Folytonos dinamikai rendszerek I.

Nágel Árpád

1. Lineáris rendszerek

Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) \qquad (1.1.)$$

állandó együtthatós, homogén lineáris n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszert. Jelölje az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit multiplicitással $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ és jelölje $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n$ azt a bázist az n-dimenziós euklideszi térben, amely a mátrix Jordan-normálformáját adja. Ezen bázis segítségével lehet definiálni a (1.1.) rendszer stabilis, instabilis és centrális alterét.

<u>1.1. Definíció</u>: Legyen $\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots \underline{s}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix valós Jordan-normálalakját meghatározó egy bázis. Jelölje λ_k azt a sajátértéket, amelyhez az $\underline{s}_k$ bázisvektor tartozik. Ez esetben az

$$E_s(\underline{\underline{A}}) := \langle\{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k < 0\}\rangle, \quad E_u(\underline{\underline{A}}) := \langle\{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0\}\rangle, \quad E_c(\underline{\underline{A}}) := \langle\{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k = 0\}\rangle$$

altereket az (1.1.) rendszer *stabilis, instabilis, illetve centrális alterének* nevezzük.
(Itt a $\langle\cdot\rangle$ a megfelelő vektorok által generált alteret jelöli.)

<u>1.2. Megjegyzés</u>: **a**) A fenti alterek invariánsak $\underline{\underline{A}}$-ra, azaz $A(E_i) \subset E_i$ $(i = s, u, c)$ és a direkt összegük az egész $\mathbb{R}^n$ tér. **b**) az $E_s(\underline{\underline{A}})$, $E_u(\underline{\underline{A}})$, ill. az $E_c(\underline{\underline{A}})$ alterek invariánsak az (1.1.) rendszerre. **c**) $\underline{x}_0 \in E_s(\underline{\underline{A}})$ ($E_u(\underline{\underline{A}})$) esetén $e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{x}_0 \to \underline{0}$, ha $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$, sőt a konvergencia exponenciális. ⊡

<u>1.3. Definíció</u>: Legyen az $\underline{\underline{A}}$ 2×2-es mátrix sajátértéke λ_1 és λ_2. Az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ egyensúlyi helyzete

- *stabilis csomó*, ha $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$,
- *instabilis csomó*, ha $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,
- *elfajult stabilis csomó*, ha $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ és a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós,
- *elfajult instabilis csomó*, ha $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ és a hozzájuk tartozó sajátaltér egydimenziós,
- *nyereg*, ha $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- *stabilis fókusz*, ha λ_1, λ_2 nem valósak és $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$,
- *instabilis fókusz*, ha λ_1, λ_2 nem valósak és $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$,
- *centrum*, ha $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}, \lambda_2 = 0$, azaz λ_1 és λ_2 tiszta képzetesek.

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa 0, akkor az *origó nem izolált egyensúlyi helyzet*.
Ezen négy elfajult eset a következő (ezeknek nincs külön elnevezésük):

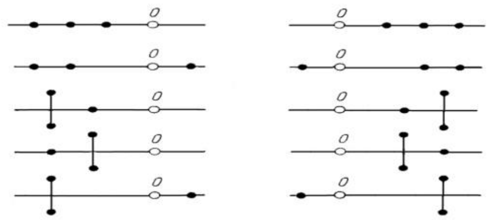
1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, akkor végtelen sok instabilis egyensúlyi pont,
2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$, akkor végtelen sok stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont,
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és a hozzá tartozó sajátaltér kétdimenziós, akkor minden pont egyensúlyi pont,
4. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós, akkor végtelen sok instabilis egyensúlyi pont van.

A fáziskép típusa meghatározható sajátértékek konkrét kiszámítása nélkül. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - (\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})\lambda + \det\underline{\underline{A}} = 0$. Így a megfelelő sajátértékek $\lambda_{12} = \frac{\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 - 4\det\underline{\underline{A}}}}{2}$.

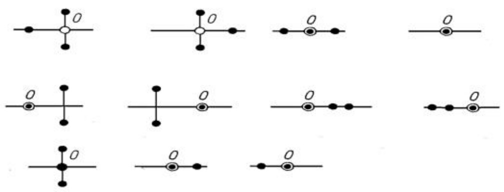
<u>1.4. Állítás</u>: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ rendszert, ahol $\underline{\underline{A}}$ adott 2×2-es mátrix. Ekkor a rendszer egyensúlyi helyzete

- stabilis nem elfajult csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 > 4\det\underline{\underline{A}} > 0$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$,
- instabilis nem elfajult csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 > 4\det\underline{\underline{A}} > 0$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$,
- elfajult stabilis csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 = 4\det\underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$,
- elfajult instabilis csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 = 4\det\underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$,
- nyereg, ha $\det\underline{\underline{A}} < 0$,
- stabilis fókusz, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 < 4\det\underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$,
- instabilis fókusz, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 < 4\det\underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$,
- centrum, ha $\det\underline{\underline{A}} > 0$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} = 0$.

Bonyolultabb az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 3-*ad rendű* differenciálegyenlet-rendszer megoldásának a szerkezete. A rendszer egyensúlyi helyzetének jellegét $\mathbb{R}^3$-ban (a kétdimenziós esethez hasonlóan) az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei szerint osztályozhatjuk, jellemezhetjük. Az elfajult esetek mellett egy valós, két konjugált komplex, illetve három valós sajátérték lehetséges. Két elkülönülő eset van.
a.) <u>10 db. normál eset</u>: $\mathrm{Re}\,\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. (A többszörös gyököktől eltekintve.)



b.) <u>11 db. elfajult eset</u>: $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ valamilyen $i = 1, 2, 3$-ra.



Definiáljuk a Ljapunov-stabilitást *általános* differenciálegyenlet-rendszer esetén.

<u>1.5. Definíció</u>: Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány, $\underline{f}: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(t_0, \underline{x}_0) \in D$. Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t))$ (1.2.) differenciálegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy az (1.2.) rendszerre teljesülnek az egzisztencia és az unicitás tétel feltételei. Jelölje az (1.2) differenciálegyenlet $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás maximális értelmezési tartományát $\mathrm{I}(t_0, \underline{x}_0)$, a kezdeti érték probléma teljes megoldását $\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$. A $t \to \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$ megoldás *Ljapunov-értelemben stabilis*, ha
1. $[t_0, +\infty) \subset \mathrm{I}(t_0, \underline{x}_0)$ és
2. minden $\varepsilon > 0$ számhoz és minden $t_1 \in [t_0, +\infty)$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon, t_1) > 0$ szám, hogy minden $(t_1, \underline{q}) \in D, |\underline{q} - \underline{x}(t_1, t_0, \underline{x}_0)| < \delta$ esetén $[t_1, +\infty) \subset \mathrm{I}(t_1, \underline{q})$ és $|\underline{x}(t, t_1, \underline{q}) - \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq t_1$ esetén.
A megoldást *Ljapunov-értelemben instabilisnak* nevezzük, ha nem stabilis.
A megoldást *Ljapunov-értelemben aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis és

$$|\underline{x}(t, t_1, \underline{q}) - \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)| \to 0, \text{ ha } t \to +\infty.$$

A továbbiakban, ha mást nem mondunk, a stabilitást, aszimptotikus stabilitást, illetve az instabilitást Ljapunov-értelemben fogjuk használjuk.

1.6. Állítás: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{b}(t)$ (1.3.) inhomogén lineáris n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{\underline{A}}(t),\ \underline{b}(t) \in C(\mathbb{R})$ és $t \in I \subset \mathbb{R}$. Ha a rendszer egy megoldása stabilis (aszimptotikusan stabilis), akkor minden megoldás stabilis (aszimptotikusan stabilis). Így ebben az esetben lehet beszélni a rendszer stabilitásáról (aszimptotikus stabilitásáról).

1.7. Állítás: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ állandó együtthatós, lineáris n-ed rendű rendszert.
a) Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van nemnegatív valós részű sajátértéke, akkor a rendszer nem aszimptotikusan stabilis.
b) Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van pozitív valós részű sajátértéke, akkor a rendszer instabilis.
c) Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van olyan 0 valós részű sajátértéke, amely a minimál polinomnak többszörös gyöke, akkor a rendszer instabilis.
d) A rendszer pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minden sajátértékének a valós része negatív.
e) A rendszer pontosan akkor stabilis, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minden sajátértékének a valós része nem pozitív és $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ esetén a λ algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitásával.

Egy lineáris rendszer egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitásának meghatározására a legismertebb a Routh-Hurwitz-kritérium. Ez pontosan akkor következik be, ha a (1.1.) rendszer $p_n(\lambda)$ karakterisztikus polinomja ún. *stabilis polinom*, azaz minden sajátértékének a valós része negatív. Ezt a sajátértékek kiszámítása nélkül is ellenőrizni lehet.

1.8. Állítás: (A. B. Stodola) (1893) Ha a $p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polinom stabilis, akkor $a_i > 0$ minden $i = 0, 1, \dots n-1$-re.

1.9. Állítás: (Routh-Hurwitz-kritérium) (1895) A $p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polinom pontosan akkor stabilis, ha az alábbi $n \times n$-es mátrix *pozitív definit*, azaz a főminormátrix determináns sorozatai pozitívak:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

1.10. Megjegyzés: $n = 2$ esetben a $p_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ polinom pontosan akkor stabilis, ha a $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit, azaz $a_1 > 0$ és $a_1 \cdot a_0 > 0$. Következésképpen, ha a_1 és $a_0 > 0$. ⊡

A fentiek alapján teljesül az irányítástechnikában is használt Mihajlov-Leonhard-kritérium.

1.11. Állítás: (Mihajlov-Leonhard) (1938) Tekintsük a $P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ n-ed fokú polinomot. Tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$.
Legyen a P_n polinom gyöktényezős alakja frekvenciatartományban, $\lambda = i\omega$ helyettesítéssel:

$$P_n(i\omega) = a_0(i\omega - p_1)(i\omega - p_2) \dots (i\omega - p_n).$$

A P_n polinom stabilis pontosan akkor, ha az n-ed fokú karakterisztikus egyenletének megfelelő $\omega \to P_n(i\omega)$ görbe nem halad át a komplex sík origóján, és a körfrekvenciát $0 < \omega < \infty$ tartományban változtatva, a görbe pontosan n darab síknegyeden fut keresztül, az óramutató járásával ellentétes irányban.

1.12. Megjegyzés: A fenti Mihajlov-Leonhard-kritérium pontosan akkor teljesül, ha **1.** $a_n a_{n-1} > 0$ és **2.** $q_1(\alpha) = a_n - a_{n-2}\alpha + a_{n-4}\alpha^2 - \dots$ és a $q_2(\beta) = a_{n-1} - a_{n-3}\beta + a_{n-5}\beta^2 - \dots$ polinomok gyökei pozitívak és alternálnak, azaz az egyik egyenlet tetszőleges két gyöke között van a másik egyenletnek gyöke: $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots$ ⊡

1. Feladatok

Vizsgáljuk meg az alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz tartozó $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszerek egyensúlyi helyzetének jellegét, határozzuk meg a stabilis, instabilis és centrális alterüket és adjuk meg ezen alterek dimenzióját!

