlan indexü együttható zérus:

$$c_1 = c_3 = \ldots = c_{2k+1} = \ldots = 0\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,.$$

A páros indexü együtthatók c_0 segitségével felirhatók:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2p+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2p+4)} = \frac{(-1)^2 c_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2\cdot 4\ldots 2k\,(2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2k)} =$$

$$= \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}\,k!\,(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}, \quad k = 1,2,\ldots\,.$$

Tehát, ha az $Y(x)$ analitikus függvény (11.2) megoldása, akkor

$$Y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!\, (p+1)\ldots(p+k)}\, x^{2k} =$$

$$= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+1)\ldots(p+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad (11.5)$$

ahol c_0 tetszőleges állandó. Be kell látnunk, hogy a (11.5) hatványsor minden $x \in R$ helyen konvergens. Ez azonban nyilvánvaló, mivel legalább is bizonyos k indextől kezdve érvényes a

$$\left| \frac{(-1)^k}{k!\,(p+1)\ldots(p+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right| \leq \frac{1}{k!} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^k$$

becslés, és a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^k$$

sor konvergens (lásd IV. Kötet, 2.2 Példa). Mivel a minden x-re konvergens (11.5) hatványsor együtthatóit éppen a (11.2) differenciálegyenletbe való behelyettesitéssel határoztuk meg, az előbbiekből következik, hogy az általa előállitott függvény megoldása (11.2)-nek, és a $p \neq -\frac{1}{2}$ esetben nincs más ettől lineárisan független analitikus megoldás. Ennek megfelelően (11.1) egy megoldása

$$y(x) = x^p\, Y(x) = x^p\, c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+1)\ldots(p+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Legyen (11.1)-ben $p = n \in T$, akkor a megoldás az

$$y(x) = c_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+1)\ldots(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= c_0\, 2^n\, n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

alakban irható. $c_0 = \frac{1}{2^n\, n!}$ választásával (11.1) megoldása a

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \quad x \in R, \quad p = n \in T \qquad (11.6)$$

függvény.

11.1 Definició. A (11.6) függvényt elsőfaju n-indexü Bessel-függvénynek nevezzük.

Megjegyezzük azt, hogy definiálható a J_p elsőfaju p-indexü Bessel-függvény p tetszőleges valós, sőt komplex értékeire is (lásd [5]).

A különböző indexü Bessel-függvények között fennállnak a következő rekurziós formulák:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x), \qquad n = 1,2,\ldots, \qquad (11.7)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x), \qquad n \in T\,. \qquad (11.8)$$

E rekurziós formulák gyakorlati jelentősége az, hogy segitségükkel egy egész indexü Bessel-függvényre vonatkozó táblázat ismeretében más egész-indexü Bessel-függvény értékei számithatók.

(11.8) bizonyitása. (11.6) alapján

$$\frac{n}{x} J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \frac{n}{x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k} \frac{n}{2},$$

illetve

$$J'_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \frac{n+2k}{2}.$$

Vonjuk ki az első egyenlőségből a másodikat:

$$\frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k} (-k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(n+1+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2k-2}.$$

Bevezetve a $k-1 = m$ összegező indexet, majd m helyébe k-t irva:

$$\frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2k} = J_{n+1}(x) \quad .!$$

(11.7) bizonyitása analóg módon történhet, igy azt az olvasóra bizzuk.

Az egész-indexü Bessel-függvények további tulajdonságaihoz jutunk, ha a

$$w(z) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{xz}{2}} e^{-\frac{x}{2z}}, \quad x \in R; \; w, z \in Z \qquad (11.9)$$

függvény két tényezőjét külön-külön z hatványai szerint haladó Laurent-sorba fejtjük (lásd VII. Kötet, 10.1 Tétel)

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{z^m} .$$

Szorozzuk össze a két sort az abszolut konvergens sorok Cauchy-féle szorzási szabályának megfelelően (lásd IV. Kötet, 3.4 Definició és IV. Kötet, 3.5 Tétel).

$$\begin{aligned} w(z) = \ldots &+ z^{-n}\left[\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{(n+1)!}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{(n+2)!}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\right] + \\ &+ \ldots + z^{-1}\left[\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\right] + \\ &+ \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right] + \\ &+ z\left[\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\right] + \\ &+ \ldots + z^n\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\right] + \ldots = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)\, z^n . \end{aligned}$$

Az együtthatók

$$n \geq 0\text{-ra} \quad c_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = J_n(x),$$

$$n < 0\text{-ra} \quad c_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \left(-\frac{x}{2}\right)^{n+k} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = (-1)^n J_n(x) .$$

Nyilvánvaló, hogy az $y(x) = (-1)^n J_n(x)$ függvény is megoldása a (11.1) differenciálegyenletnek ($p = n$, az n-indexü és a $(-n)$-indexü Bessel-féle differenciálegyenlet ugyanaz az egyenlet) és a (11.7), (11.8) rekurziós formuláknak is eleget tesz. A

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{11.10}$$

függvényt is elsőfaju Bessel-függvénynek nevezzük. Az előbbiek szerint (11.9) Laurent-sora

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n .$$

Az elsőfaju egész-indexü Bessel-függvények az $e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$ ugynevezett <u>generátor függvény</u> Laurent-sorának együtthatói.

Tekintsük a Laurent-sor együtthatóinak integrál előállitását (lásd VII. Kötet, 10.1 Tétel).

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^{n+1}}\, e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\, dz,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ahol C az origó körüli pozitiv irányitásu zárt görbe.

Legyen C az origó középpontu egységsugaru kör, akkor

$$z = e^{i\varphi}, \quad dz = i e^{i\varphi} \, d\varphi, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

helyettesitésével

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\frac{x}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}}{e^{i(n+1)\varphi}} \, i e^{i\varphi} \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin\varphi - n\varphi)} \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} e^{i(x \sin\varphi - n\varphi)} \, d\varphi + \int_{0}^{\pi} e^{i(x \sin\varphi - n\varphi)} \, d\varphi \right].$$

Az első integrálban alkalmazva a $\varphi = -\psi$ helyettesitést, majd ψ helyébe φ -t irva a

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[e^{i(x \sin\varphi - n\varphi)} + e^{-i(x \sin\varphi - n\varphi)} \right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi) \, d\varphi \qquad (11.11)$$

integrálformulát kapjuk.

A következőkben az egész indexü Bessel-függvények zérushelyeinek elhelyezkedésével foglalkozunk. (11.10) alapján elegendő a nem-negativ egész indexü függvényekkel foglalkozni.

<u>11.1 Tétel.</u> Ha az f analitikus függvény a (11.1) Bessel-féle differenciálegyenletnek az $y(x) \equiv 0$ függvénytől különböző megoldása, akkor f-nek nincs zérustól különböző többszörös gyöke.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy $x_0 \neq 0$ az f függvénynek többszörös zérushelye, akkor $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Behelyettesitve f-et (11.1)-be az

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - p^2) f(x) = 0 \qquad (11.12)$$

azonosságot kapjuk. Innen $f''(x_0) = 0$ adódik. (11.12) további deriválásával és $x = x_0$ behelyettesitésével $f'''(x_0) = 0$, majd az eljárást folytatva $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k \in T$ adódik. Ez viszont analitikus f-re azt jelenti, hogy $f(x) \equiv 0$, ami ellentmondás.!

11.2 Következmény. $J_n(x)$ -nek és $J'_n(x)$ -nek ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) nincs zérustól különböző közös gyöke.

11.3 Következmény. $J_n(x)$ -nek és $J_{n+1}(x)$-nek nincs zérustól különböző közös gyöke ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Bizonyitás. Azonnal adódik (11.8)-ból.!

11.4 Következmény. $J_n(x)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) valós zérus helyei (feltételezve, hogy végtelen sokan vannak) nem torlódhatnak valamilyen véges számhoz, vagyis $J_n(x)$ -nek minden véges intervallumon legfeljebb véges sok zérushelye van.

Bizonyitás. A zérushelyek nem torlódhatnak 0-hoz, mivel (11.6) alapján $J_n(x) = \frac{x^n}{n!}(1 + \ldots)$; itt az első tényező $x \neq 0$ esetén nem zérus, a második tényező az $x = 0$ helyen 1 és igy 0-nak van olyan környezete, ahol ez sem zérus. Tegyük fel, hogy $a \neq 0$ a $J_n(x)$ függvény valós gyökeinek torlódási helye. Ekkor Rolle tételéből (lásd II. Kötet, 15.3 Tétel) következik, hogy az "a" hely $J'_n(x)$ valós gyökeinek is torlódási helye. $J_n(x)$ és $J'_n(x)$ az "a" helyen folytonos függvények, tehát $J_n(a) = J'_n(a) = 0$. Ez azonban ellentmond a 11.2 Következménynek. Az állitás átfogalmazása az I. Kötet, 17.2 Tételből következik.!

11.5 Tétel. A $J_n(x)$ függvénynek $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ megszámlálhatóan végtelen sok pozitiv zérushelye van.

$J_n(x)$ (11.6) előállitásából látható, hogy $J_n(x)$ páros, vagy páratlan függvény, tehát ha x_0 a $J_n(x)$ függvény valós zérushelye, akkor $-x_0$ is az. Ezek szerint a zérushelyek az origóra szimmetrikusan helyezkednek el. Ebből a tételből tehát az is adódik, hogy $J_n(x)$-nek megszámlálhatóan végtelen sok negativ zérushelye van.

Bizonyitás (matematikai indukcióval). Először $n = 0$-ra igazoljuk a tételt. Megmutatjuk, hogy a $J_0(x)$ (minden $x \in R$-re folytonos függvény) végtelen sokszor váltakozva vesz fel pozitiv és negativ értéket. Ebből Bolzano tétele alapján (lásd II. Kötet, 7.2 Tétel) következik, hogy $J_0(x)$-nek végtelen sok valós gyöke van. Tekintsük $J_0(x)$ (11.11) integrál-előállitását,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi \right] .$$

A második integrálban a $\varphi = \pi - \psi$ helyettesitést alkalmazva, majd ψ helyébe φ-t irva a

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi$$

összefüggéshez jutunk. Vizsgáljuk $J_0(x)$ értékeit az $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyeken $(k = 0, 1, 2, \dots)$,

$$J_0(x_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \sin\varphi\right) d\varphi .$$

Az integrál előjelének meghatározásához alkalmazzuk a

$$t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \sin\varphi$$

helyettesitést, ekkor

$$\varphi = \arcsin \frac{2}{(2k+1)\pi} t,$$

$$d\varphi = \frac{2}{(2k+1)\pi} \left[1 - \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} t\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} dt,$$

$$J_0(x_k) = \frac{4}{(2k+1)\pi^2} \int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} t\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cos t\, dt.$$

Az

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} t\right)^2}} \cos t, \qquad t \in \left(0;\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) ,$$

integrandus első tényezője monoton nő; a második tényező periódikus, a $t_j = (2j+1)\frac{\pi}{2}$, $j = 0, 1, \dots, (k-1)$ helyeken zérus és jelet vált. $f(0) = 1$, és a $t_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyen f határértéke a Bernoulli-l'Hospital szabály alkalmazásával (lásd II. Kötet, 16.1 Tétel)

$$\lim_{t\to t_k} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\,t\right)^2}} = \lim_{t\to t_k} \frac{-\sin t}{\dfrac{-2t\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\,t\right)^2}}} =$$

$$= \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 \lim_{t\to t_k} \frac{\sin t}{t}\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\,t\right)^2} = 0.$$

Figyelembe véve, hogy f első tényezője monoton nő és $|\cos(t+\pi)| = |\cos t|$, az

$$\left|\frac{\cos(t+\pi)}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}(t+\pi)\right)^2}}\right| \geq \left|\frac{\cos t}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\,t\right)^2}}\right| \tag{11.13}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Megmutatjuk, hogy

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t)|\,dt \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(t)|\,dt, \qquad j = 0, 1, 2, \dots, (k-1), \tag{11.14}$$

ahol a $j = 0$ esetben fellépő $t_{-1} = 0$.

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t)|\,dt = \int_{(2j+1)\frac{\pi}{2}}^{(2j+3)\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos t}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}t\right)^2}} \right| dt \,.$$

Alkalmazzuk a $t = \tau + \pi$ helyettesitést, majd irjunk τ helyébe ujból "t"-t, ekkor

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t)|\,dt = \int_{(2j-1)\frac{\pi}{2}}^{(2j+1)\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos(t+\pi)}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}(t+\pi)\right)^2}} \right| dt \,.$$

A (11.13) egyenlőtlenségből a II. Kötet, 23.10 Tétel alapján

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t)|\,dt \geq \int_{(2j-1)\frac{\pi}{2}}^{(2j+1)\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos t}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}t\right)^2}} \right| dt \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(t)|\,dt \,,$$

(a második egyenlőtlenségben a $>$ jel csak a $j = 0$ esetben lép fel). Az f függvény a $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ helyeken pontosan k-szor jelet vált. Ebből, figyelembe véve (11.14)-et következik, hogy

$$J_0(x_k) \begin{cases} >0, & \text{ha } k = 2m \\ <0, & \text{ha } k = 2m+1 \end{cases} \qquad m \in T,$$

vagyis $J_0(x)$-nek minden $\left((4m+1)\frac{\pi}{2}, (4m+3)\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban $(m \in T)$ van zérushelye. A 11.4 Következményből és az I. Kötet, 17.2 Tételből adódik, hogy egy ilyen intervallumban és a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban csak véges sok gyök van, és igy $J_0(x)$-nek megszámlálhatóan végtelen sok pozitiv zérushelye van.

Tegyük fel, hogy $J_n(x)$-nek megszámlálhatóan végtelen sok pozitiv zérushelye van. Igazoljuk, hogy $J_{n+1}(x)$ pozitiv zérushelyei halmazának számossága is megszámlálhatóan végtelen. Megmutatjuk, hogy $J_n(x)$ bármely két szomszédos pozitiv zérushelye között $J_{n+1}(x)$-nek van egy és csak egy zérushelye. Legyen x_1 és x_2 a $J_n(x)$ függvény két szomszédos pozitiv zérushelye. Ekkor a (11.8) rekurziós formulából

$$J_{n+1}(x_1) = -J'_n(x_1), \qquad J_{n+1}(x_2) = -J'_n(x_2) ,$$

vagyis

$$\mathrm{sg}\left[J_{n+1}(x_1)\; J_{n+1}(x_2)\right] = \mathrm{sg}\left[J'_n(x_1)\; J'_n(x_2)\right] .$$

A 11.2 Következményből azonban adódik, hogy a $J_n(x)$ függvény az x_1 helyen lokálisan fogyó, az x_2 helyen pedig lokálisan növekedő, vagy fordítva, vagyis

$$\mathrm{sg}\left[J_{n+1}(x_1)\; J_{n+1}(x_2)\right] = \mathrm{sg}\left[J'_n(x_1)\; J'_n(x_2)\right] < 0 .$$

Innen Bolzano tétele alapján következik, hogy van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, melyre $J_{n+1}(\xi) = 0$.

Hasonlóan belátható a (11.7) rekurziós formula segitségével, hogy $J_{n-1}(x)$-nek is van (x_1, x_2)-ben zérushelye. Ebből következik, hogy $J_{n+1}(x)$-nek csak egy gyöke van (x_1, x_2)-ben. Ha ugyanis lenne $\xi_1, \xi_2 \in (x_1, x_2)$, melyre $J_{n+1}(\xi_1) = J_{n+1}(\xi_2) = 0$, akkor az előbbiek alapján lenne $x' \in (\xi_1, \xi_2)$, melyre $J_n(x') = 0$, ez azonban ellentmond annak, hogy x_1 és x_2 $J_n(x)$ két szomszédos zérushelye. $J_n(x)$ és $J_{n+1}(x)$ pozitiv zérushelyei tehát elválasztják egymást. !

Tekintsük a $J_n(x)$ Bessel-függvény $(n \in T)$ pozitiv zérushelyeinek monoton növekvő sorrendbe rendezett λ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ végtelen sorozatát, vagyis legyen

$$J_n(\lambda_k) = 0, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots$$
$$(k = 1, 2, \ldots) .$$

A

$$J_n(\lambda_1 x), \quad J_n(\lambda_2 x), \ldots, \quad J_n(\lambda_k x), \ldots \tag{11.15}$$

függvényrendszer egy fontos ortogonalitási tulajdonságát mutatjuk ki. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges λ állandóra az $y(r) = J_n(\lambda r)$ függvény kielégiti az

$$r^2 y'' + r y' + (\lambda^2 r^2 - n^2) y = 0 \tag{11.16}$$

differenciálegyenletet. A $J_n(x)$ függvény megoldása (11.1)-nek $(p = n)$, azaz

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) \equiv 0 .$$

Tekintsük ezt az $x = \lambda r$ helyen, ekkor a

$$\lambda^2 r^2 J_n''(\lambda r) + \lambda r J_n'(\lambda r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) J_n(\lambda r) \equiv 0 \tag{11.17}$$

azonosságot nyerjük. Ebből figyelembe véve, hogy

$$y'(r) = \lambda J_n'(\lambda r) \quad \text{és} \quad y''(r) = \lambda^2 J_n''(\lambda r) ,$$

adódik

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) y(r) \equiv 0 ,$$

vagyis az $y(r) = J_n(\lambda r)$ függvény valóban kielégiti a (11.16) differenciálegyenletet.

11.6 Tétel. A (11.15) függvényrendszer a (0, 1) intervallumban a $\varrho(x) = x$ sulyfüggvény mellett ortogonális (lásd IV. Kötet, 13.4 Definició).

Bizonyitás. Be kell látnunk, hogy

$$\int_0^1 x\, J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_i x)\, dx \begin{cases} = 0, & \text{ha } i = k \\ \neq 0, & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

A $J_n(\lambda_k x)$ ill. $J_n(\lambda_i x)$ függvények megoldásai a (11.16) differenciálegyenletnek, ahol $r = x$, $\lambda = \lambda_k$ ill. $\lambda = \lambda_i$, vagyis

$$\frac{x^2 d^2 J_n(\lambda_k x)}{dx^2} + \frac{dJ_n(\lambda_k x)}{dx} + (\lambda_k^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda_k x) = 0,$$

$$\frac{x^2 d^2 J_n(\lambda_i x)}{dx^2} + \frac{x dJ_n(\lambda_i x)}{dx} + (\lambda_i^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda_i x) = 0.$$

Figyelembe véve, hogy

$$x^2 y'' + xy' = x \frac{d}{dx} (x y'),$$

a két egyenletet az

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d J_n(\lambda_k x)}{dx} \right) + (\lambda_k^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda_k x) = 0,$$

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d J_n(\lambda_i x)}{dx} \right) + (\lambda_i^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda_i x) = 0,$$

alakba irhatjuk. Szorozzuk meg az első egyenletet $\frac{1}{x} J_n(\lambda_i x)$-el, a másodikat $\frac{1}{x} J_n(\lambda_k x)$-el, majd vonjuk ki az elsőből a másodikat és integráljunk a $(0, 1)$ intervallumon, ekkor

$$\int_0^1 \left[J_n(\lambda_i x) \frac{d}{dx}\left(x \frac{d J_n(\lambda_k x)}{dx}\right) - J_n(\lambda_k x) \frac{d}{dx}\left(x \frac{d J_n(\lambda_i x)}{dx}\right) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 (\lambda_k^2 - \lambda_i^2)\, x\, J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_i x)\, dx .$$

Rendezve, a

$$(\lambda_k^2 - \lambda_i^2) \int_0^1 x J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_i x)\, dx =$$

$$= - \int_0^1 \left[J_n(\lambda_k x) \frac{d}{dx}\left(x \frac{d J_n(\lambda_i x)}{dx}\right) - J_n(\lambda_i x) \frac{d}{dx}\left(x \frac{d J_n(\lambda_k x)}{dx}\right) \right] dx$$

egyenlőséget nyerjük. A jobb oldalon mindkét tagot parciálisan integrálva:

$$(\lambda_k^2 - \lambda_i^2) \int_0^1 x J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_i x)\, dx =$$

$$= \left[J_n(\lambda_k x) \times \frac{d\, J_n(\lambda_i x)}{dx} - J_n(\lambda_i x) \times \frac{d\, J_n(\lambda_k x)}{dx} \right]_0^1 = 0 ,$$

és innen, ha $i \neq k$, vagyis $\lambda_i \neq \lambda_k$, akkor

$$\int_0^1 x\, J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_i x)\, dx = 0$$

adódik. Ha $i = k$, akkor

$$\int_0^1 x \left[J_n(\lambda_k x) \right]^2 \neq 0$$

fennáll, mert $J_n(\lambda_k x) \not\equiv 0$. !

ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS MÁSODRENDŰ LINEÁRIS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

12. Állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek osztályozása

Az $u(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset R^n$, ismeretlen függvény, annak első és másodrendű parciális differenciálhányadosai és a független változók között fennálló

$$F(\underline{x}, u, u'_{x_1}, \dots, u'_{x_n}, u''_{x_1 x_1}, u''_{x_1 x_2}, \dots, u''_{x_n x_n}) = 0$$

összefüggést n független változót tartalmazó másodrendű parciális differenciálegyenletnek nevezzük. Az $u(\underline{x})$ kétszer differenciálható függvény a differenciálegyenlet megoldása, ha az egyenletbe behelyettesítve azonosságot nyerünk.

Ha az F függvény az u függvény másodrendű deriváltjaiban lineáris, a függvényt és elsőrendű deriváltjait azonban nemlineáris módon tartalmazza, akkor kvázilineáris, ha mind az u függvényben, mind annak deriváltjaiban lineáris, akkor lineáris parciális differenciálegyenletről beszélünk. A matematikai fizikában fellépő parciális differenciálegyenletek legnagyobb része másodrendű lineáris egyenlet, melynek általános alakja:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\underline{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} +$$

$$+ c(\underline{x})\, u + f(\underline{x}) = 0, \tag{12.1}$$

ahol a_{ik}, b_k $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, c, f n-változós függvények, melyeknek $D \subset R^n$ értelmezési tartománya közös.

Ha $f(\underline{x}) \equiv 0$, akkor a (12.1) egyenlet homogén lineáris, ha $f(\underline{x}) \not\equiv 0$, akkor inhomogén lineáris.

Ha a_{ik}, b_k, c $(i,k=1,2,\dots,n)$ állandók, akkor (12.1) állandó együtthatóju másodrendü lineáris parciális differenciálegyenlet.