1.1. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.2. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.4. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.5. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.6. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

1.7. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az a valós paraméter függvényében az adott lineáris rendszer egyensúlyi helyzetének a jellegét!

1.8. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.9. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -a & -(a+1) \end{pmatrix}$

1.10. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.11. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a+3 & -1 \end{pmatrix}$

1.12. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg a p valós paraméter függvényében az adott lineáris rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének dimenzióját!

1.13. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-p & 1+p \end{pmatrix}$

1.14. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vizsgáljuk a stabilitás szempontjából az alábbi differenciálegyenleteket:

1.15. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$

1.16. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$

1.17. feladat: (Megoldás) $\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszer tetszőleges megoldása $t \to \infty$ esetén az azonosan nulla megoldáshoz tart!

1.18. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -3x - 4y$

1.19. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -7x + y$
$\dot{y} = -2x - 5y$

1.20. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x + z$
$\dot{y} = -2y - z$
$\dot{z} = y - z$

1.21. feladat: (Megoldás) Milyen a és b paraméterre lesz az alábbi differenciálegyenlet aszimptotikusan stabilis?

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + 2x = 0$$

Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet fázisportréját!

1.22. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x$

1.23. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y$
$\dot{y} = -8x$

1.24. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = y$

1.25. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + y$
$\dot{y} = -y$

1.26. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - y$
$\dot{y} = -4x + y$

1.27. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -2x + y$
$\dot{y} = -y$

1.28. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 0$
$\dot{y} = x + y$

1.29. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x + y$
$\dot{y} = -2x - 3y$

1.30. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -2x - y$
$\dot{y} = x - 2y$

1.31. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - y - 1$
$\dot{y} = -4x + y + 1$

1.32. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 2×2-es lineáris rendszert. Jelölje az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$ valamint sajátvektorait $\underline{s}_1 = \underline{u} + i\underline{v}$, $\underline{s}_2 = \underline{u} - i\underline{v}$. Legyen $\underline{\underline{T}} = (\underline{u}, \underline{v})$ és $\underline{x} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y}$. Mutassuk meg, hogy a det $\underline{\underline{T}}$ pozitív vagy negatív értékétől függően az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ síkon a pályák körüljárási iránya megőrződik, illetve ellentétesre változik. (→ 1.29., 1.30. feladat)

1.33. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 2×2-es lineáris rendszert. Mutassuk meg, ha a rendszernek van nem triviális periodikus megoldása, akkor minden megoldás periodikus.

2. Nemlineáris rendszerek

Tekintsük a továbbiakban az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \tag{2.1.}$$

egy olyan n-dimenziós *autonóm* differenciálegyenlet-rendszert, amelyre teljesülnek az egzisztencia és a unicitás tétel feltételei. Jelölje $\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$ a (2.1.) $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ feltételt teljesítő megoldását. A (2.1.) autonóm rendszer esetén $\underline{x}(t + t_0, t_0, \underline{x}_0) = \underline{x}(t, 0, \underline{x}_0)$. Jelöljük ezt a továbbiakban $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$-val. Legyen $\underline{p}$ a rendszer *egyensúlyi helyzete (egyensúlyi pontja)*, azaz $\underline{f}(\underline{p}) = \underline{0}$.

I. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\underline{p} = \underline{0}$.

II. Legyen $\underline{0} \in D$, $\underline{f}: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény és $\underline{x}(t)$ a (2.1.) megoldása, amelyre $\lim\limits_{t\to\infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$, akkor $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$, azaz ekkor az origó egyensúlyi helyzet.

Alapvető az 1.5. Definíció átfogalmazása autonóm rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitására.

2.1. Definíció: Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás *stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy minden $|\underline{q} - \underline{p}| < \delta$ esetén $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$-ra.

Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás (*lokálisan*) *aszimptotikusan stabilis*, ha stabilis és *lokálisan attraktív*, azaz $\underline{p}$ egyensúlyi pontnak létezik olyan U környezete, hogy minden $\underline{q} \in U$ esetén $\lim\limits_{t\to+\infty} \underline{x}(t, \underline{q}) = \underline{p}$.

Aszimptotikus stabilitás esetén az U halmazt *vonzási vagy attraktivitási tartománynak* nevezzük.

Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás (*lokálisan*) *exponenciálisan stabilis*, ha létezik $C, \delta > 0$ és $\alpha > 0$ szám, hogy $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |\underline{q}|$, ha $|\underline{q} - \underline{p}| \leq \delta$.

Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás *instabilis*,ha nem stabilis.

Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás *teljesen instabilis*, ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az $S := \{\underline{x}: |\underline{x} - \underline{p}| < \delta\}$ gömb tetszőleges $\underline{q} \neq \underline{p}$ pontjából indított $\underline{x}(t, \underline{q})$ megoldás esetén létezik olyan $t_0 = t_0(\underline{q})$ pozitív szám, hogy minden $t > t_0$ esetén $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| > \delta$. Szemléletesen, az S gömbből induló pályák el-hagyják az S gömböt és soha nem térnek ide vissza.

2.1. Megjegyzés: Az attraktivitás és a stabilitás egymástól független fogalmak. Létezik példa, hogy az egyensúlyi helyzet ún. *globálisan attraktív*, azaz minden pályagörbét vonz, de az mégsem stabilis. (R. E. Vinograd 1957.)

A pályagörbék jellege az egyensúlyi pontok környezetében az *esetek egy részében* meghatározható linearizálással is. Ha $\underline{f} \in C^1$, akkor tekinthetjük $\underline{p}$ egyensúlyi pont egy környezetében az

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{f}'(\underline{p}) \cdot \underline{y}(t) \tag{2.2.}$$

ún. *linearizált rendszert*. (Az $\underline{f}'$ az $\underline{f}$ vektormező Jacobi-mátrixa.)

A linearizálás segítségével a (2.1.) rendszer stabilitása a következőképpen dönthető el:

2.2. Állítás: Tegyük fel, hogy $\underline{f} \in C^1$.

a). Ha az $\underline{\underline{A}} = \underline{f}'(\underline{p})$ mátrix minden sajátértékének a valós része negatív, akkor a $\underline{p}$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja a (2.1.) rendszernek, sőt létezik $C, \delta, \alpha > 0$, hogy a (2.1.) minden $\underline{x}(t, \underline{q})$ megoldására $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |\underline{q}|$, ha $|\underline{q} - \underline{p}| \leq \delta$, azaz $\underline{p}$ ekkor exponenciálisan is stabilis.

b). Ha az $\underline{\underline{A}} = \underline{f}'(\underline{p})$ mátrixnak van pozitív valósrészű sajátértéke, akkor a $\underline{p}$ instabilis egyensúlyi pontja a (2.1.) rendszernek.

c). Ha az $\underline{\underline{A}} = \underline{f}'(\underline{p})$ mátrixnak minden sajátértéke pozitív valósrészű, akkor a $\underline{p}$ teljesen instabilis egyensúlyi pontja a (2.1.) rendszernek.

Teljesül a következő

<u>2.3. Állítás</u>: Tekintsük a következő ún. kvázilineáris differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x}(t)), \qquad (2.3.)$$

amelyre tegyük fel, hogy $\underline{g}(\underline{0}) = \underline{0}$ és $\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{0}$.

Tekintsük a (2.3.) egyenletben a nemlineáris tagokat elhagyva, az egyenlet linearizáltját:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t). \qquad (2.4.)$$

Ha a (2.4.) linearizált egyenlet origója aszimptotikusan stabilis, akkor a (2.3.) egyenlet origója is aszimptotikusan stabilis. Ha a (2.4.) linearizált egyenlet $\underline{\underline{A}}$ mátrixának minden sajátérték valós része pozitív (létezik pozitív valós részű sajátértéke), akkor a (2.3.) egyenlet $\underline{p} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzete teljesen instabilis (instabilis).

<u>2.4. Megjegyzések</u>: **a**) Az első feltételből következik, hogy az origó a (2.3.) egyenletnek egyensúlyi helyzete. A második feltétel szerint a $\underline{g}$ már csak lineárisnál nagyobb rendű tagokat tartalmaz.

b) Megmutatható, hogy a 2.2. a) Állítás megfordítható: A $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet exponenciálisan stabilis pontosan akkor, ha az $\underline{f}'(\underline{p})$ mátrix stabilis, azaz minden sajátértékének valós része negatív.

c) Ez nem igaz az aszimptotikus stabilitásra, mint ahogy azt az $\dot{x} = -x^3$ példája mutatja. ⊡

Kétdimenziós autonóm rendszerekre a 2.2. Állítás tovább finomítható.

<u>2.5. Állítás</u>: (Poincaré) Ha $\underline{f} \in C^2$ és $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ a $\underline{f}'(\underline{p})$ Jacobi-mátrix tetszőleges sajátértékére, akkor a (2.1.) rendszer $\underline{p}$ egyensúlyi helyzete ugyanolyan típusú, mint a (2.2.) rendszerben az origó.

<u>2.6. Megjegyzés</u>: Fontos szerepet játszott, hogy $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ teljesült tetszőleges sajátértékre. Ha ez a tulajdonság teljesül az adott mátrixra, akkor a mátrixot *nem kritikus mátrixnak*, illetve az egyensúlyi pontot *nem kritikus egyensúlyi helyzetnek* nevezzük. Ekkor a linearizált rendszer a *lokális* fázisképet meghatározza. ⊡

<u>2.7. Megjegyzés</u>: Ha a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet kritikus, akkor az egyensúlyi helyzet stabilitása általában linearizálással nem dönthető el. Egyszerű példák vannak arra, amikor a (2.1.) rendszer egyensúlyi helyzete stabilis vagy instabilis fókusz, de a linearizáltja ugyanitt centrum. Kritikus egyensúlyi helyzet lokális vizsgálatában fontos szerepet játszik a Ljapunov-féle direkt módszer. ⊡

<u>2.8. Állítás</u>: (Ljapunov-féle elégséges feltétel stabilitásra) (1892) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $\mathrm{V}: U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $\mathrm{V}(\underline{x}) > \mathrm{V}(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$ (azaz $\underline{p}$ a V függvény szigorú lokális minimumhelye U-ban),
2. $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. Ha 2. helyett *csak* a

2.* $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in U$ feltétel teljesül, akkor $\underline{p}$ (lokálisan) stabilis egyensúlyi helyzet.