A (12.1) egyenletről azt mondjuk, hogy kanonikus alakban adott, ha másodrendü vegyes parciális deriváltakat nem tartalmaz. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy az állandó együtthatós másodrendü lineáris parciális differenciálegyenletek lineáris koordináta-transzformációval kanonikus alakra transzformálhatók.

Tekintsük a

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + c\,u + f(\underline{x}) = 0 \qquad (12.2)$$

differenciálegyenletet, ahol az a_{ik}, b_k, c $(i,k=1,2,\dots,n)$ együtthatók állandók, $f \in C_D^0$ és $D \subset R^n$ nyilt és összefüggő tartomány. Ha u megoldásfüggvény, akkor ilyen feltételek mellett kétszer folytonosan differenciálható, tehát a vegyes parciális deriváltak egyenlők (lásd V. Kötet, 7.2 Tétel):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_i}, \qquad i,k=1,2,\dots,n,$$

igy - az általánosság megszoritása nélkül - feltehetjük, hogy $a_{ik} = a_{ki}$ $i,k=1,2,\dots,n$. Ez azt jelenti, hogy a másodrendü deriváltak együtthatóiból alkotott

$$\underline{A} = [a_{ik}]$$

n-edrendü mátrix szimmetrikus, $\underline{A}' = \underline{A}$. Az $\underline{A}$ szimmetrikus mátrixhoz van $\underline{M} = [m_{ik}]$ ortogonális mátrix, melyre $\underline{\tilde{A}} = \underline{M}'\,\underline{A}\,\underline{M} = \underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}$ diagonális mátrix (lásd III. Kötet, 19.11 Következmény).

Végezzük el az $\underline{M}$ mátrixszal az ortogonális koordináta-transzformációt, vagyis vezessük be az $\underline{x}$ változó helyett az $\underline{\tilde{x}}$ uj változót az

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{M}^{-1}\,\underline{x} = \underline{M}'\,\underline{x} \qquad (12.3)$$

összefüggéssel és fejezzük ki a (12.2)-ben szereplő parciális deriváltakat az uj változók segitségével

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

(lásd láncszabály: V. Kötet (8.1) formula). A (12.3) formula alapján

$$\tilde{x}_j = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} \, x_k, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és igy

$$\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_k} = m_{kj},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_j} m_{kj}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Továbbá

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} m_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m_{kj} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}_h}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_j} =$$

$$= \sum_{h,j=1}^{n} m_{ih} \, m_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_j}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Behelyettesitve (12.2)-be, a

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{h,j=1}^{n} m_{ih} m_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n} m_{kj} \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_j} + c u + \tilde{f}(\tilde{x}) = 0$$

egyenletet kapjuk, ahol $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(\underline{M}\,\tilde{x})$. Az összegezés sorrendjénck felcserélésével az egyenlet a következőképpen irható:

$$\sum_{h,j=1}^{n} \left(\sum_{i,k=1}^{n} m_{ih} a_{ik} m_{kj} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{kj} b_k \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c u + \tilde{f}(\tilde{x}) = 0 .$$

A második deriváltakat tartalmazó rész a

$$\sum_{h,j=1}^{n} \tilde{a}_{hj} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_j}$$

kifejezésbe megy át, ahol $\tilde{a}_{hj} = \sum_{i,k=1}^{n} m_{ih} a_{ik} m_{kj}$. Ez viszont azt jelenti, hogy az együtthatókból alkotott

$$\tilde{\underline{A}} = \left[\tilde{a}_{hj} \right] = \underline{M}' \underline{A} \underline{M}$$

mátrix diagonális. Jelöljük a szimmetrikus $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit λ_j-vel ($j = 1, 2, \ldots, n$, minden sajátértéket annyiszor veszünk, amennyi a multiplicitása). Mint tudjuk (lásd III. Kötet, 19.4, 19.9 Tétel és 19.11 Következmény) a sajátértékek valósak, $\tilde{a}_{hj} = \lambda_j \delta_{hj}$, és $\underline{M}$ j-edik oszlopvektora a λ_j-hez tartozó $\underline{s}_j$ egység-sajátvektor.

Irjuk az elsőrendü deriváltak együtthatói helyébe $\tilde{b}_j$-t, azaz legyen

$$\tilde{b}_j = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} b_k .$$

Látjuk tehát, hogy (12.2) ortogonális koordináta-transzformációval a

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_j^2} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j \frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+ c u + \tilde{f}(\tilde{x}) = 0 \qquad (12.5)$$

egyenletbe megy át.

Ha most az $\tilde{\underline{x}}$ változó helyett az $\hat{\underline{x}}$ változót vezetjük be, ahol

$$\hat{x}_j = |\lambda_j|^{-\frac{1}{2}} \tilde{x}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

akkor

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_j} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_j^2} = \frac{1}{|\lambda_j|} \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x}_j^2},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

A (12.5) egyenletbe beirva, a $\dfrac{\lambda_j}{|\lambda_j|} = \varepsilon_j$ és az $\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} \tilde{b}_j = \hat{b}_j$ jelöléseket bevezetve a

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x}_j^2} + \sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_j} + cu + \tilde{f}(\tilde{\underline{x}}(\hat{\underline{x}})) = 0$$

(12.6)

kanonikus alakba irt differenciálegyenletet nyerjük, ahol $\varepsilon_j = \pm 1$, ill. 0, aszerint, hogy a megfelelő λ_j sajátérték pozitiv, negativ, ill. zérus.

A (12.2) egyenletet elliptikusnak nevezzük, ha (12.6)-ra transzformált alakjában $\varepsilon_j = 1$, $j = 1,2,\dots,n$, vagy $\varepsilon_j = -1$, $j = 1,2,\dots,n$ (a (12.2) egyenletben szereplő másodrendű deriváltak együtthatóiból alkotott $\underline{A}$ mátrix sajátértékei mind azonos előjelűek). Elliptikus a potenciál-elméletben szereplő Laplace-egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

és a Poisson-egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + f(x_1, x_2, x_3) = 0 .$$

Az egyenletet hiperbolikusnak nevezzük, ha az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ között van egy, melyre $\varepsilon_i = {+1 \atop (-1)}$ és $\varepsilon_k = {-1 \atop (+1)}$, $k = 1,2,\dots,i-1$, $i+1,\dots,n$. (Az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei közül egy a többivel ellenkező előjelű). Hiperbolikus az elektromágneses, rugalmas stb. hullámok terjedésének leirására szolgáló hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_3^2} = 0 ,$$

ahol általában $x_3 = t$ az idő, $(x_1, x_2) \in R^2$.

Ultrahiperbolikusnak nevezzük (12.2)-t, ha

$$\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_{i_2} = \dots = \varepsilon_{i_m} = 1, \quad \varepsilon_{i_{m+1}} = \dots = \varepsilon_{i_n} = -1 ,$$

$$\text{ahol } \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\} \text{ és } 0 < m < n .$$

(12.2) parabolikus, ha az ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ között van egy, melyre $\varepsilon_i = 0$ és $\varepsilon_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, illetve $\varepsilon_i = 0$ és $\varepsilon_k = -1$, $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Parabolikus az időben változó hőmérsékleteloszlást leíró hővezetés differenciálegyenlete (az időt x_3-mal jelölve)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 .$$

(12.2) tágabb értelemben parabolikus, ha

$$\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_{i_2} = \ldots = \varepsilon_{i_m} = \begin{matrix} +1 \\ (-1) \end{matrix} \quad \text{és}$$

$$\varepsilon_{i_{m+1}} = \ldots = \varepsilon_{i_n} = 0,$$

ahol $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $0 < m < n$.

Megmutatjuk, hogy a (12.6) egyenlet még tovább egyszerüsithető. Irjunk (12.6)-ban $\hat{\underline{x}}$ helyett $\underline{x}$-et, $\hat{b}_j$ helyett b_j-t és $\tilde{f}(\tilde{\underline{x}}(\hat{\underline{x}}))$ helyett $f(\underline{x})$-et, azaz tekintsük a már kanonikus alakra hozott

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c\,u + f(\underline{x}) = 0 \qquad (12.7)$$

differenciálegyenletet.

Vezessük be a

$$v(\underline{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i} u(\underline{x}) \qquad (12.8)$$

összefüggéssel az uj v függvényt, ahol μ_i $(1 = 1, 2, \ldots, n)$ egyelőre határozatlan állandó. Ekkor (12.8)-ból

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = e^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i} \left(\mu_j v + \frac{\partial v}{\partial x_j} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = e^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i} \left(\mu_j^2 v + 2\mu_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right)$$

és

$$\varepsilon_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = e^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i} \left[\left(\varepsilon_j \mu_j^2 + b_j \mu_j \right) v + \right.$$

$$\left. + \left(2\varepsilon_j \mu_j + b_j \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \varepsilon_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right].$$

Ha $\varepsilon_j \neq 0$, akkor μ_j megválasztható ugy, hogy

$$2\varepsilon_j \mu_j + b_j = 0$$

legyen, egyébként $\mu_j = 0$. Ezt (12.7)-be helyettesitve a v függvényre olyan a (12.7) egyenlettel ekvivalens kanonikus alaku egyenletet kapunk, melyben, ha $\varepsilon_j \neq 0$, akkor a v függvény x_j szerinti elsőrendü parciális deriváltja már nem szerepel. Ezek szerint szükség esetén még (-1)-gyel végigszorozva és a v-t nem tartalmazó függvényt ujból f-fel jelölve az <u>állandó együtthatós másodrendü lineáris parciális differenciálegyenlet legegyszerübb általános alakja az elliptikus esetben</u>

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + C v + f(\underline{x}) = 0, \tag{12.9}$$

a hiperbolikus esetben

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + C v + f(\underline{x}) = 0, \tag{12.10}$$

és a parabolikus esetben

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + C v + f(\underline{x}) = 0. \tag{12.11}$$

13. A hővezetés differenciálegyenlete. A Fourier módszer

Ebben a pontban egy másodrendű lineáris differenciálegyenletre vezető fontos fizikai feladattal foglalkozunk. Vizsgáljuk a hőterjedés folyamatát egy homogén, izotróp testben. A test pontjainak halmazát jelöljük A-val ($A \subset R^3$). Legyen $\varrho > 0$ a test anyagának sűrűsége, $c > 0$ a fajhő, $k > 0$ a hővezető képesség és $u(\underline{r}, t)$ a hőmérsékleteloszlás, mint a helynek és az időnek a függvénye; $\underline{r} \in A$, és $t \in I$ valamilyen időintervallum, u az $A \times I$ halmazon értelmezett $\underline{r}$ koordinátái szerint kétszer, t szerint egyszer folytonosan differenciálható függvény, ϱ, c, k pedig a test anyagára jellemző állandók. Feltételezzük, hogy az A test belsejében sem hőforrások, sem hőnyelők nincsenek. Ha a hőmérséklet rögzitett t időpontban a test különböző pontjaiban nem ugyanaz, akkor a magasabb hőmérsékletű helyekről a legnagyobb hőmérsékletcsökkenés irányában hőáramlás indul meg. Ha a hőmennyiség áramlásának sebességvektorát $\underline{q}$-val jelöljük, akkor ezt a tapasztalati tényt a

$$\underline{q} = -k \operatorname{grad} u \tag{13.1}$$

formulával irhatjuk fel (grad u u-nak, mint a hely függvényének gradiense rögzitett t mellett).

Tekintsük a vizsgált test egy tetszőleges (mérhető térfogatu) $V \subset A$ részét, melyet egy egyszerü zárt reguláris F felület határol (F normálisát kifelé irányitjuk). Rögzitett t időpillanatban a hőmennyiség V-ben

$$Q = \iiint\limits_{(V)} c\varrho\, u(\underline{r}, t)\, dV,$$

és ebből a "hőmennyiség időegység alatti megváltozása"

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint\limits_{(V)} c\varrho \frac{\partial u(\underline{r}, t)}{\partial t}\, d\underline{V}. \qquad (13.2)$$

(Az, hogy a deriválás és az integrálás sorrendje felcserélhető, az V. Kötet, 12.2 Tételének bizonyitásával analóg módon belátható).

A V térrészben a hőmennyiség időegység alatti megváltozása (növekedése) az F felületen időegység alatt beáramló $\frac{\delta Q}{\delta t}$ hőmennyiséggel egyenlő. Mivel

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = - \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \underline{q}(\underline{r}, t)\, d\underline{F} \qquad (13.3)$$

(lásd VI. Kötet, 13.4 Definició és (13.18) formula), ezért a hőegyensuly feltétele

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \underline{q}(\underline{r}, t)\, d\underline{F} \qquad (13.4)$$

A (13.3) felületi integrált a Gauss-Osztrogradszkij-tétel (lásd VI. Kötet, 14.3 Tétel) segitségével átalakitjuk térfogati integrállá:

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \underline{q}(\underline{r}, t)\, d\underline{F} = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \underline{q}(\underline{r}, t)\, dV.$$

Figyelembe véve a (13.1) és a (13.2) formulákat, (13.4)-ből a

$$\iiint_{(V)} c\varrho \frac{\partial u(\underline{r}, t)}{\partial t} \, dV = \iiint_{(V)} \operatorname{div}\left(k \operatorname{grad} u(\underline{r}, t)\right) dV$$

egyenlőséget nyerjük, mely a

$$\iiint_{(V)} \left[c\varrho \frac{\partial u(\underline{r}\, t)}{\partial t} - k \operatorname{div} \operatorname{grad} u(\underline{r}, t) \right] dV = 0$$

alakba irható. Miután a $V \subset A$ térrész tetszés szerint választható, az előbbi egyenlőség csak ugy állhat fenn, ha

$$c\varrho \frac{\partial u(\underline{r}, t)}{\partial t} - k \operatorname{div} \operatorname{grad} u(\underline{r}, t) \equiv 0,$$

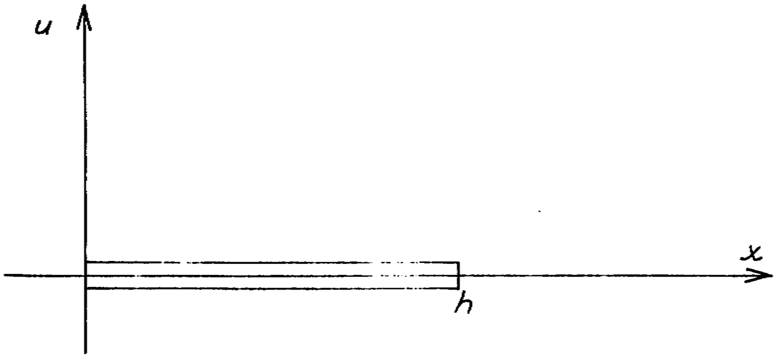
$$\underline{r} \in A, \quad t \in I. \tag{13.5}$$

Az egyenlet mindkét oldalát $c\varrho$ -val osztva, bevezetve a $\frac{k}{c\varrho} = a^2$ ($a \in R$) jelölést és a Laplace-operátort (lásd VI. Kötet, (12.21)) azt kapjuk, hogy az $u(\underline{r}, t)$ hőmérsékleteloszlás kielégiti a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \tag{13.6}$$

másodrendü, homogén lineáris, parabolikus tipusu parciális differenciálegyenletet.

13.1 Példa. Tekintsünk egy homogén izotrop h hosszuságu szigetelt rudat. A rud keresztmetszete legyen elég kicsiny ugy, hogy a hőmérsékletet egy keresztmetszet minden pontjában állandónak vehessük és igy a rudban lejátszódó hővezetési folyamatot egydimenziós problémaként tárgyalhassuk. Vegyünk fel egy Descartes-féle derékszögü koordináta-rendszert a 13.1 ábrán látható módon.



13.1 ábra

Ekkor (13.6) alapján az $u(\underline{r}, t)$ hőmérsékleteloszlás függvény a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (13.7)$$

differenciálegyenletnek tesz eleget. Az egyenletnek végtelen sok megoldása van. Ahhoz, hogy a rudban lejátszódó hővezetési folyamat egyértelmüen legyen meghatározva, további feltételekre, mellékfeltételekre van szükség. Ilyen mellékfeltételt nyerünk, ha ismerjük a $t = 0$ kezdő pillanatban a rud hőmérsékleteloszlását az

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, h] \qquad (13.8)$$

függvényt. (13.8)-at, ahol f kétszer folytonosan differenciálható, adott függvény, <u>kezdeti feltételnek</u> nevezzük. A szigetelésből következik, hogy a rud két végén nincs hőkiáramlás, vagyis

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \equiv \frac{\partial u(h, t)}{\partial x} \equiv 0, \quad t \in (0, \infty) \qquad (13.9)$$

(az u függvény gradiense most u'_x). A (13.9) feltételeket <u>peremfeltételek-nek</u> nevezzük. Fontos megjegyeznünk, hogy a (13.9) peremfeltételek <u>"homogének"</u>, ami azt jelenti, hogy ha két vagy több függvény eleget tesz a feltételeknek, akkor azok bármely lineáris kombinációja is kielégiti a feltételeket.

A feladat tehát a (13.7) differenciálegyenlet azon $u(x, t)$ megoldását meghatározni, mely a (13.8) és a (13.9) mellékfeltételeknek is eleget tesz. Ezt a "változók szétválasztásának módszerével", az un. "Fourier-módszerrel" határozzuk meg.

Tegyük fel, hogy (13.7)-nek van

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \quad x \in [0, h], \quad t \geq 0 \tag{13.10}$$

nem triviális megoldása. Behelyettesitve a differenciálegyenletbe az

$$X(x) \frac{d\, T(t)}{dt} = a^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t)$$

összefüggést kapjuk. A független változóknak van olyan halmaza, hogy $X(x)\, T(t) \neq 0$. Ekkor $a^2 X(x)\, T(t)$-vel osztva az

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d\, T(t)}{dt} \tag{13.11}$$

egyenlethez jutunk. Ahhoz, hogy a (13.7) differenciálegyenletnek a (13.10) függvény megoldása legyen, (13.11)-nek minden olyan $0 < x < h$, $t > 0$ értékre teljesülnie kell, melyre $X(x) \neq 0$ és $T(t) \neq 0$. Miután (13.11) bal oldala a t változótól nem függ, vagyis t-ben állandó, ezért a jobb oldal is állandó kell hogy legyen. Hasonlóan, miután a jobb oldal x-től független, ezért a bal oldal is állandó. (13.11) bal- és jobb oldala tehát ugyanugy α állandóval egyenlő:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d\, T(t)}{dt} = \alpha ,$$

vagyis az X, ill. a T függvény a

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha X = 0 , \tag{13.12}$$

ill. a

$$\frac{dT}{dt} - \alpha a^2 T = 0 \tag{13.13}$$

differenciálegyenletnek megoldása (α egyelőre határozatlan állandó). Könnyen belátható, hogy (13.12) és (13.13) megoldásainak szorzata valóban a (13.7) differenciálegyenletnek megoldása.

Először olyan (13.10) alaku megoldásokat keresünk, melyek a homogén mellékfeltételeket, vagyis jelen esetben a (13.9) peremfeltételeket kielégitik. Ahhoz, hogy a (13.10) függvény kielégitse (13.9)-et, teljesülnie kell a következő feltételeknek:

$$\frac{d\,X(0)}{dx} = \frac{d\,X(h)}{dx} = 0\,. \tag{13.14}$$

Ha $\alpha > 0$, azaz $\alpha = \lambda^2$, $\lambda > 0$, akkor a (13.12) differenciálegyenlet,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0\,.$$

Ennek általános megoldása

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

(lásd 10.12 Tétel), ahonnan

$$\frac{d\,X(x)}{dx} = \lambda (c_1 e^{\lambda x} - c_2 e^{-\lambda x})\,.$$

Figyelembe véve (13.14)-et,

$$\frac{d\,X(0)}{dx} = (c_1 - c_2)\lambda = 0\,,$$

vagyis $c_1 = c_2 = c$ és

$$\frac{d\,X(h)}{dx} = \lambda c\,(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}) = 0,$$

ahonnan $c = 0$. Ekkor azonban $X(x) \equiv 0$ és ezzel együtt $u(x, t) \equiv 0$. Ezek szerint pozitiv α esetén (13.7)-nek nincs a triviálistól különböző,(13.9)-et is kielégítő megoldása.

Ha $\alpha = 0$, akkor a (13.12) differenciálegyenlet,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$$

általános megoldása

$$X(x) = c_1 x + c_2 .$$

A (13.14) peremfeltételekből

$$\frac{d\,X(0)}{dx} = \frac{d\,X(h)}{dx} = c_1 = 0$$

adódik, tehát $X(x) = c_2$ és $u(x, t) = c_2 T(t)$.

Ha végül $\alpha < 0$, azaz $\alpha = -\lambda^2$, $\lambda > 0$, akkor a

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$X(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x ,$$

és innen

$$\frac{d\,X(x)}{dx} = \lambda (c_1 \cos \lambda x - c_2 \sin \lambda x) .$$

A peremfeltételekből

$$\frac{d\,X(0)}{dx} = c_1 \lambda = 0,$$

ahonnan $c_1 = 0$, és

$$\frac{d\,X(h)}{dx} = - c_2 \lambda \sin \lambda h = 0 .$$

Triviálistól különböző megoldást csak akkor kapunk, ha $c_2 \neq 0$, de akkor $\sin \lambda h = 0$, ebből $\lambda h = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Igy (13.12)-nek a a (13.14) feltételeket kielégitő triviálistól különböző megoldása csak

$$\alpha = - \lambda_n^2 = - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{és } \alpha = 0$$

esetén van és pedig

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{h} x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

A (13.13) egyenletbe α értékeit beirva a

$$\frac{dT}{dt} = - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 a^2 T, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

egyenleteket nyerjük, melyeknek megoldásai rendre

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{h} a\right)^2 t} , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(lásd 3.2 Tétel).