<u>2.9. Megjegyzés</u>: A (2.1.) rendszer és az összetett függvény deriválási szabálya alapján:

$$\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \frac{d}{dt}\mathrm{V}(\underline{x}(t)) = \mathrm{V}'(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t) = \mathrm{V}'(\underline{x}(t)) \cdot \underline{f}(\underline{x}(t)).$$

Ha a fenti kifejezés például negatív, akkor V csökken a pályák mentén. Így a megoldások ismerete nélkül el tudjuk dönteni, hogy egy adott függvény értéke a megoldások mentén hogyan változik, hiszen ehhez csak az iránymezőt kell ismernünk. ⊡

<u>2.10. Megjegyzés</u>: Ha a 2. feltétel helyett a gyengébb

2.* $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$ feltétel teljesül, akkor a megoldások nem feltétlenül közelednek V függvény minimumához, hanem csak annyit tudhatunk, hogy nem távolodnak tőle. Ez a 2.8. Állítás miatt elégséges a stabilitáshoz, de nem garantálja az aszimptotikus stabilitást! Ugyanakkor a $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$ feltétel nem mindig teljesül. ⊡

2.11.a) Állítás: (Barbasin-Kraszovszkij) (1952) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen létezik olyan $V:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in U$,
3. a $t \to \underline{p}$ (triviális) megoldáson kívül az U halmaz nem tartalmaz olyan teljes $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$

pályát, amely mentén a $t \to V(\underline{x}(t, \underline{x}_0))$ függvény állandó. Ekkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis.

A fenti tétel egy variánsa a

2.11.b) Állítás: (Barbasin-Kraszovszkij) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in U$.

Legyen $S = \{\underline{x} \in U : \dot{V}(\underline{x}) = 0\}$. Tegyük fel, hogy a $\underline{x}(t) = \underline{p}$ (triviális) megoldáson kívül nincs más teljes pálya az S-ben. Ekkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis.

Elégséges feltételt ad a globális aszimptotikus stabilitásra az alábbi

2.12. Állítás: (Kraszovszkij) Tegyük fel, hogy megadható olyan $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$,
3. a V függvény *radiálisan nem korlátos*, azaz ha $|\underline{x}| \to \infty$, akkor $V(\underline{x}) \to \infty$,
4. a $\underline{p}$ az egyetlen invariáns halmaz az $S = \{\underline{x} : \dot{V}(\underline{x}) = 0\}$ halmazban,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet *globálisan* aszimptotikusan stabilis.

2.13. Állítás: (Kraszovszkij) Ha az 1. és a 3. tulajdonság mellett teljesül, hogy $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén, akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis.

2.14. Megjegyzés: Az alábbi rendszerben az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet, létezik olyan $V:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre **1.** $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, **2.** $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, de az origó *nem lesz globálisan* aszimptotikusan stabilis.
Egy ilyen rendszer például: $\dot{x} = -\frac{6x}{(1+x^2)^2} + 2y$, $\dot{y} = 2\frac{x+y}{(1+x^2)^2}$. Tekintsük a $V(\underline{x}) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$ függvényt és vizsgáljuk a $V(\underline{x}) = c$ szintvonalakat. Megmutatható, hogy a V radiálisan korlátos és a V mentén a megoldások monoton csökkennek, viszont az origó nem globálisan aszimptotikusan stabilis.

2.15. Állítás: (Ljapunov-féle elégséges feltétel instabilitásra) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $\underline{p}$ nem lokális minimumhelye a V függvénynek,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet instabilis.

2.16. Állítás: Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

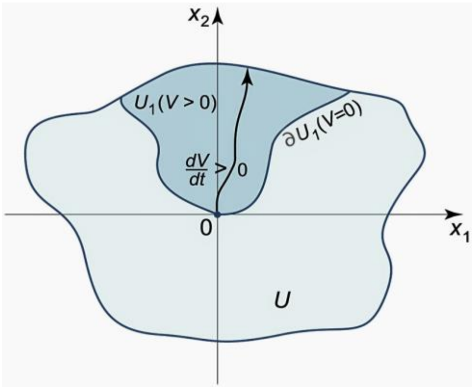
akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet instabilis.

Nyereg típusú instabilitás esetén $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x})$ pozitivitása az egyensúlyi helyzet *teljes* környezetében nem biztosítható. Ebben az esetben alkalmazható az alábbi.

<u>2.17. Állítás</u>: (Csetajev) (1934) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete és ezen egy $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1függvény, valamint adott egy $U_1 \subset U$ nyílt összefüggő halmaz, amelyekre fennáll:

1. $\underline{p} \in \partial U_1$ (∂U_1 az U_1 halmaz határát jelöli),
2. Ha $\underline{x} \in \partial U_1 \cap U$, akkor $V(\underline{x}) = 0$,
3. Ha $\underline{x} \in U_1 \cap U$, akkor $V(\underline{x}) > 0$ és $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$,

akkor $\underline{p}$ instabilis egyensúlyi helyzet.



<u>2.18. Állítás</u>: Tegyük fel, hogy a (2.1.) rendszernek az $\underline{x} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzete és az origónak létezik olyan $U = \{\underline{x}{:}\, |\underline{x}| \leq k\}$ környezete, amelyen megadható olyan $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, amelyre

1. $V(\underline{0}) = 0$,
2. $\dot{V}(\underline{0}) = 0$ és $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in U$,
3. Az origó minden környezetében létezik legalább egy $\underline{x}$ pont, amelyre $V(\underline{x}) > 0$,

akkor az origó instabilis egyensúlyi helyzet.

<u>2.19. Megjegyzés</u>: A fenti tétel alkalmazásában a „tipikus” függvény a $V(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, $x^{\alpha} - y^{\beta}$. □

<u>2.20. Definíció</u>: Legyen $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény. A V *függvény deriváltja az $\underline{f}$ vektormező mentén* (A V függvény ún. *Lie-deriváltja*) az alábbi függvény:

$(L_{\underline{f}}V)(\underline{x}) := \langle V'(\underline{x}), \underline{f}(\underline{x}) \rangle$, ahol $\underline{x} \in D_{\underline{f}}$, ahol $\langle \cdot , \cdot \rangle$ az $\mathbb{R}^n$-beli skalárszorzatot jelenti.

<u>2.21. Állítás</u>: Legyen $\underline{x}(t)$ a (2.1.) rendszer egy megoldása. Ekkor a $V^*(t) = V(\underline{x}(t))$ képlettel definiált függvényre $\dot{V}^*(t) = (L_{\underline{f}}V)(\underline{x}(t))$, ahol $t \in D_{\underline{x}}$.

Fontos speciális eset, amikor V függvény értéke a megoldások mentén állandó.

<u>2.22. Definíció</u>: A V függvényt a (2.1.) rendszer *első integráljának* nevezzük, ha $(L_{\underline{f}}V)(\underline{x}) = 0$.

<u>2.23. Állítás</u>: Legyen V függvény a (2.1.) rendszer első integrálja és $c \in \mathcal{R}\, V$.
Ekkor az $F = \{\underline{x}{:}\, V(\underline{x}) = c\}$ invariáns halmaz. (→ 3.2. Definíció)

Az egyensúlyi helyzet attraktivitási tartományáról szól az alábbi fontos

<u>2.24. Megjegyzés</u>: A 2.8 Állításban láttuk, hogy ha a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V{:}U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, 2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. Ha ezen túlmenően létezik olyan $c >$ $V(\underline{p})$, hogy az $S_c = \{\underline{x} \in U{:} V(\underline{x}) \leq c\}$ korlátos halmaz, akkor a $\underline{p}$ vonzási tartománya tartalmazza az S_c halmazt. Ha alkalmas $c^* > V(\underline{p})$ esetén, minden $V(\underline{p}) < c < c^*$esetén az S_c korlátos halmaz, akkor az $U := \cup \{S_c : V(\underline{p}) < c < c^*\}$ halmazt tartalmazza a $\underline{p}$ vonzási tartománya. Ha $U = \mathbb{R}^n$ és $|\underline{x}| \to \infty$

esetén $\mathrm{V}(\underline{x}) \to \infty$, akkor valamilyen c-re teljesül, hogy az $S_c = \{\underline{x} \in U: \mathrm{V}(\underline{x}) \leq c\}$ korlátos halmaz, azaz ebben az esetben a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis. (Ezt már megfogalmaztuk a 2.13. Állításban is.) ⊡

2.25. Megjegyzés: LaSalle-elv variánsa.
Tekintsük az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$ autonóm rendszert. Legyen $\mathrm{V}:\Omega \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan kompakt invariáns halmaz, amelyre $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) \leq 0$, ha $\underline{x} \in S$.
Jelölje $N = \{\underline{x} \in S: \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$, valamint legyen M az N halmazban elhelyezkedő teljes trajektóriák uniója. (ez lesz a N halmazon belüli maximális invariáns halmaz) Ekkor az S-ből induló megoldások approximálják az M halmazt, azaz tetszőleges $\underline{x}_0 \in S$ esetén az $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ trajektóriára teljesül, hogy

$$d(\underline{x}(t,\underline{x}_0), M) := \inf_{\underline{y} \in M} |\underline{x}(t,\underline{x}_0) - \underline{y}| \to 0, \text{ ha } t \to \infty.$$

Nemlineáris rendszerek egyensúlyi helyzeteire is értelmezzük az egyensúlyi helyzet típusait. (Nem teljes osztályozás! (→ 3.53. feladat.)

2.26. Definíció: Tekintsünk egy $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm rendszert. Írjuk fel a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet egy U környezetében a megoldásokat (r, φ) polárkoordinátás alakban. A $\underline{p}$
- *stabilis csomópont*, ha $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t)| < \infty$,
- *instabilis csomópont*, ha $\lim\limits_{t\to-\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to-\infty} |\varphi(t)| < \infty$,
- *nyeregpont*, ha létezik két olyan pálya U-ban, melyek $t \to +\infty$ esetén $\underline{p}$-hez tartanak, és létezik két olyan pálya U-ban, melyek $t \to -\infty$ esetén $\underline{p}$-hez tartanak. (ezek a pályák az ún. szeparátrixok.) A többi pontból induló pálya pedig $t \to +\infty$ esetén és $t \to -\infty$ esetén is elhagyja U-t,
- *stabilis fókusz*, ha $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t)| = \infty$,
- *instabilis fókusz*, ha $\lim\limits_{t\to-\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to-\infty} |\varphi(t)| = \infty$,
- *centrum*, ha U-ban az egyensúlyi helyzeten kívül minden pálya periodikus.

2.27. Megjegyzés: Az első integrál segítségével egyszerűen megkaphatjuk a fázisképet, hiszen annak szintvonalain fekszenek a rendszer pályái. Sokszor úgy sikerül megmutatni a (2.1.) rendszer egyensúlyának stabilitását, hogy sikerül találni egy olyan első integrált, amelynek a szintfelületei (nívóhalmazai) korlátos, zárt halmazt alkotnak. Ha az első integrál, mint többváltozós függvény (lokálisan) konvex vagy konkáv, akkor a fázistérben a pályagörbék zártak. ⊡

Nem állandó első integrálokra konstruktív módszer sajnos nincsen. Ugyanis pl. már $n = 2$ esetben az $\dot{x} = f_1(x,y), \dot{y} = f_2(x,y)$ esetén a $\partial_1\mathrm{V}(x,y)\cdot f_1(x,y) + \partial_2\mathrm{V}(x,y)\cdot f_2(x,y) = 0$ elsőrendű parciális differenciálegyenletet kellene megoldani, ami az eredeti rendszer megoldásával ekvivalens. Van példa olyan rendszerre, amelynek nincs (nem állandó) első integrálja!