Meghatároztuk tehát a (13.7) differenciálegyenlet végtelen sok olyan megoldását, mely a (13.9) peremfeltételeket is kielégiti:

$$u_n(x,t) = T_n(t)\,X_n(x) = e^{-\left(\frac{n\pi}{h}a\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{h}x\,,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots\ . \qquad (13.15)$$

A differenciálegyenlet azon megoldását, mely a (13.9) homogén feltételeken kivül a (13.8) "inhomogén" feltételt is kielégiti, a (13.15) függvények szerint haladó sor alakjában állitjuk elő. Tételezzük fel, hogy

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{h}a\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{h}x\,,$$

$$t \in (0,\infty),\quad x \in [0,h]\ ,$$

és a jobb oldalon álló sor t-szerint egyszer, x-szerint pedig kétszer tagonként deriválható. (A differenciálegyenlet és a peremfeltételek homogenitása miatt a (13.15) függvények bármely lineáris kombinációja és az utóbbi végtelen sor összege is kielégiti azokat). A megoldásfüggvénynek a (13.8) kezdeti feltételt is ki kell elégitenie, azaz fenn kell állnia az

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{h}x = f(x)$$

egyenlőségnek. Tekintsük f-nek $(-\infty,\infty)$-re való páros és 2h szerint periódikus kiterjesztését, F-et. Ezen F függvény Fourier-sora,

$$F \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{h}x$$

a $[0, h]$ intervallumon előállitja f-et, vagyis

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{h} x, \qquad x \in [0, h]$$

(lásd IV. Kötet, 10.2 Definició és az utána következő megjegyzés). Mivel fenn kell állnia a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{h} x \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{h} x$$

azonosságnak, megkapjuk $u(x,t)$ sorfejtésének együtthatóit:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{és} \quad c_n = a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Ezek szerint a perem- és kezdeti feltételeket kielégitő megoldás az

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{h} a\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{h} x \tag{13.16}$$

függvény, $x \in [0, h]$, $t \geq 0$.

Az u hőmérsékleteloszlás-függvény $t \to \infty$ esetén felveszi a $t = 0$ időpontbeli hőmérsékletátlagot, ugyanis

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} F(x)\, dx = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} f(x)\, dx ,$$

ami az f függvény integrál középértéke a $[0, h]$ intervallumon. Megjegyezzük még, hogy a fizikai szemlélettel összhangban a hőmérséklet kiegyenlitődés annál gyorsabban megy végbe, minél nagyobb a k hővezető képesség, és minél kisebb a c fajhő, a ϱ sürüség és a rud hossza.

Ugyanis (13.16) sor tagjai annál gyorsabban tartanak zérushoz, minél nagyobb az e (negativ) kitevőjében szereplő

$$\frac{a^2}{h^2} = \frac{k^2}{h^2 c^2 \varrho^2}$$

tényező.

Az előző példa megoldásában alkalmazott Fourier-módszer sok fontos esetben sikerrel alkalmazható másodrendü, állandó együtthatós homogén lineáris parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos perem- és kezdetiérték feladatok megoldására. A módszer akkor alkalmazható, ha a mellékfeltételek egy része homogén, és a mellékfeltételek olyan görbék (felületek) mentén vannak előirva, melyeken az egyik koordináta (független változó) állandó. (Ezért van szükség gyakran polár-, vagy henger- esetleg más görbevonalu koordináta-rendszer bevezetésére). Először egyváltozós függvények szorzataként olyan megoldásokat állitunk elő, melyek a homogén mellékfeltételeket kielégitik. Igy a probléma közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos peremértékfeladatok megoldására redukálódik. A közönséges differenciálegyenletben szereplő paraméter azon értékeit, melyek mellett a peremérték feladatnak van nem-triviális megoldása, a probléma sajátértékeinek, a peremfeltételeket is kielégitő megoldásokat sajátfüggvényeknek nevezzük. (A (13.1) Példában ezek a $\lambda_n = \frac{n\pi}{h}$ számok, ill. a $\cos \frac{n\pi}{h} x$ függvények, $n = 0, 1, 2, \ldots$). Ezután a nem-homogén feltételeket kielégitő megoldást az előbbi megoldásfüggvények szerint haladó végtelen sor alakjában állitjuk elő. Az esetek jelentős részében ezek a függvények (a sor tagjai) ortogonális-rendszert alkotnak és igy a sor együtthatóinak meghatározása viszonylag egyszerü (részletesebben lásd [5]). A következő pontban a módszert egy további fontos példán mutatjuk be.

14. A rugalmas húr és membrán rezgései

Rezgési folyamatok leirásánál gyakran jutunk hiperbolikus tipusu másodrendü lineáris parciális differenciálegyenlethez. Példaképpen tárgyaljuk a hur és a membrán kis transzverzális rezgéseit. Ahhoz, hogy a valóságban lejátszódó folyamat matematikai modelljét megalkothassuk, néhány a folyamat szempontjából kevésbé lényeges jelenséget el kell hanyagolnunk.

14.1 Példa. Vizsgáljuk egy az x tengely mentén végpontjaiban rögzített, h hosszuságu, $\varrho > 0$ állandó sürüségü hur kis transzverzális rezgéseit (ϱ az egységnyi hosszuságu hur tömege). A hur keresztmetszete legyen elég kicsiny, ekkor a mozgás leirásánál elegendő a hur középvonalának mozgását vizsgálnunk, azaz a problémát egydimenziós problémaként tárgyalhatjuk. Feltesszük, hogy a hurra külső erők nem hatnak. "Longitudinális rezgéseket" nem veszünk figyelembe, vagyis azt az esetet vizsgáljuk, amikor az elmozdulásvektor x tengely irányu komponense zérus (az elmozdulás az x tengelyre merőleges, "transzverzális"). Továbbá a hur minden pontja egy közös x, u sikban mozogjon az x tengelyre merőlegesen. Ekkor a hur tetszőleges pontjának kitérése a tetszőleges t időpillanatban megadható egy $u(x, t)$, $x \in [0, h]$, $t \in I$ (valamilyen időintervallum) függvénnyel. Feltesszük, hogy $u \in C^2$. A hurt abszolut hajlékonynak és rugalmasnak fogjuk tekinteni, vagyis bármely pillanatban a hur pontjaira ható $\underline{p}(x, t)$ feszitőerő iránya megegyezik a hur alakjához huzott érintő irányával, és nagysága arányos a megnyulással (Hooke törvénye érvényesül). Csak "kis rezgéseket" vizsgálunk. Ezen azt értjük, hogy $(u'_x)^2$ a számitás során elhanyagolható.

Vizsgáljuk a hur egy tetszőleges $[x_1, x_2] \subset [0, h]$, $x_2 = x_1 + dx$ $(dx > 0)$ szakaszát. Rögzitett t pillanatban ennek hossza

$$ds = \sqrt{1 + (u'_x)^2}\, dx \approx dx,$$

ami azt jelenti, hogy gyakorlatilag nincs megnyulás, vagyis $p(x,t) = |\underline{p}(x,t)|$ független az időtől: $p(x,t) = p(x)$. Megmutatjuk, hogy ez a helytől sem függ. Tekintsük rögzitett t mellett a hur x_2 abszcisszáju pontját, és jelöljük a hur e pontbeli érintőjének hajlásszögét α-val. Ekkor a szóban forgó szakaszra az x_2 pontban ható erő x tengely irányu komponense

$$\underline{p}(x_2, t)\,\underline{i} = p(x_2) \cos\alpha = \frac{p(x_2)}{\sqrt{1 + \left(u'_x(x_2, t)\right)^2}} \approx p(x_2)\,,$$

és hasonlóan az x_1 pontban

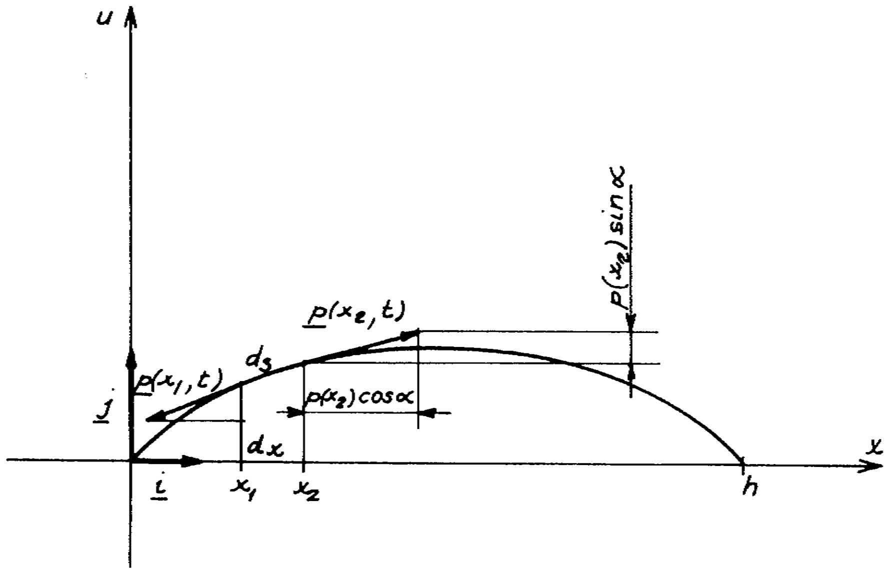
$$\underline{p}(x_1, t)\,\underline{i} \approx -p(x_1), \qquad t \in I$$

(lásd 14.1 ábra). A hurelemre ható $\underline{p}(x_2, t) + \underline{p}(x_1, t)$ erő x irányu komponense

$$p(x_2) - p(x_1) = 0,$$

mert longitudinális rezgéseket nem vettünk figyelembe. Innen

$$p(x_2) = p(x_1) = p_0 .$$



14.1 ábra

Transzverzális elmozdulás a feszitőerő u tengely irányu komponensének hatására jön létre. Ez az x_2 abszcisszáju pontban t pillanatban:

$$\underline{p}(x_2, t)\,\underline{j} = p_0 \sin\alpha \approx p_0 \operatorname{tg}\alpha = p_0\, u'_x(x_2, t), \qquad t \in I,$$

mert a kis kitérés miatt $|\alpha|$ igen kicsi, igy $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$. Hasonlóan a szóban forgó szakaszra, az x_1 pontban ható erő u tengelyirányu komponense $\underline{p}(x_1, t)\ \underline{j} = -p_0 u'_x(x_1, t)$. A vizsgált hurelemre ható erő u tengelyirányu komponense

$$p_0 u'_x(x_2, t) - p_0 u'_x(x_1, t) = p_0 u''_{xx}(x, t)\, dx, \quad x \in (x_1, x_2), \qquad t \in I,$$

ahol a Lagrange-féle középérték tételt (lásd II. Kötet, 15.4 Tétel) alkalmaztuk.

A hurelem minden pontja közel azonos $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ gyorsulással mozog. Felhasználva Newton második axiómáját a

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \varrho \quad dx = p_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \in I,$$

egyenlőséghez jutunk. Bevezetve az $a^2 = \frac{p_0}{\varrho}$ jelölést, és figyelembe véve, hogy a hurelem tetszőlegesen választható, az $u(x, t)$ függvény kielégiti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.1}$$

hiperbolikus tipusu másodrendű állandó együtthatóju homogén lineáris parciális differenciálegyenletet.

Legyen a továbbiakban $I = [0, +\infty)$. Ahhoz, hogy a kitűzött rezgési feladatnak egyértelmű megoldása legyen, mellékfeltételekre van szükség. A rögzitésből következnek az

$$u(0, t) = u(h, t) \equiv 0, \qquad t \geq 0 \tag{14.2}$$

peremfeltételek. Ezen kivül tegyük fel, hogy a $t = 0$ kezdőpillanatban adott a hur alakja és minden pontjának sebessége, vagyis

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad x \in [0, h], \tag{14.3}$$

ahol $\varphi, \psi \in C^2_{[0,h]}$ adott függvények, és (14.2) miatt $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$. A probléma "d' Alembert-féle megoldását" mutatjuk be.

Vezessük be a

$$\xi = x+at, \qquad \eta = x-at$$

uj változókat. (Ekkor $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $t = \frac{1}{2a}(\xi - \eta)$). Az $\tilde{u}(\xi, \eta) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2a}(\xi - \eta)\right)$ függvényre a láncszabályt alkalmazva (lásd V. Kötet, (8.1)) a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right), \qquad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\right)$$

összefüggéseket kapjuk. Behelyettesitve a (14.1) differenciálegyenletbe az $\tilde{u}(\xi, \eta)$ függvényre a

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (14.4)$$

differenciálegyenletet nyerjük. Ha $\tilde{u}$ (14.4) megoldása, akkor nyilvánvalóan $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$ a ξ változótól független, vagyis

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \bar{f}(\eta),$$

és ebből

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

ahol f_1 és f_2 kétszer folytonosan differenciálható tetszőleges függvény.

Forditva, bármilyen f_1 és f_2 kétszer folytonosan differenciálható függvényekre $f_1(\xi)+f_2(\eta)$ (14.4) megoldása. Igy (14.1) megoldása

$$u(x,t) = \tilde{u}(x+at,\ x-at) = f_1(x+at)+f_2(x-at) \tag{14.5}$$

és f_1, f_2 kellő megválasztásával minden megoldás ilyen alakba irható.

Először tekintsünk egy "végtelen hosszu hurt" és legyen a $t=0$ pillanatban

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1(x), \qquad x \in R \tag{14.6}$$

ahol φ_1 és ψ_1 folytonos függvények. A (14.5) megoldásfüggvénynek a (14.6) kezdeti feltételeket ki kell elégitenie.

$$u'_t(x,t) = f'_1(x+at)\,a - f'_2(x-at)\,a,$$

és igy

$$u'_t(x,0) = a\left[f'_1(x) - f'_2(x)\right].$$

A (14.6) kezdeti feltételekből

$$u(x,0) = f_1(x)+f_2(x) \equiv \varphi_1(x),$$

$$u'_t(x,0) = a\left[f'_1(x)+f'_2(x)\right] \equiv \psi_1(x), \qquad t \geq 0 \tag{14.7}$$

feltételeket kapjuk. A második összefüggést valamilyen x_0 helytől integrálva, majd a-val osztva az f_1 és f_2 függvényekre az

$$f_1(x)+f_2(x) \equiv \varphi_1(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \psi_1(s)\, ds + c$$

egyenleteket nyerjük, ahol c állandó. Innen

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi_1(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi_1(s)\, ds + \frac{c}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi_1(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi_1(s)\, ds - \frac{c}{2}.$$

Ekkor a végtelen hosszu hur rezgéseit leiró megoldásfüggvény:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2a}\left[\int_{x_0}^{x+at} \psi_1(s)\, ds - \int_{x_0}^{x-at} \psi_1(s)\, ds \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)\, ds, \qquad x \in R, \quad t \geq 0. \tag{14.8}$$

Ezt az eredményünket felhasználjuk az eredeti probléma megoldásában. A (14.3) kezdeti feltételekben szereplő φ és ψ függvények értelmezését kiterjesztjük a $(-\infty, \infty)$ intervallumra ugy, hogy a megfelelő (14.8) megoldásfüggvénynek a $[0, h] \times [0, \infty)$ tartományra vonatkozó leszükitése mind a (14.2) perem- mind pedig a (14.3) kezdeti feltételeket kielégitse.

(14.2)-ből következik, hogy a (14.5) alaku megoldásfüggvényre

$$u(0,t) = f_1(at) + f_2(-at) \equiv 0,$$

$$u(h,t) = f_1(h+at) + f_2(h-at) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Ezek szerint minden $y \in R$-re

$$f_1(y) + f_2(-y) \equiv 0 \tag{14.9}$$

$$f_1(y+2h) + f_2(-y) \equiv 0$$

(az első egyenletben at, a másodikban (at-h) helyébe irtunk y-t).
Az utóbbi egyenletekből

$$f_1(y+2h) \equiv f_1(y)$$

és $f_2(y) \equiv -f_1(-y)$ következik. Tehát (14.2) teljesüléséből az következik, hogy f_1 és f_2 periódikus függvények 2h periódussal. (14.7) első egyenletéből és (14.9)-ből

$$\varphi_1(-x) \equiv f_1(-x) + f_2(-x) = -f_2(x) - f_1(x) \equiv -\varphi_1(x)$$

adódik. A (14.9) azonosságot differenciálva

$$f_1'(y) - f_2'(-y) \equiv 0.$$

Innen és (14.7) második egyenletéből

$$\psi_1(-x) = a\left[f_1'(-x) - f_2'(-x)\right] \equiv a\left[f_2'(x) - f_1'(x)\right] \equiv$$

$$\equiv -\psi_1(x).$$

φ_1 és ψ_1 tehát páratlan függvények. Könnyen belátható, hogy - forditva - ha φ_1 és ψ_1 páratlan és 2h periódussal periódikus függvények, akkor a nekik megfelelő (14.8) megoldás kielégiti a (14.2) feltételeket is. Ezek szerint az adott φ és ψ függvények értelmezését ugy terjesztjük ki a $[0,h]$ intervallumról a $(-\infty, \infty)$ intervallumra, hogy páratlan és 2h periódussal periódikus-függvények legyenek. φ ill. ψ ezen kiterjesztését φ_1, ill. ψ_1-gyel, jelölve, a (14.8) függvény $[0,h] \times (0,\infty)$ -re való leszükitése megadja a (14.2) perem- és a (14.3) kezdeti feltételeket kielégitő megoldást.

14.2 Példa. Rugalmas membrán mozgásának leirása kis transzverzális rezgések esetén. Rugalmas membránnak nevezünk minden olyan lemezt, mely nyirásnak és hajlitásnak nem áll ellent, csak felszinnöveléssel szemben van ellenállása és ez arányos a felszinnövekedéssel (Hooke törvénye érvényesül). Tekintsünk egy kör alaku d átmérőjü, állandó $\varrho > 0$ sürüségü, $D \ll 1$ vastagságu, kerülete mentén egyenletesen kifeszitett rugalmas membránt, mely nyugalmi helyzetében sik. Tegyük fel, hogy külső erők nem hatnak rá. Helyezzük Descartes-féle derékszögü koordináta-rendszerbe ugy, hogy nyugalmi helyzetben a membrán az x, y sikban, középpontja az origóban legyen. A membrán kis transzverzális rezgéseit vizsgáljuk, vagyis feltételezzük, hogy minden pontjának kitérése az x, y sikra merőleges. (Longitudinális rezgéseket nem veszünk figyelembe, azaz a kitérés x és y irányu komponense zérus). Ekkor a kitérés megadható az u (x, y, t) függvénnyel, ahol $x^2 + y^2 \leq \frac{d^2}{4}$, $t \geq 0$ az idő és u a változói szerint kétszer folytonosan differenciálható függvény. (Rögzitett t időpillanatban az $u = u(x, y, t)$ egyenletü felület adja a membrán helyzetét). Csak "kis rezgéseket" vizsgálunk. Ezen azt értjük, hogy az $(u'_x)^2 + (u'_y)^2$ négyzetösszeget a számitás során elhanyagoljuk.

Jelöljük $\underline{p}(x, y, t)$-vel a "feszültséget", vagyis a membrán-keresztmetszet egységnyi területü darabjára ható rugalmas erőt. Feltettük, hogy a membrán egyenletesen van a szélein kifeszitve, tehát $\underline{p}(x, y, t)$ bármely ponton, bármilyen irányu, az x y sikra merőleges keresztmetszetben a keresztmetszet sikjára merőleges és nagysága független a keresztmetszet irányától. Vizsgáljuk a membrán egy tetszés szerinti felületelemét, melynek vetülete az x, y sikon egy $dx > 0$, $dy > 0$ oldalhosszuságu $P_1P_2P_3P_4$ téglalap, ahol $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_1, y_2)$, $P_4(x_2, y_2)$ és $x_2 = x_1 + dx$, $y_2 = y_1 + dy$. A felületelem felszine

$$dF = \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}\, dx\, dy \approx dx\, dy$$

a mozgás során gyakorlatilag nem változik, a $\underline{p}(x, y, t)$ feszültség abszolut értéke, $p(x, y, t) = |\underline{p}(x, y, t)|$ az időtől független. A felületelemre ható erők eredőjének az x, y sikkal párhuzamos komponense zérus, igy könnyen belátható, hogy $p(x, y, t) = p_0$ állandó, a helytől sem függ. (Az igazolás az előző példában bemutatott igazolással analóg). Rögzitett t időpontban a felületelemre ható feszültségek tehát érintőirányuak, az x, u, ill. a y, u sikkal párhuzamosak, merőlegesek a megfelelő keresztmetszet sikjára és abszolut értékük állandó: p_0. Jelöljük az $x = x_2$ siknak megfelelő keresztmetszetre ható feszültségnek, a $\underline{p}(x_2, y, t)$ vektornak, az x, y sikkal bezárt szögét, α -val. Mivel $|\alpha|$ kicsi, ezért $\underline{p}(x_2, y, t)$ u-tengely irányu komponense $\underline{p}(x_2, y, t)\underline{k} = p_0 \sin\alpha \approx$ $\approx p_0 \operatorname{tg}\alpha = p_0 u'_x(x_2, y, t)$. A kiszemelt felületelemet határoló másik három keresztmetszetre ható feszültség (lásd 14.2 ábra):

$$\underline{p}(x_1, y, t)\underline{k} \approx - p_0 u'_x(x_1, y, t) ,$$

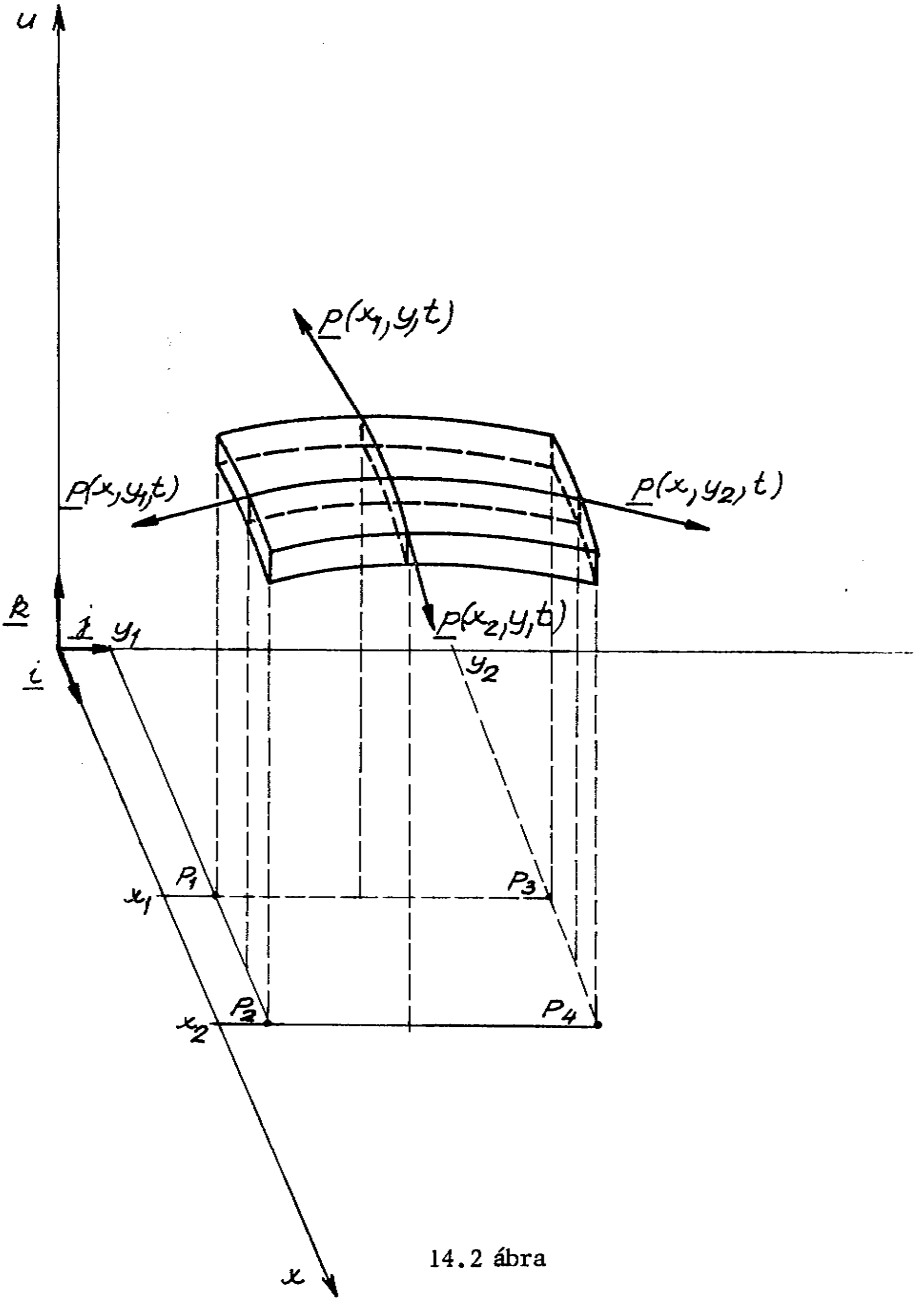
$$\underline{p}(x, y_2, t)\underline{k} \approx p_0 u'_y(x, y_2, t) ,$$