Van viszont olyan (fontos) speciális eset, amikor erre van némi esélyünk.

2.28. Definíció: Azt mondjuk, hogy a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x,y) \\ \dot{y} &= f_2(x,y) \end{aligned} \qquad (2.5.)$$

rendszer *Hamilton-rendszer*, ha létezik $H{:}D_{\underline{f}} \to \mathbb{R}$ ($\underline{f} = (f_1, f_2)$) kétszer differenciálható függvény, amelyre $f_1(x,y) = \partial_2 H(x,y)$ és $f_2(x,y) = -\partial_1 H(x,y)$.

2.29. Megjegyzés: Ha $D_{\underline{f}}$ egyszeresen összefüggő tartomány, akkor a fenti H függvény létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy $\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y) = 0$, vagyis $\operatorname{div} \underline{f}(x,y) = 0$.
Ekkor a (2.5.) rendszer $H(x,y)$ *Hamilton-függvénye* az $\underline{g}(x,y) = (-f_2, f_1)$ vektormező primitív függvénye lesz és természetesen a $H(x,y)$ maga is egy első integrál. ⊡

2.30. Megjegyzés: Tekintsük a (2.5.) rendszer linearizáltját, az $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{x}$ rendszert. Ekkor

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \partial_{21}H(x,y) & \partial_{22}H(x,y) \\ -\partial_{11}H(x,y) & -\partial_{12}H(x,y) \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) egyensúlyi helyzet *nem elfajult*, azaz $\det \underline{f}'(x_0, y_0) = \det \underline{\underline{J}}(x_0, y_0) \neq 0$. Ellenőrizhető, hogy $\det \underline{\underline{J}} = \det H''$. Világos, hogy $\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{J}} = 0$.

a) $\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{J}} = 0$ és $\det \underline{\underline{J}} < 0$ esetén a linearizált rendszernek az origó nyeregpontja, (1.4. Állítás) így az (x_0, y_0) (2.5.) rendszernek is nyeregpontja. (2.5. Állítás) Világos, hogy ez pontosan akkor következik be, ha a $H(x,y)$ Hamilton-függvénynek az (x_0, y_0) nyeregpontja, ugyanis a $H''(x_0, y_0)$ mátrix indefinit.

b) $\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{J}} = 0$ és $\det \underline{\underline{J}} > 0$ esetén a linearizált rendszernek az origó centruma. (1.4. Állítás) Ismeretes (2.38. Állítás), hogy ekkor a (2.5.) rendszer (x_0, y_0) egyensúlyi helyzete centrum, vagy fókusz vagy center-fókusz. Meggondolható, hogy ez centrum. Ha a $\det H''(x,y) > 0$, akkor az (x_0, y_0) nem elfajult egyensúlyi helyzetben a $H(x,y)$ függvénynek lokális szélsőértékhelye van. A $H''(x_0, y_0)$ mátrix negatív vagy pozitív definit, ekkor $\partial_{11}H(x_0, y_0)$ elem nem nulla. A szélsőérték egy környezetében a szintvonalak zárt görbék, ekkor az (x_0, y_0) egyensúlyi helyzet centrum. Megmutatható, hogy Hamilton-rendszer esetén „működik" a linearizálás, azaz ha a linearizált rendszernek az origó centruma, akkor az egyensúlyi helyzetben a Hamilton-rendszernek is centruma van. ⊡

2.31. Megjegyzés: A Hamilton-rendszerek fontos speciális esete az

$$\ddot{x} + \mathrm{U}'(x) = 0 \qquad (2.6.)$$

mechanikai rendszer, ahol U C^1 függvény.

A megfelelő ekvivalens differenciálegyenlet-rendszer

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\,\mathrm{U}'(x). \end{aligned} \qquad (2.7.)$$

Látható, hogy a (2.7.) rendszer első integrálja a $\mathrm{V}(x,y) = \frac{y^2}{2} + \mathrm{U}(x)$ függvény. Így a rendszer trajektóriái a V függvény szintvonalain helyezkednek el. A (2.7.) egyenlet ekvivalens az $\ddot{x} = \mathrm{F}(x)$ rendszerrel, ahol F folytonos valós függvény.

Jelölje $\mathrm{T}(y) = \frac{1}{2}(\dot{x})^2 = \frac{y^2}{2}$ (mozgási energia) és $\mathrm{U}(x) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(t)dt$ (helyzeti energia).

Ekkor a teljes mechanikai energia: $\mathrm{V}(x,y) = \mathrm{T}(y) + \mathrm{U}(x)$ a (2.6.) első integrálja. ⊡

2.32. Megjegyzés: A (2.7.) rendszer Jacobi mátrixa viszonylag egyszerű szerkezetű:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\,\mathrm{U}''(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{J}} = 0$, így nem elfajult egyensúlyi helyzet csak nyereg vagy centrum típusú lehet.

Mivel $\det \underline{\underline{J}} = \mathrm{U}''(x)$,ezért,

a) ha az $(x_0, 0)$ egyensúlyi helyzetben $\mathrm{U}''(x_0) > 0$,akkor az $(x_0, 0)$ centrum,

b) ha az $(x_0, 0)$ egyensúlyi helyzetben $\mathrm{U}''(x_0) < 0$,akkor az $(x_0, 0)$ nyeregpont.

(A V Hamilton-függvény $\mathrm{U}''(x) > 0$ esetén $(x_0, 0)$-ban lokálisan konvex, míg $\mathrm{U}''(x) < 0$ esetén $(x_0, 0)$-ban indefinit.)

c) Elfajult esetben, ha x_0-ban az U-nak inflexiós pontja van, azaz U-nak az első nem nulla deriváltja páratlan rendű, akkor $(x_0, 0)$ egy ún. *csúcs* (*cups*) *hiperbolikus szektorral*. (2.33. ábra) ⊡

2.32. Ábra
Hiperbolikus szektor (topológiailag ekvivalens forma)

d) A 2.7. rendszer pályagörbéi az első tengelyre szimmetrikusak. ⊡

Fontosak azok a rendszerek, amelyben létezik első integrál.

2.33. Definíció: Az $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$ rendszer *konzervatív*, ha létezik $\mathrm{E}: D_{\underline{f}} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható tetszőleges nyílt halmazon nem konstans függvény, amely a rendszer pályáin konstans, azaz

$$\dot{\mathrm{E}}(\underline{x}(t)) = \frac{d}{dt}\mathrm{E}(\underline{x}(t) = \mathrm{E}'(\underline{x}(t)) \cdot \underline{\dot{x}}(t) = \mathrm{E}'(\underline{x}(t)) \cdot \underline{f}(\underline{x}(t) = 0.$$

2.34. Állítás: Konzervatív rendszerben egyensúlyi pont nem lehet aszimptotikusan stabilis.

2.35. Állítás: Ha az $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$ konzervatív rendszer esetén a rendszer első integráljának az $\underline{x}_0$ egyensúlyi pontban szigorú minimumhelye van, akkor $\underline{x}_0$ stabilis egyensúlyi helyzet.

2.36. Megjegyzés: A fenti állításban $n = 2$ esetben, ha $\underline{x}_0$ *izolált* egyensúlyi pont, akkor az $\underline{x}_0$ centrum. Nem izolált egyensúlyi pont esetén ez nem igaz. Az alábbi példa meggyőz minket erről:

$$\dot{x} = xy$$
$$\dot{y} = -x^2.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $\mathrm{E}(x, y) = x^2 + y^2$ első integrál, az origó nem izolált egyensúlyi helyzet, valamint az $\mathrm{E}(x, y)$ függvénynek az origóban szigorú minimumhelye van. Viszont az origó nem centrum! ⊡

2.37. Megjegyzés: A vektormező szimmetriái segíthetnek a pályagörbék lokális vizsgálatában. Előfordulhat, hogy a pályák szimmetrikusak egy, az egyensúlyi helyzeten áthaladó tengelyre, síkra vagy az egyensúlyi helyzetre. Ezt a megoldások ismerete nélkül is be lehet bizonyítani.
Tekintsük egy általános $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ autonóm rendszert. Legyen $\mathbb{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az a tükrözés, amely a pályákat önmagukba képezi az idő visszafordításával, azaz ekkor egy $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részét a $\mathbb{T}$ leképezés a $\mathbb{T}(\underline{p})$ pontból induló pálya negatív értékekhez tartozó részére képezi. Így fennáll minden t esetén az alábbi azonosság:

$$\underline{x}(-t, \mathbb{T}(\underline{p})) = \mathbb{T}(\underline{x}(t, \underline{p})).$$

Ezt t szerint deriválva, majd $t = 0$ esetben: $-\underline{f}(\mathbb{T}(\underline{p})) = \mathbb{T}'(\underline{p}) \cdot \underline{f}(\underline{p})$.
Ez utóbbi ellenőrzéséhez nem kell a megoldások ismerete.

I. Kétdimenzióban, a függőleges tengelyre való tükrözés a $\mathbb{T}(x; y) = (-x, y)$ leképezés. A derivált mátrixa

$$\mathbb{T}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Így az $\dot{x} = f_1(x, y), \dot{y} = f_2(x, y)$ rendszer pályái a *függőleges tengelyre szimmetrikusak az idő megfordításával*, ha $f_1(-x, y) = f_1(x, y)$ és $-f_2(-x, y) = f_2(x, y)$. Ez esetben a rendszer invariáns a $(t, x) \to (-t, -x)$ transzformációra. Ha $(x(t), y(t))$ megoldás, akkor az $\big(-x(-t), y(-t)\big)$ is megoldás.
II. Kétdimenzióban, a vízszintes tengelyre való tükrözés a $\mathbb{T}(x; y) = (x, -y)$ leképezés. A derivált mátrixa

$$\mathbb{T}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Így az $\dot{x} = f_1(x,y), \dot{y} = f_2(x,y)$ rendszer pályái a *vízszintes tengelyre szimmetrikusak az idő megfordításával*, ha $f_1(x,-y) = -f_1(x,y)$ és $f_2(x,-y) = f_2(x,y)$. Ez esetben a rendszer invariáns a $(t,y) \to (-t,-y)$ transzformációra. Ha $(x(t),y(t))$ megoldás, akkor az $(x(-t),-y(-t))$ is megoldás.

Például, tekintsük az

$$m\ddot{x} = F(x)$$

mechanikai rendszert. Világos, hogy a fenti rendszer invariáns a $t \to -t$ transzformációra ($\ddot{x}$ változatlan marad) és a fentivel ekvivalens

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \frac{1}{m}F(x)$$

rendszer invariáns $(t,y) \to (-t,-y)$ transzformációra. (Például a matematikai inga esetén, mint egy filmet visszafelé nézve, nem látunk különbséget.)