$$\underline{p}(x, y_1, t)\underline{k} \approx - p_0 u'_y(x, y_1, t) .$$

A felületelem "kicsinysége" miatt az első két kifejezésben $y \in [y_1, y_2]$, a második kettőben $x \in [x_1, x_2]$ tetszőlegesen választható. A keresztmetszetre ható erők u-tengely irányu eredőjének nagyságát megkapjuk, ha az előbbi kifejezéseket a megfelelő keresztmetszet felületével megszorozzuk és e szorzatokat összeadjuk. Az elemi membrándarabot mozgató erő tehát

$$p_u = p_0 \left[u'_x(x_2, y, t) - u'_x(x_1, y, t) \right] D\, dy +$$

$$+ p_0 \left[u'_y(x, y_2, t) - u'_y(x, y_1, t) \right] D\, dx .$$



u
$\underline{p}(x_1,y,t)$
$\underline{p}(x,y_1,t)$
$\underline{p}(x,y_2,t)$
$\underline{k}$
$\underline{j}$
y_1
$\underline{p}(x_2,y,t)$
$\underline{i}$
y_2
P_1
x_1
P_3
P_2
x_2
P_4
x

14.2 ábra

A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva (és az első tagban y-t a másodikban x-et megfelelően választva)

$$p_u = p_0 \, u''_{xx}(x, y, t) \, dx \, Ddy + p_0 \, u''_{yy}(x, y, t) \, dy \, D \, dx ,$$

$$x \in (x_1, x_2), \quad y \in (y_1, y_2), \quad t \geq 0 .$$

Mivel a vizsgált felületelem méretei kicsinyek, igy minden pontjának gyorsulása közel egyenlő; alkalmazva Newton második axiómáját

$$u''_{tt}(x, y, t) \varrho \, D \, dxdy = p_0 \left[u''_{xx}(x, y, t) + \right.$$

$$\left. + u''_{yy}(x, y, t) \right] D \, dxdy ,$$

$$x \in (x_1, x_2), \quad y \in (y_1, y_2), \quad t \geq 0 .$$

Bevezetve a $\frac{p_0}{\varrho} = a^2$ jelölést és a kétdimenziós Laplace-operátort (lásd VI. Kötet, (12.21)), továbbá figyelembe véve, hogy a felületelemet tetszőlegesen választottuk, $\varrho \, D \, dxdy$-nal való osztás után azt kapjuk, hogy az u függvénynek ki kell elégitenie a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \tag{14.10}$$

hullámegyenletet.

Vezessünk be sikbeli polárkoordináta-rendszert, azaz az x, y független változók helyett az r, φ uj független változókat, ahol $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$. A Laplace-operátor sikbeli polárkoordináta-rendszerben felirva

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

(lásd VI. Kötet, (16.21)).

Ennek felhasználásával az u kitérést mint r, φ, t függvényét ujból $u(r, \varphi, t)$-vel jelölve, az $u(r, \varphi, t)$ függvénynek ki kell elégitenie a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \tag{14.11}$$

differenciálegyenletet.

A továbbiakban legyen a kerülete mentén rögzitett membrán átmérője: $d = 2$. Mivel a transzformáció során az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal képe az r, φ sikban az $r = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ szakasz, igy

$$u(1, \varphi, t) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0 \tag{14.12}$$

Az $y = 0$ $x \geq 0$ félegyenes képe egyrészt a $\varphi = 0$, $r \geq 0$, másrészt a $\varphi = 2\pi$, $r \geq 0$ félegyenes (lásd 14.3 ábra), igy az

$$u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t) \tag{14.13}$$

$$\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial u(r, 2\pi, t)}{\partial \varphi}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad t \geq 0 \tag{14.14}$$

egyenlőségeknek teljesülniök kell ahhoz, hogy az u kitérés az $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ szakasz pontjaiban is folytonos és folytonosan differenciálható függvény legyen. A megoldás tehát ki kell, hogy elégitse a (14.12), (14.13) és (14.14) peremfeltételeket.

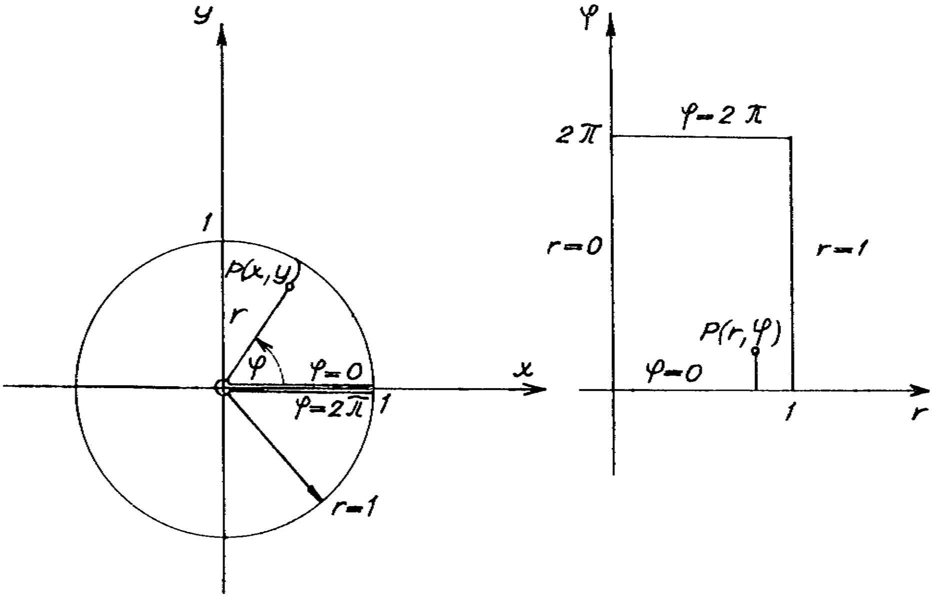
Tegyük fel, hogy a $t = 0$ pillanatban ismerjük a membrán minden pontjának kitérését és sebességét, vagyis az

$$u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \tag{14.15}$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, \varphi), \quad t \geq 0 \tag{14.16}$$

kezdeti feltételek adottak, ahol f és g adott, kétszer folytonosan differenciálható függvények.

A feladat tehát a (14.11) differenciálegyenlet (14.12) - (14.16) feltételeket kielégitő megoldásának meghatározása. Mivel mind a differenciálegyenlet, mind a koordinátavonalak mentén adott peremfeltételek homogének, a feladatot az előző pontban ismertetett Fourier-módszerrel oldjuk meg.



14.3 ábra

Először egyváltozós függvények szorzataként a homogén peremfeltételeket kielégitő megoldásokat állitjuk elő. Tegyük fel, hogy (14.11)-nek van

$$u(r, \varphi, t) = R(r)\, \Phi(\varphi)\, T(t) \tag{14.17}$$

alaku nem triviális megoldása. Ezt (14.11)-be helyettesitve az

$$R(r)\, \Phi(\varphi)\, \frac{d^2T(t)}{dt^2} = a^2 \Bigg(\frac{d^2R(r)}{dr^2}\, \Phi(\varphi)\, T(t) +$$

$$+ \frac{1}{r}\, \frac{d\,R(r)}{dr}\, \Phi(\varphi)\, T(t) +$$

$$+\frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} T(t)\Big)$$

egyenlőséget kapjuk. Azon a tartományon, ahol $R(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t) \neq 0$, az $a^2 R(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$ kifejezéssel oszthatunk:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} .$$

Az egyenlőség bal oldala csak r és φ függvénye, t-ben állandó, igy a jobb oldalnak is állandónak kell lennie, és hasonlóan a jobb oldal csak t-nek függvénye, r és φ változtatása mellett állandó, igy a bal oldal is az. Tehát

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \alpha ,$$

vagyis

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} - \alpha a^2 T(t) = 0 ,$$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} +$$

$$+\frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \alpha .$$

Ez utóbbi egyenlőséget r^2-tel szorozva és rendezve

$$r^2 \frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{1}{R(r)} \frac{d R(r)}{dr} - \alpha r^2 =$$

$$= - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \beta ,$$

ugyanis itt a bal oldal csak r, a jobb oldal csak φ függvénye. A (14.11) differenciálegyenlet minden (14.17) alaku megoldásának tényezői rendre kielégitik a

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \alpha a^2 T = 0, \tag{14.18}$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (-\alpha r^2 - \beta) R = 0, \tag{14.19}$$

illetve a

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \beta \Phi = 0 \tag{14.20}$$

differenciálegyenletet, ahol α és β tetszőleges állandók. Könnyen belátható, hogy a három másodrendü közönséges differenciálegyenlet megoldásának szorzata (14.11)-nek megoldása.

A (14.20) differenciálegyenlethez (14.13) és (14.14) szerint a

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \frac{d\Phi(0)}{d\varphi} = \frac{d\Phi(2\pi)}{d\varphi} \tag{14.21}$$

peremfeltételek csatlakoznak. A 13.1 Példában ismertetett módon belátható, hogy ha $\beta = -b^2$, akkor a differenciálegyenletnek csak a triviális megoldása elégiti ki a peremfeltételeket, és ha $\beta = 0$, akkor $\Phi(\varphi) \equiv c_0$

állandó. Végül ha $\beta = b^2$, $b > 0$, a (14.20) differenciálegyenlet megoldása

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos b\varphi + c_2 \sin b\varphi$$

(lásd 10.12 Tétel), ahonnan

$$\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} = b(-c_1 \sin b\varphi + c_2 \cos b\varphi).$$

Figyelembe véve (14.21)-et c_1 és c_2-re a

$$c_1 = c_1 \cos b\,2\pi + c_2 \sin b\,2\pi,$$

$$b c_2 = b(-c_1 \sin b\,2\pi + c_2 \cos b\,2\pi)$$

egyenletrendszert nyerjük. Rendezve:

$$c_1 (1 - \cos 2b\pi) - c_2 \sin 2b\pi = 0,$$

$$c_1 \sin 2b\pi + c_2 (1 - \cos 2b\pi) = 0.$$

Triviálistól különböző megoldást akkor kapunk, ha a rendszer determinánsa

$$(1 - \cos 2b\pi)^2 - \sin^2 2b\pi = 0,$$

vagyis ha

$$\sin 2b\pi = 0,$$

$$1 - \cos 2b\pi = 0.$$

Ez utóbbi $b = 1, 2, 3, \dots$ esetén teljesül és ekkor $\sin 2b\pi$ is zérus.

A (14.20) - (14.21) feladat sajátértékei tehát

$$\beta_n = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

saját függvényei pedig

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (14.22)$$

Irjuk az igy kapott β_n értékeket a (14.19) differenciálegyenletbe. Ekkor az

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (-\alpha r^2 - n^2) R = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (14.23)$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Ha $\alpha < 0$, azaz $\alpha = -\lambda^2$, $\lambda > 0$, akkor az

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \left((\lambda r)^2 - n^2\right) R = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

differenciálegyenlet megoldása az

$$R(r) = J_n(\lambda r)$$

függvény, ahol J_n az n-indexü elsőfaju Bessel-függvény (lásd 11.1 Definició és (11.17)). A (14.12) peremfeltétel szerint

$$R(1) = J_n(\lambda) = 0,$$

vagyis ez akkor teljesül, ha λ az n-indexü elsőfaju Bessel-függvény pozitiv zérushelye. A J_n függvény megszámlálhatóan végtelen sok pozitiv zérus helyét rendezzük monoton növekedő sorozatba:

$$\lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots < \lambda_k^{(n)} < \dots$$

(lásd 11.5 Tétel). Tehát az $\alpha = -\left(\lambda_k^{(n)}\right)^2$, $(n = 0, 1, 2, \dots;\ k = 1, 2, 3, \dots)$ értékeire az $R(r) = J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)$ függvény a (14.19) differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is kielégitő megoldása. Ha $\alpha = 0$, az

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2 R = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

differenciálegyenlet Euler-tipusu (lásd 10.1 Példa). Általános megoldása

$$R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

illetve

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r .$$

Könnyen látható, hogy e függvények közül csak a $c_1 = c_2 = 0$ esetnek megfelelő triviális megoldás jön számitásba. Egyébként ugyanis a függvények vagy nem elégitik ki a (14.12) peremfeltételt, vagy a membrán $r = 0$ középpontjában nem végesek. Ha végül $\alpha > 0$, vagyis $-\alpha = (i\mu)^2$, $\mu > 0$, akkor a differenciálegyenlet

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \left((i\mu r)^2 - n^2\right) R = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

megoldása pedig az

$$R(r) = J_n(i\mu r), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

komplex értékű függvény, ahol (lásd (11.6))

$$J_n(i\mu r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{i\mu r}{2}\right)^{n+2k}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Ez a függvény azonban a peremfeltételeknek nem tesz eleget, ugyanis az $r = 1$ helyen

$$J_n(i\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{n+2k} (i)^{n+2k} =$$

$$= i^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{n+2k} \neq 0$$

(a sor pozitiv tagu). Tehát a (14.23) differenciálegyenlettel kapcsolatos feladat sajátértékei

$$\alpha_{kn} = -\left(\lambda_k^{(n)}\right)^2 ,$$

és saját függvényei

$$R_{kn}(r) = J_n(\lambda_k^{(n)} r), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Irjuk be az $\alpha_{nk} = -\left(\lambda_k^{(n)}\right)^2$ sajátértékeket a (14.18) egyenletbe. A

$$\frac{d^2T}{dt} + \left(\lambda_k^{(n)}\right)^2 a^2 T = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$T_{kn}(t) = a_{kn} \cos \lambda_k^{(n)} a t + b_{kn} \sin \lambda_k^{(n)} at,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Igy (14.11)-nek a (14.12) - (14.14) peremfeltételeket kielégitő megoldásai

$$u_{kn}(r,\varphi,t) = J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)\left(C_{nk} \cos a\lambda_k^{(n)} t + D_{nk} \sin a\lambda_k^{(n)} t\right)\cos n\varphi +$$
$$+ J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)\left(A_{nk} \cos a\lambda_k^{(n)} t + B_{nk} \sin a\lambda_k^{(n)} t\right)\sin n\varphi ,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots ,$$

$$0 < \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \ldots < \lambda_k^{(n)} < \ldots, \quad J_n(\lambda_k^{(n)}) = 0,$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0 . \tag{14.24}$$

A (14.11) differenciálegyenlet azon megoldását, mely a (14.12) - (14.14) homogén peremfeltételeken kivül a (14.15) és (14.16) inhomogén kezdeti feltételeket is kielégiti a (14.24) függvények szerint haladó sor alakjában állitjuk elő. Tételezzük fel, hogy

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{\substack{n=0 \\ k=1}}^{\infty} u_{kn}(r, \varphi, t),$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \tag{14.25}$$

és a jobb oldalon álló sor a változói szerint kétszer tagonként differenciálható. A differenciálegyenlet és a peremfeltételek homogenitása miatt a (14.24) függvények bármely lineáris kombinációja és a (14.25) végtelen sor összege is kielégiti azokat. A (14.15) és (14.16) kezdeti feltételek szerint fenn kell állniuk az

$$u(r, \varphi, 0) = \sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty} u_{kn}(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi),$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi, 0)}{\partial t} = \sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty} \frac{\partial u_{kn}(r, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, \varphi)$$

egyenlőségeknek. Az u_{kn} függvények (14.24) kifejezését behelyettesitve az

$$f(r,\varphi) = \sum_{n,k}\left(C_{nk} J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)\cos n\varphi + A_{nk} J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)\sin n\varphi\right),$$

$$g(r,\varphi) = a\sum_{n,k}\lambda_k^{(n)}\left(D_{nk} J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)\cos n\varphi + B_{nk} J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right)\sin n\varphi\right)$$

(14.26)

feltételeket kapjuk.

Megmutatjuk, hogy a

$$J_n(\lambda_k^{(n)} r) \cos n\varphi, \quad J_n(\lambda_k^{(n)} r) \sin n\varphi,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{14.27}$$

függvényrendszer a $Q = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ "téglalapon ortogonális az r sulyfüggvény mellett" (lásd IV. Kötet, 13.4 Definició),

azaz

$$\iint\limits_{(Q)} r J_{n_1}(\lambda_{k_1}^{(n_1)} r) \cos n_1\varphi \, J_{n_2}(\lambda_{k_2}^{(n_2)} r) \sin n_2\varphi \, dr\, d\varphi = 0$$

$$n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad k_1, k_2 = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\iint\limits_{(Q)} r J_{n_1}(\lambda_{k_1}^{(n_1)} r) \cos n_1\varphi \, J_{n_2}(\lambda_{k_2}^{(n_2)} r) \cos n_2\varphi \, dr\, d\varphi \begin{cases} = 0, \text{ ha } k_1 \neq k_2, \\ \quad \text{vagy } n_1 \neq n_2 \\ \neq 0, \text{ ha } k_1 = k_2 \\ \quad \text{és } n_1 = n_2 \end{cases}$$

$$\iint\limits_{(Q)} r J_{n_1}(\lambda_{k_1}^{(n_1)} r) \sin n_1\varphi \, J_{n_2}(\lambda_{k_2}^{(n_2)} r) \sin n_2\varphi \, dr\, d\varphi \begin{cases} = 0, \text{ ha } k_1 \neq k_2, \\ \quad \text{vagy } n_1 \neq n_2 \\ \neq 0, \text{ ha } k_1 = k_2 \\ \quad \text{és } n_1 = n_2 \end{cases}$$

(14.28)

A (14.28) formulák közül a másodikat igazoljuk, a többi ezzel analóg módon könnyen belátható.

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r J_{n_1}(\lambda_{k_1}^{(n_1)} r) \cos n_1\varphi \, J_{n_2}(\lambda_{k_2}^{(n_2)} r) \cos n_2\varphi \, dr \right] d\varphi =$$

$$= \int_0^1 r J_{n_1}(\lambda_{k_1}^{(n_1)} r) J_{n_2}(\lambda_{k_2}^{(n_2)} r)\, dr \int_0^{2\pi} \cos n_1\varphi \, \cos n_2\varphi \, d\varphi$$

(14.29)

Mivel az 1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, ..., cosnx, sinnx, ... függvényrendszer ortogonális bármely 2π hosszuságu intervallumon (lásd IV. Kötet, 13.2 Definició, (10.4), (10.5) és (10.6) formula, (14.29) második tényezője akkor és csak akkor különbözik zérustól, ha $n_1 = n_2 = n$. Ekkor az első tényező

$$\int_0^1 r J_n(\lambda_{k_1}^{(n)} r) J_n(\lambda_{k_2}^{(n)} r)\, dr \begin{cases} = 0, & \text{ha } k_1 \neq k_2 \\ \neq 0, & \text{ha } k_1 = k_2 \end{cases},$$

mert a $\left\{ J_n\left(\lambda_k^{(n)} r\right) : k = 1, 2, 3, \dots \right\}$ függvényrendszer a $[0, 1]$ intervallumban az r sulyfüggvény mellett ortogonális (lásd 11.6 Tétel), $n = 0, 1, 2, \dots$.

Ezek szerint az adott $f(r, \varphi)$ és $g(r, \varphi)$ függvényeket a Q téglalapon a (14.27) ortogonális függvényrendszer függvényei szerint haladó (14.26) un. "Bessel-Fourier-sorba" fejtjük. A sorfejtés együtthatói a függvényrendszer ortogonálitása miatt elvileg egyszerüen meghatározhatók (v.ö. IV. Kötet, 13.5 Definició). Az ily módon meghatározott együtthatókkal felirt (14.25) sor (lásd az u_{kn} függvények (14.24) kifejezéseit) összege a feladat megoldása, feltéve természetesen, hogy a (14.25) sor konvergens és kétszer tagonként differenciálható.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory I.) VIII. Kötet, Tankönyvkiadó, 1973.

[2] Szász P.: A differenciál- és integrálszámitás elemei, I-II Kötet, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, 1951.

[3] Pontrjagin, L. Sz.: Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, 1972.

[4] Ralston, A.: Bevezetés a numerikus analizisbe, Müszaki Könyvkiadó, 1969.

[5] Farkas M.: Speciális függvények, Müszaki Könyvkiadó, 1964.

[6] Kamke, E.: Differentialgleichungen, I. Akademische Verlagsgesellschaft, 1964. Leipzig.

[7] Kaplan, W.: Ordinary differential equations, Addison Wesley, 1962, London.

[8] Кошлаков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.: Дифференциальные уравнения математической физики, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит. 1962, Москва.

TÁRGYMUTATÓ

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyüjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **MATEMATIKA VIII. kötet Differenciálegyenletek**

A jegyzet szerkesztője: **Farkas Miklós**

A jegyzet azonosítója: **040808**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:
(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)