III. Megadható az origóra szimmetrikus pálya tulajdonsága is.

Ekkor egy $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részét a $\mathbb{T}$ leképezés a $\mathbb{T}(\underline{p})$ pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részére képezi, így fennáll a $\underline{x}(t,\mathbb{T}(\underline{p})) = \mathbb{T}(\underline{x}(t,\underline{p}))$ azonosság minden t esetén. Ezt t szerint deriválva, majd $t=0$ esetben:

$$\underline{f}(\mathbb{T}(\underline{p})) = \mathbb{T}'(\underline{p}) \cdot \underline{f}(\underline{p}).$$

Ez utóbbi ellenőrzéséhez sem kell a megoldások ismerete.

Kétdimenzióban, az origóra való tükrözés a $\mathbb{T}(x;y) = (-x;-y)$ leképezés. A derivált mátrixa

$$\mathbb{T}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Így az $\dot{x} = f_1(x,y)$, $\dot{y} = f_2(x,y)$ rendszer pályái az *origóra szimmetrikusak*, ha

$$f_1(-x,-y) = -f_1(x,y) \text{ és } f_2(-x,-y) = -f_2(x,y).$$

Ez esetben a rendszer invariáns a $(t,x,y) \to (-t,-x,-y)$ transzformációra. Ha $(x(t),y(t))$ megoldás, akkor az $\big(-x(-t),-y(-t)\big)$ is megoldás. □

<u>2.38. Állítás</u>: Legyen adott egy $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm differenciálegyenlet-rendszer, ahol $\underline{f} \in C^1$ egy síkbeli nyílt halmazon, valamint $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$. Tegyük fel továbbá, hogy az origó a linearizált rendszernek centruma. Ekkor az origó az eredeti rendszernek vagy centruma,vagy ún. centrum-fókusza (3.53. feladat) vagy fókusza.

Megmutatható (Dulac 1923.), hogy síkbeli analitikus rendszernek nem lehetséges végtelen sok határciklusa, így teljesül a 2.38. Állítás élesítése is.

<u>2.39. Állítás</u>: Legyen adott egy $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm differenciálegyenlet-rendszer, Tegyük fel, hogy az $\underline{f}$ vektormező *analitikus* egy síkbeli nyílt halmazon és $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$. Ha az origó a linearizált rendszernek centruma, akkor az origó az eredeti rendszernek vagy centruma vagy fókusza.

Nagyon fontos a 2.38. állítás következménye:

<u>2.40. Következmény</u>: Legyen adott egy $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm differenciálegyenlet-rendszer, ahol $\underline{f} \in C^1$ egy $E \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli nyílt halmazon. Tegyük fel, hogy

a) $P(x_0,0) \in E$ ($P(0,y_0) \in E$) izolált egyensúlyi helyzet,

b) $\underline{f}'(P(x_0,0))$ ($\underline{f}'(P(0,y_0))$) Jacobi-mátrix tiszta képzetes sajátértékű kritikus mátrix, így az origó a linearizált rendszernek a centruma,

c) a rendszer pályái a vízszintes (függőleges) tengelyre szimmetrikusak az idő megfordításával.

Ekkor a $P(x_0,0)$ ($P(0,y_0)$) egyensúlyi helyzet a nemlineáris rendszernek is centruma, azaz van olyan környezete, amelyben minden megoldás periodikus.

<u>2.41. Megjegyzés</u>: Ljapunov-függvény konstruktív megadási módja lineáris rendszerek esetén. **I**.

Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszert és legyen $\mathrm{V}(\underline{x}) := < \underline{x}, \underline{\underline{P}}\,\underline{x} > = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ egy pozitív definit és szimmetrikus mátrix. Ekkor minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor esetén $\mathrm{V}(\underline{x}) > 0$. Mivel $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{x} = -\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{x}$, ezért a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit (minden sajátértéke negatív), ha létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. *Ljapunov-egyenlet*: $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$. $(*)$ Megmutatható, hogy az origó a rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete pontosan akkor, ha a Ljapunov-egyenletnek van megoldása. ⊡

Ezt mondja ki az alábbi

2.42. Állítás: A következő állítások ekvivalensek:

1. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ teljesül a mátrix minden sajátértékére.

2. Van olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amely esetén a $(*)$ Ljapunov egyenletnek létezik $\underline{\underline{P}}$ pozitív definit mátrix megoldása.

3. Minden $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix esetén a $(*)$ Ljapunov egyenletnek létezik $\underline{\underline{P}}$ pozitív definit mátrix megoldása a következő alakban:

$$\underline{\underline{P}} = \int_0^\infty e^{\underline{\underline{A}}^T t} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot e^{\underline{\underline{A}} t} dt.$$

2.43. Megjegyzés: Ljapunov-függvény konstruktív megadási módja lineáris rendszerek esetén. **II**.
Lineáris rendszerek esetén más lehetőség is van Ljapunov-függvény megadási módjára.
Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) \qquad (*)$$

lineáris rendszert, ahol $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, .. n)$ $n \times n$-es adott mátrix. Tegyük fel, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix összes sajátértékének a valós része negatív, így az origó aszimptotikusa stabilis.
Jelölje a $\underline{x}(0) = \underline{x}$ kezdeti érték feltétel teljesítő megoldást $\underline{\varphi}(t, \underline{x})$ és jelölje $\underline{\varphi_i}(t)$ a $(*)$ egyenlet $\underline{\varphi_i}(0) = \underline{e_i}$ feltételhez tartozó megoldását, ahol $\underline{e_i} = (0, 0, 0, \ldots .1, 0, 00)$.
Világos, hogy ekkor $\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \underline{\varphi_i}(t)$, ahol $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$. $\qquad (**)$
Definiáljuk a Ljapunov-függvényt: $\mathrm{V}(\underline{x}) := \int_0^\infty |\underline{\varphi}(t, \underline{x})|^2 dt$.
A fenti V függvény pozitív definit, ugyanis $\underline{x} \neq 0$ esetén $\mathrm{V}(\underline{x}) > 0$. A feltétel szerint az 1.2. Megjegyzés alapján a megoldások exponenciális sebességgel közelednek a nulla megoldáshoz, ezért $|\underline{\varphi}(t, \underline{x})| \leq K|\underline{x}|e^{-\propto t}$ minden $t > 0$ esetén, ahol K, $\propto > 0$ adott számok. Következésképpen a fenti improprius integrál konvergens. Mivel

$$\mathrm{V}(\underline{\varphi}(t, \underline{x})) = \int_t^\infty |\underline{\varphi}(t, \underline{x})|^2 d\tau, \text{ így}$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \frac{d}{dt}\, \dot{\mathrm{V}}(\underline{\varphi}(t, \underline{x}))\Big|_{t=0} = -|\underline{\varphi}(t, \underline{x}))|^2{}_{t=0} = -\,|\underline{x}|^2 < 0, \text{ha } \underline{x} \neq \underline{0}. \qquad (***)$$

Következésképpen a fent definiált $\mathrm{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény Ljapunov-függvény.
Az is igaz, hogy létezik $\beta > 0$ szám, hogy $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) < -\,\beta\, \mathrm{V}(\underline{x})$ minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ esetén. ⊡

2.44. Megjegyzés: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x})$ kvázilineáris rendszert.

Tételezzük fel, hogy $\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{0}$ és $\underline{g}(\underline{0}) = \underline{0}$. Tegyük fel, hogy az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete a linearizált rendszernek. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit szimmetrikus mátrix, amely adott $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit szimmetrikus mátrixhoz tartozik, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{x} + 2\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{g}(\underline{x})$. $(*)$
A feltevés szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $\underline{x} \in S(\underline{0}, \delta)$-re

$$|\underline{g}(\underline{x})| \leq \varepsilon |\underline{x}|.$$

Így $\underline{x} \in S(\underline{0}, \delta)$ esetén $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) \leq -(\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}}) - 2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon)|\underline{x}|^2$. Elegendően kicsi ε-ra

$\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}}) - 2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon > 0$, ezért ilyen ε-ra az $S(\underline{0},\delta)$-n a $\mathrm{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$ függvény pozitív definit és a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit, azaz $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$, ahol $\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}})}{2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})}$. Az egy origó attraktivitási tartománya: $T \supset \{\underline{x}\colon \mathrm{V}(\underline{x}) < r\}$, ahol $r = \max\{\mathrm{V}(\underline{x})\colon\ \underline{x} \in S(\underline{0},\delta)\}$. ⊡

2.45. Megjegyzés: Speciális autonóm rendszer esetén is meg lehet konstruktívan adni Ljapunov-függvényt. (*Kraszovszkij-módszer*)
Tekintsük a továbbiakban az

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \tag{2.8.}$$

egy olyan n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{f} \in C^1(D), \underline{0} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy a rendszer egyensúlyi helyzete az origó, valamint, hogy az $\underline{f}'(\underline{x}) =: \underline{\underline{A}}(\underline{x})$ deriválttenzor mátrixára teljesül, hogy az $F(\underline{x}) := \underline{\underline{A}}(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}^T(\underline{x})$ negatív definit minden $\underline{x} \in D$ esetén. Ekkor az origó lokálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet és a $\mathrm{V}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}),\ \underline{x} \in D$ a rendszer egy Ljapunov-függvénye lesz. Ha ezenkívül $D = \mathbb{R}^n$, és a $\mathrm{V}(\underline{x})$ radiálisan nem korlátos, akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. A $\mathrm{V}(\underline{x})$ a feltételek miatt pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot (\underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}(\underline{x})) \cdot \underline{f}(\underline{x})$. Mivel a feltevés szerint az $\underline{\underline{A}}(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}^T(\underline{x})$ negatív definit, ezért a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit. ⊡

2.46. Megjegyzés: A 2.45. Megjegyzésben látottak általánosíthatók autonóm rendszer esetén. (*Általánosított Kraszovszkij-módszer*) Tekintsük a továbbiakban az

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \tag{2.9.}$$

egy olyan n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{f} \in C^1(D), \underline{0} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete az origó, és jelölje $\underline{f}'(\underline{x}) := \underline{\underline{A}}(\underline{x})$ az $\underline{f}$ vektormező deriválttenzorának mátrixát minden $\underline{x} \in D$ esetén. Legyen $\underline{\underline{P}}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix.
Jelölje $\mathrm{V}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{f}(\underline{x}),\ \underline{x} \in D$. A $\mathrm{V}(\underline{x})$ a feltételek miatt pozitív definit és

$$\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot (\underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x})) \cdot \underline{f}(\underline{x}).$$

Jelölje

$$\underline{\underline{Q}}(\underline{x}) := \underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}).$$

Világos, hogy ha létezik olyan $\underline{\underline{P}}$ pozitív definit, szimmetrikus mátrix, amelyre a fenti $\underline{\underline{Q}}(\underline{x})$ mátrix negatív definit minden $\underline{x} \in D$ esetén, akkor a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit minden $\underline{x} \in D$-re. Így az origó 2.9. rendszernek aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete. Ha $\underline{\underline{P}}$ egységmátrix, akkor a 2.45. ennek a speciális esete. ⊡

2.47. Megjegyzés: Ljapunov-függvény megadási módja a *gradiens módszerrel*.
Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ (2.1.) n-dimenziós differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{f} \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ egyszeresen összefüggő tartomány és az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet.
Legyen $\mathrm{V}(\underline{x})$ a rendszer egy alkalmas Ljapunov-függvénye.
Jelölje $\underline{g}(\underline{x}) := \operatorname{grad} \mathrm{V}(\underline{x})$. Ekkor természetesen $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{g}^T(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x})$.
A továbbiakban az a célunk, hogy megválasztjuk a $\underline{g}$ függvényt, hogy a $\mathrm{V}(\underline{x})$ pozitív definit és a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit legyen. Világos, hogy a $\underline{g}$ vektormező potenciálos, így a $\underline{g}$ rotációmentessége miatt a $\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}$ deriválttenzor mátrixa szimmetrikus, azaz minden $i, j = 1, 2, \dots n$-re $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$.
Mivel a fentiek miatt a $\underline{g}$ vektormező konzervatív is, így a $\mathrm{V}(\underline{x})$ megadható az alábbi vonalintegrállal is $\mathrm{V}(\underline{x}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} \underline{g}(\underline{u}) d\underline{u}$. A fenti vonalintegrálban a görbe a $\underline{0}$-tól $\underline{x}$-ig terjedő tetszőleges görbe, így speciálisan a tengelyekkel párhuzamosan is integrálhatunk:

$$\mathrm{V}(\underline{x}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} \sum_{i=1}^{n} g_i(\underline{u})\, du_i = \int_0^{x_1} g_1(u_1, 0, \dots, 0) du_1 + \int_0^{x_2} (g_2(x_1, u_2, 0, \dots, 0) du_2 + \cdots +$$
$$+ \int_0^{x_n} (g_n(x_1, x_2, \dots, u_n) du_n, \text{ ahol } \underline{g} = (g_1, g_2, \dots g_n)^T.$$

A fenti módszer sok esetben reménykeltő lehet, ezt egy példával illusztráljuk.
Példa: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -h(x) - ay,$$

ahol $h \in C^1$, $h(0) = 0, xh(x) > 0$, ha $x \neq 0$, $x \in (-d, c)$ $(c, d > 0)$ és $a > 0$.
(Ez a matematikai inga általánosításaként is felfogható mechanikai rendszer.)
A fentiek szerint fogunk eljárni. Világos, hogy a rendszernek az origó egyensúlyi helyzete.
Legyen

$$\underline{g}(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))^T := \begin{pmatrix} \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y \\ \gamma(x,y)x + \delta(x,y)y \end{pmatrix},$$

ahol $\alpha(x,y), \beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$ és $\delta(x,y)$ később meghatározandó folytonosan differenciálható skalármezők. Mivel a $\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}$ deriválttenzor mátrixa szimmetrikus, ezért

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y)x + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)y + \beta(x,y) = \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x,y)x + \gamma(x,y) + \frac{\partial \delta}{\partial x}(x,y)y. \quad (*)$$

Legyen a továbbiakban

$$\alpha(x,y) := \alpha(x), \beta(x,y) := \beta, \gamma(x,y) := \gamma, \delta(x,y) := \delta.$$

A $(*)$ miatt $\beta = \gamma$. Így

$$\dot{V}(x,y) = (\alpha(x)x - \delta h(x) - a\beta x)y - (a\delta - \beta)y^2 - \beta h(x)x.$$

Legyen

$$\alpha(x)x - \delta h(x) - a\beta x := 0.$$

Ekkor

$$\dot{V}(x,y) = -(a\delta - \beta)y^2 - \beta h(x)x.$$

Továbbá

$$V(x,y) = \int_0^x (\alpha(u)u + \beta y)d\underline{u} + \int_0^y (\beta x + \delta u)d\underline{u} =$$
$$= \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} a\beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta \int_0^x h(u)du.$$

Legyen

$\delta > 0$, $0 < \beta < a\delta$, például $\beta := ka\delta$, ahol $0 < k < 1$.

Ekkor a fentiek értelmében a $\begin{pmatrix} a\beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2k\delta & ka\delta \\ ka\delta & \delta \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit, így a $V(x,y)$ is az. Világos, hogy a $\dot{V}(x,y) = -(a\delta - \beta)y^2 - \beta h(x)x = -(a\delta - ka\delta)y^2 - \beta h(x)x$ negatív definit. Következésképpen az origó lokálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet és az origó egy vonzási halmaza $M = \{(x,y) : x \in (-e, e)\}$, ahol $e = \min\{|d|, |c|\}$.

Általában linearizálással az origó stabilitása nem dönthető el. ⊡

2. Feladatok

2.1. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = x^2$ differenciálegyenlet $x = 0$ megoldásának stabilitását!

2.2. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = (1-x)x$ egyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitását! Aszimptotikus stabilitás esetén határozzuk meg a vonzási tartományt!

2.3. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = (x-1)x(x+1)^2$ egyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitását! Aszimptotikus stabilitás esetén határozzuk meg a vonzási tartományt!

2.4. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = x - x^3$ egyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitását! Aszimptotikus stabilitás esetén határozzuk meg a vonzási tartományt!

2.5. feladat: (Megoldás) Lehetséges-e egy differenciálegyenletnek olyan instabilis egyensúlya, amelynek a környezetéből induló *minden* megoldás mégis korlátos?

Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenleteknek a fázisportréit!

2.6. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - k\dot{x} = 0$ (k valós paraméter)

2.7. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - 2x\dot{x} = 0$

2.8. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + x\,\mathrm{sign}x = 0$

Az alábbi feladatokban vizsgáljuk meg az origó, mint egyensúlyi helyzet típusát a stabilitás szempontjából!

2.9. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = 2xy - x + y$$
$$\dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y$$

2.10. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x^2 + y^2 - 2x$$
$$\dot{y} = 3x^2 - x + 3y$$

2.11. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x$$
$$\dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y$$

2.12. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = xy + x$$
$$\dot{y} = x^2 - y$$

2.13. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = xy - y + x$$
$$\dot{y} = 3x - 2y - xy$$

2.14. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x + x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = y - xy$$

2.15. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = 2x + y + xy^3$$
$$\dot{y} = x - 2y - xy$$

2.16. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -y\sqrt{1-x^2} \qquad |x| < 1$$
$$\dot{y} = x\sqrt{1-x^2}$$

2.17. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = \sin y$
$\dot{y} = -\sin x$

Az alábbi feladatokban vizsgáljuk meg egyensúlyi helyzetek típusát a stabilitás szempontjából!

2.18. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + y$
$\dot{y} = x + y^2$

2.19. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - xy$
$\dot{y} = x - y^3$

2.20. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - y$
$\dot{y} = x^2 - y^2$

2.21. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - xy$
$\dot{y} = x^2 - y$

2.22. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy - x$
$\dot{y} = xy - y$

2.23. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - x^2 - xy$
$\dot{y} = 3y - xy - 2y^2$

2.24. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + xy$
$\dot{y} = x^2 - y$

2.25. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + 2xy^2$
$\dot{y} = -2y + 4x^2y$

2.26. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^3 + y$
$\dot{y} = x + y^3$

2.27. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x + xy^2$
$\dot{y} = -4y$

2.28. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -\sin x - 3y$

2.29. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y^2 - 1$
$\dot{y} = x^2 + y^2 - 2$

2.30. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^2 + y^2 - 25$
$\dot{y} = xy - 12$

2.31. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y$
$\dot{y} = x^3 - x + xy$

2.32. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - y$
$\dot{y} = x + y - 2xy$

2.33. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - xy$
$\dot{y} = (x-1)y$

2.34. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x^3 - x - y$

2.35. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x(1 - x - y)$
$\dot{y} = y(3 - x - \frac{3}{2}y)$

2.36. feladat: (Megoldás) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet egyensúlyi helyzetének stabilitását:

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = \ddot{x}x + \ddot{x}\dot{x}$$

2.37[*]. feladat: (Megoldás) Határozzuk meg az origóban a linearizált rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének a dimenzióját! (Lorenz-rendszer)

$\dot{x} = \alpha(y - x)$
$\dot{y} = \beta x - y - xz$ $\quad$ (α, β és $\gamma > 0$)
$\dot{z} = -\gamma z + xy$

Határozzuk meg a linearizált rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének a dimenzióját az egyensúlyi helyzetekben!

2.38. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y + z$
$\dot{y} = x^2 - 2y$
$\dot{z} = x + y$

2.39. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy$
$\dot{y} = x + y$
$\dot{z} = x + z$

2.40. feladat. (Megoldás) $\dot{x} = x + y + 1$
$\dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}$

2.41. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = z$
$\dot{z} = x^2 - yz - 1$

Vizsgáljuk az alábbi autonóm rendszerek globális fázisképét!

2.42[*]. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - x^3 - xy^2 - y$
$\dot{y} = y - x^2y - y^3 + x$

2.43[*]. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y - xy^2 - x^3$
$\dot{y} = x - y^3 - x^2y$

2.44[*]. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y + x - x^3 - xy^2$
$\dot{y} = y - x - y^3 - x^2y$

2.45[*]. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 - y$
$\dot{y} = y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + x$

2.46*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2) - y$
$\dot{y} = y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right) + x$

2.47*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xf\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - y$
$\dot{y} = yf\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x$, ahol $f \in C(\mathbb{R})$

2.48*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - xy$ (Lotka-Volterra-féle populációdinamikai modell)
$\dot{y} = xy - y$

2.49. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = xy - y$

2.50. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y^3$
$\dot{y} = x^3$

2.51*. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} = -x - \alpha x^3$ $(\alpha > 0)$

2.52. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + kx = 0$ (Csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás) ($k > 0$)

2.53. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -y^2 - x$

2.54. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + e^x = k$ (k valós paraméter)

2.55. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - e^x = k$ (k valós paraméter)

2.56*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x^4 - x^2$

2.57. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x\sqrt{x^2+y^2} - y$
$\dot{y} = -y\sqrt{x^2+y^2} + x$

2.58*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$
$\dot{y} = 2x$

2.59. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása!
$\dot{x} = y^5$
$\dot{y} = -x^3$

Vizsgáljuk az alábbi Hamilton-rendszerek egyensúlyi helyzeteinek a típusát!

2.60. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -2x^3$

2.61. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$
$\dot{y} = 2xy$

2.62. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = 2x - 2x^3$

2.63. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -x^3 - x$

2.64. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = (2\cos x - 1)\sin x$

Alkalmas Ljapunov-függvény segítségével döntsük el az origó stabilitását!

2.65. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^3 - y$
$\dot{y} = x + y^3$

2.66. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y^3 - x^5$
$\dot{y} = -x - y^3 + y^5$

2.67. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy^2 - x^3$
$\dot{y} = -y^3 - 2x^2y$

2.68. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -xy^4$
$\dot{y} = x^6y$

2.69. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy + x^3$
$\dot{y} = -y + y^2 - x^3 + x^4$

2.70*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y^5 - x^3$
$\dot{y} = -2xy^2$

2.71*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y - x^3$
$\dot{y} = -x^3$

2.72. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y - x - y^3$
$\dot{y} = x - 2y$

2.73. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y - x^3$
$\dot{y} = x - y^3$

2.74. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x^3 + xy^2$
$\dot{y} = -2x^2y - y^3$

2.75*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x^3 + 2y^3$
$\dot{y} = -2xy^2$

2.76*.feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, ahol az f és g differenciálható függvények, valamint minden $x \neq 0$ esetén $f(x) > 0$ és $xg(x) > 0$ (ún. Liénard-egyenlet speciális esete)

2.77. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -xy^4$
$\dot{y} = x^4y$

2.78. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x - 2y^2$
$\dot{y} = xy - y^3$

2.79. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^2 + y^2$
$\dot{y} = x + y$

2.80*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x^3 + y^4$
$\dot{y} = -y^3 + y^4$

2.81*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y - \sin^3 x$
$\dot{y} = -4x - \sin^3 y$

2.82. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y - x + x^2$
$\dot{y} = -x$

2.83. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xP(x, y)$
$\dot{y} = yQ(x, y)$, ahol a P és Q az origó egy környezetében folytonos negatív függvények.

2.84*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -h(x, y)y - x$, ahol a $h > 0$ folytonos függvény az origó egy környezetében.

2.85. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 3y^4 - 2x^4$
$\dot{y} = 5x^2 y + 3y$

2.86*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y^3 + x^2 y$
$\dot{y} = x^3 - xy^2$

2.87*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x - y\sin x$

2.88. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2)$
$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$

2.89*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^2 - y^2$
$\dot{y} = -2xy$

2.90. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy + x^3$
$\dot{y} = -y + y^3 + x^4$

2.91. feladat: (Megoldás) Határozzuk meg az alábbi rendszerben az origó stabilitását, ha α valós paraméter!

$$\dot{x} = \alpha x - y + x^3$$
$$\dot{y} = x + \alpha y + y^3$$

2.92. feladat: (Megoldás) Megfelelően választott Ljapunov-függvény segítségével határozzuk meg, hogy az origó milyen k paraméter esetén lesz stabilis, aszimptotikusan stabilis, illetve instabilis!

$$\dot{x} = y + kx(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

2.93*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a > 0$ szám esetén az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása!

$$\ddot{x} - ax\,\dot{x} + x = 0$$

2.94. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek az azonosan nulla megoldása stabilis, de minden más megoldása instabilis!

$$\dot{x} = -y(x^2+y^2)$$
$$\dot{y} = x(x^2+y^2)$$

2.95*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\begin{array}{l}\dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x,y)\end{array}$ rendszert. Tegyük fel, hogy

1. $f(0,0) = 0$,
2. $(f(x,y) - f(x,0))y \le 0$,
3. $\int_0^x f(t,0)dt < 0$ az origó egy környezetében.

Mutassuk meg, hogy a fenti feltételek fennállása esetén az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ megoldás stabilis!

2.96. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az origó stabilis egyensúlyi helyzete az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\ddot{x} = -x^3 - x^2\,\dot{x}$$

2.97*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az origó stabilis egyensúlyi helyzete az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\ddot{x} = -x + x^3 - x^2\,\dot{x}$$

2.98*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\begin{array}{l}\dot{x} = -ax + bf(y) \\ \dot{y} = cx - df(y)\end{array}$ rendszert. Tegyük fel, hogy

1. $f(0) = 0$,
2. $yf(y) > 0$, ha $y \ne 0$,
3. a, b, c és d olyan pozitív számok, amelyre $ad > bc$.

Mutassuk meg, hogy a fenti feltételek fennállása esetén az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ megoldás aszimptotikusan stabilis!

Vizsgáljuk az alábbi rendszereket!

2.99. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = 2xy$$
$$\dot{y} = x^2 - y^2$$

2.100*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{r} = r(1-r) \qquad \varphi$$
$$\dot{\varphi} = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

2.101*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$\dot{y} = y\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

2.102. feladat: (Megoldás)

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l}\sin\Theta - \frac{k}{m}\dot{\Theta}$$

(Az ingamozgás súrlódó közegben: Θ a kitérés szöge, m a test tömege, l az inga hossza és k a sebességgel arányos súrlódási erő)

2.103*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = -x + 2x^2y - y^3$$

2.104*. feladat: (Megoldás) (Vinograd-példa)

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x)+y^5}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}$$

$$\dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}$$

2.105. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = ky - xy$ (k valós paraméter)

$$\dot{y} = -kx + x^2$$

2.106. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^3 + 2xy^2$$
$$\dot{y} = y^3$$

2.107. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek a triviális megoldáson kívüli minden megoldása véges időn belül nem korlátos lesz! Adjuk meg ezt az időt a (1,0) kezdőpontból induló megoldás esetén, ha $t_0 = 0$!

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$$

2.108. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása, de nincs határciklusa!

$$\dot{x} = -y + xy$$
$$\dot{y} = x + \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

2.109*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y - y^3$$
$$\dot{y} = -x - y^2$$

2.110*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -y - x^2$$
$$\dot{y} = x$$

2.111. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert! (Brüsszelátor-modell)

$$\dot{x} = x(1 - y^2)$$
$$\dot{y} = y(xy - 1)$$

2.112. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = 2xy$$

2.113*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - y(1 - x^2)$$

2.114*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -8x - xy^2 - 3y^3$$
$$\dot{y} = -2x^2y + 2xy^2$$

2.115. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x + 2x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = -y + y^2$$

2.116*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -2x + y + x^3y^2$$
$$\dot{y} = -x - 2y + x^2y^3$$

2.117*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - 2y - x^3$$

2.118*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = -2y + x^2$$

2.119. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -3y$$
$$\dot{y} = x - \alpha(2y^3 - y), \text{ ahol } \alpha < 0.$$

2.120. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x - y$$
$$\dot{y} = 2x - y + y^3$$

2.121. feladat: (Megoldás) Csetajev-tételt alkalmazva, mutassuk meg, hogy az origó instabilis egyensúlyi helyzete az alábbi rendszernek!

$$\dot{x} = x^3 + y$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

2.122. feladat: (Megoldás) Csetajev-tételt alkalmazva, mutassuk meg, hogy az origó instabilis egyensúlyi helyzete az alábbi rendszernek!

$$\dot{x} = x + y$$
$$\dot{y} = x - y + xy^2$$

2.123. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x+y^2$$
$$\dot{y} = -2y + 3y^2$$

2.124. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = x(y^2 - 1)$$
$$\dot{y} = -y(x^2 - 1)$$

2.125. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a lineáris rendszerek esetében definiált csomópont, fókuszpont, örvénypont és nyeregpont teljesíti a 2.27. Definíció feltételét!

2.126. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = xy - x$$
$$\dot{y} = xy - y$$

2.127. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x - 3y + 2z + yz$$
$$\dot{y} = 3x - y - z + xz$$
$$\dot{z} = -2x + y - z + xy$$

2.128. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó vonzási halmazát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\alpha x^3 - \beta y \quad (\alpha, \beta > 0)$$

2.129*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását!

$$\dot{x} = -4y + x^2$$
$$\dot{y} = 4x + y^2$$

2.130. feladat: (Megoldás) Adjunk példát olyan rendszerre, ahol az origó stabilis egyensúlyi helyzet, de a linearizált rendszer instabilis.

2.131*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását!

$$\dot{x} = -y - xy^2$$
$$\dot{y} = x - x^4 y$$

2.132. feladat: (Megoldás) Adjuk meg a rendszer egy alkalmas Ljapunov-függvényét!

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = x - y$$

2.133. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy Hamilton-rendszer esetén „működik" a linearizálás, azaz ha a linearizált rendszernek az origó centruma, akkor az egyensúlyi helyzetben a Hamilton-rendszernek is centruma van.

2.134. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = y - x^3,\ \ \dot{y} = -x - 2y + 2x^3$$

2.135. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $f(0) = 0$, és $xf(x) > 0$, akkor az $\dot{x} = -f(x)$ rendszer $x = 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis!

2.136. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = -x,\ \ \dot{y} = -x - y - y^5$$

2.137. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy ha az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T$ pozitív definit mátrix, akkor az $\underline{\underline{A}}$ Hurvitz-mátrix.

2.138. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = xy^4 - 2x^3 - y,\ \ \dot{y} = 2x + 2x^2y^3 - y^7$$

2.139*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = -x^3y^2, \dot{y} = -2x^2y^3$$

2.140*. feladat: (Megoldás): Adjunk meg egy olyan autonóm rendszert, amelyben az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet, és létezik olyan $V:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, **2.** $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$,

de ennek ellenére az origó nem lesz globálisan aszimptotikusan stabilis.

2.141. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszer egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabilis!

$$\dot{x} = -xy$$
$$\dot{y} = \omega(1 - ay) \quad (a, \omega > 0)$$

2.142. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egyensúlyi helyzetét!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\frac{x}{1+y^2}$$

Kétdimenziós autonóm periodikus rendszerek

Kétdimenzióban megmutatható, hogy minden pálya $t \to \infty$ esetén vagy egyensúlyi helyzethez vagy egy periodikus pályához vagy egyensúlyi helyzeteket összekötő ún. homoklinikus-heteroklinikus pályák láncolatához tart. (Ez magasabb dimenzióban már nem teljesül, itt már felléphet a ún. *káosz*.)

3.1. Definíció: Az $\underline{x}_0$ pont *periodikus pont*, ha létezik $p > 0$, amelyre $\underline{x}(t + p, \underline{x}_0) = \underline{x}(t, \underline{x}_0)$ minden t valós számra. Egy periodikus pont pályáját *periodikus pályának* nevezzük. Feltehető, hogy p a legkisebb periódus. (→ 3.3. Megjegyzés a).)

3.2. Definíció: A $K \subset \mathbb{R}^2$ *pozitívan invariáns*, ha minden $t \geq 0$ és $\underline{x}_0 \in K$ esetén $\underline{x}(t, \underline{x}_0) \in K$.

3.3. Megjegyzések: **a**) Nem konstans periodikus megoldásnak létezik legkisebb periódusa.
b) Ha $t_1 < t_2$-re $\underline{x}(t_1, \underline{x}_0) = \underline{x}(t_2, \underline{x}_0)$, azaz ha a megoldások metszik egymást, akkor $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ konstans, vagy $p = t_2 - t_1$ periódussal egy periodikus megoldás.
c) Periodikus megoldás pályája zárt pálya, egy ún. zárt *Jordan-görbe*. ⊡

Ha K egy pozitívan invariáns kompakt halmaz, azaz a pályák mindenütt befelé mennek és nincsen a K-ban egyensúlyi helyzet, akkor kell, hogy legyen benne periodikus pálya.
3.4. Állítás: (Poincaré-Bendixson tétel – gyenge alak) (1901) Ha $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^2$ adott kompakt, pozitívan invariáns halmaz és nincsen a K-ban egyensúlyi helyzet, akkor van a K-ban periodikus pálya.

Megjegyzés: A 3.4. Tételben szükséges, hogy K olyan kompakt halmaz, amelyben nincs egyensúlyi helyzet. Ugyanis,
1. Legyen $K = \mathbb{R}^2$ és $\dot{x} = 1, \dot{y} = 1$. Ekkor K pozitívan invariáns és nem tartalmaz periodikus pályát.
2. Legyen K origó körüli (zárt) körlemez és $\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$. Ez sem tartalmaz periodikus pályát.
3. A K zártsága is fontos, tekintsük a 2.-t, ahol a K origótól megfosztott, origó körüli körlemez. Ekkor K pozitívan invariáns, nem zárt és nem tartalmaz periodikus pályát. ⊡

3.5. Állítás: (Bendixson-kritérium) Ha a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszer esetén a div $\underline{f}$ állandó előjelű egy T egyszeresen összefüggő síkbeli nyílt halmazon és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, akkor a rendszernek nincs olyan periodikus pályája, amely teljesen a T-ben fekszik.

Ha egy mennyiség szigorúan monoton csökken vagy nő, akkor nem létezhet periodikus pályája.
3.6. Állítás: Ha létezik olyan $V: T \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amely mentén a trajektóriák szigorú monoton nőnek vagy csökkennek, azaz $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$, illetve $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, akkor rendszernek nincs T-ben periodikus pályája.

Periodikus pálya nemlétezésének bizonyításához hasznos lehet még a Bendixson-Dulac teszt is.
3.7. Állítás: Ha a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszer esetén létezik olyan $g: T \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény a T egyszeresen összefüggő síkbeli nyílt halmazon, amelyre div $(\underline{f} \cdot g)$ állandó előjelű és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, akkor nincs a rendszernek olyan periodikus pályája, amely teljesen a T-ben fekszik.

Periodikus pálya létezésének egyértelműségére hasznos lehet az alábbi
3.8. Állítás: (Dulac) Ha a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszer esetén létezik olyan $g: A \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény egy A *gyűrűszerű* síkbeli nyílt halmazon, amelyre a div $(\underline{f} \cdot g)$ állandó előjelű és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, akkor a rendszernek legfeljebb egy határciklusa lehet, amely teljesen a A-ben fekszik.

Bevezetjük a kétdimenziós rendszerek globális vizsgálatának hasznos segédeszközét, a vektormező ún. *Poincaré-indexét*. Tekintsük a $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszert. Miközben egy pont *pozitív körüljárási irányban* körbejárja az adott $\gamma = \{\underline{x}(t): t \in [a,b]\}$ egyszerű, azaz önmagát nem metsző, és zárt görbét, a vektormező vektora folytonosan elcsavarodik. Ekkor a γ minden (x,y) pontjában az $\underline{\dot{x}} = (\dot{x},\dot{y})$ vektormező egy jól definiált szöget zár be a pozitív első tengelytől mérve. Jelölje ezt $\theta(x,y)$. Így $\theta(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$. Definiálja és jelölje $\operatorname{ind}_{\underline{f}}(\gamma) := \frac{1}{2\pi}[\theta(x,y)]_{\gamma}$ a vektormező által megtett fordulatok nettó számát a γ görbe mentén, azaz a *rendszer indexét (forgásszámát) a γ görbére,* amikor (x,y) egyszer az óramutató járásával ellentétes irányban végig mozog a γ-n. A görbe indexe tehát megadja, hogy a $(f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))$ vektor hányszor fordul körbe, mialatt a t befutja az $[a,b]$ intervallumot. Az index zárt görbe esetén mindig egész szám.

Sok esetben egy vektormezőnek indexét egy görbére nézve a fenti definíció alkalmazásával is ki lehet számolni. Bonyolultabb esetben az index konkrét kiszámításánál hasznos lehet az alábbi

<u>3.9. Állítás</u>: Tekintsük az $\dot{x} = f_1(x,y), \dot{y} = f_2(x,y)$ kétdimenziós rendszert, és legyen $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonos, egyszerű és zárt görbe, amely nem halad át egyensúlyi ponton. Jelölje (x,y) az (x,y) pontban a $(f_1(\gamma(t); f_2(\gamma(t))$ vektor szögét, valamint $\theta^*(t) := \theta(\gamma(t))$ minden $t \in [a,b]$ esetén. Ekkor $\operatorname{ind}_{\underline{f}}(\gamma) := \frac{1}{2\pi}\int_a^b \dot{\theta}^*(t)\,dt$, ahol $\dot{\theta}^*(t) = \frac{f_1(\gamma(t))\cdot\frac{d}{dt}f_2(\gamma(t)) - f_2(\gamma(t))\cdot\frac{d}{dt}f_1(\gamma(t))}{f_1^2(\gamma_1(t)) + f_2^2(\gamma_2(t))}$.

<u>3.10. Állítás</u>: Tegyük fel, hogy a γ egyszerű zárt görbe, az $\underline{f}$ C^1 vektormező értelmezett a γ-n és a γ belsejében, valamint $\underline{f}(x,y) \neq \underline{0}$ γ görbén és a belsejében. Ekkor $\operatorname{ind}_{\underline{f}}(\gamma) = 0$.

<u>3.11. Állítás</u>: Egy zárt görbe indexe nem változik a görbe vagy a vektormező folytonos deformálása során, ha a görbe a deformáció során nem megy keresztül egyensúlyi pontokon, illetve a vektormező deformációja közben a görbén nincs egyensúlyi pont.

A 3.11. Állítás miatt korrekt az alábbi

<u>3.12. Definíció</u>: Legyen (x_0, y_0) izolált egyensúlyi helyzet. Az *egyensúlyi pont indexe* $\operatorname{ind}(x_0, y_0)$ legyen tetszőleges, az egyensúlyi helyzetet körülvevő, de más egyensúlyi helyzetet nem tartalmazó egyszerű, zárt görbe indexe.

Nem elfajult esetben a kvázilineáris rendszer origójának (mint egyensúlyi helyzetnek) az indexe megegyezik a linearizált rendszer origójának az indexével, valamint, ha a linearizált rendszer mátrixának nincsen 0 sajátértéke, akkor a nemlineáris rendszer origójának (mint egyensúlyi helyzetnek) indexe 1 vagy -1. Ha ez csomópont, centrum vagy fókuszpont, akkor ez 1, ha ez nyeregpont, akkor -1.

<u>3.13. Állítás</u>: Tegyük fel, hogy a vektormező értelmezve van a periodikus pálya belsejében. Ekkor a periodikus pálya belsejében van legalább egy egyensúlyi helyzet. Ha egyetlen egyensúlyi helyzet van, akkor az csak csomópont, fókuszpont vagy centrum lehet.

Azt gondolhatnánk, hogy a fenti állítás *tetszőleges* homoklinikus pályával vagy periodikus pályával rendelkező rendszer esetén is teljesül. A 3.63. feladat viszont *példát mutat olyan periodikus pályára, amelynek belsejében nincs egyensúlyi helyzet.* A 2.112. feladatban a rendszernek a pályái az origóra illeszkedő homoklinikus körsorok, de a *homoklinikus pályák belsejében nincs egyensúlyi helyzet,* ugyanis ez egyetlen, az origó. A pályák itt az origó környezetében ún. *elliptikus szektort* alkotnak.

Elliptikus szektor (topológiailag ekvivalens forma)

3.14. Állítás: Ha a vektormező értelmezve van a γ periodikus pálya belsejében, akkor $\mathrm{ind}_{\underline{f}}(\gamma) = 1$, sőt periodikus pálya belsejében fekvő egyensúlyi helyzetek indexeinek összege 1.

3.15. Állítás: A periodikus pálya belsejében lévő egyensúlyi helyzetek indexeinek összege egyenlő a görbe indexével.

Zárt pálya lehetetlenségéről szól az alábbi

3.16. Állítás: Tekintsük az $\begin{matrix} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{matrix}$ kétdimenziós rendszert.

Tegyük fel, hogy az $\underline{f} = (f_1, f_2) \neq \underline{0}$, valamint a $\mathrm{rot}\,\underline{f} = \underline{0}$ egy egyszeresen összefüggő D tartományon. Ekkor a rendszernek nincsen D-ben fekvő zárt pályája.

Sok esetben célszerű vizsgálni egy görbe ún. pályamenti vagy orbitális stabilitását a fázistérben. Tekintsük például a Naprendszer legegyszerűbb modelljét, amelyben az origóban a nagy M tömegű test (a Nap) található, és körülötte egy kis m tömeg test (a Föld) kering. A rendszert leíró konzervatívnak folyamatot az $m\ddot{\underline{r}} = -\gamma M m \underline{r}/|\underline{r}^3|$ Newtoni mozgásegyenlet írja le, ahol $\underline{r}$ a bolygó sugárvektora és $\gamma > 0$ a gravitációs állandó. Ismeretes, hogy a bolygók pályája, azaz a kezdeti feltételeknek (helyzetnek és sebességnek) megfelelő pályák a fázistérben ellipszisek, és ha csak egy kicsit változtatjuk a kezdeti helyzetet és a sebességet, akkor a megfelelő ellipszis csak kis mértékben változik. Ez azt jelenti, hogy valamiféle stabilitás uralkodik, ennek ellenére a bolygó mozgása nem stabilis Ljapunov-értelemben. Ez látszik a Kepler III. törvényéből, amely szerint két bolygó forgásidejének (azaz periódusainak) négyzeteinek aránya megegyezik az ellipszispályái féltengelyeinek köbeivel. A periódusok legkisebb nullától eltérő különbségének az a következménye, hogy a tetszőleges távoli jövőben olyan pillanatok következnek be, amikor a két bolygó, az eredeti és a perturbált egymással szemben áll, azaz távolságuk nagy lesz.

3.17. Állítás: Legyen az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer esetén $\underline{x}_0$ p-periodikus pont és $\underline{\varphi}(t)$ p-periodikus megoldása az $\underline{\varphi}(0) = \underline{x}_0$ kezdeti érték problémának. Ekkor a megoldás nem aszimptotikusan stabilis.

Így periodikus megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis, mégis egy környezetből induló pályák közel maradhatnak, illetve tarthatnak is ide. Ezért a fázistérben a megoldás stabilitásának a leírására célszerű bevezetni az orbitális, azaz pálya menti stabilitás, aszimptotikus stabilitás fogalmát.

3.18. Definíció: Legyen az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer esetén az $\underline{x}(t, \underline{p})$ T*-szerint periodikus* megoldás által definiált G (zárt) pálya, azaz $G := \{\underline{x}(t, \underline{p}), t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^n$. A G pálya *orbitálisan stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden $\underline{q}$-ra, amelyre $d(\underline{q}, G) < \delta(\varepsilon)$ esetén $\underline{x}(t, \underline{q})$ minden $t \geq 0$-ra értelmes, teljesül, hogy minden $t > 0$-ra $d(\underline{x}(t, \underline{q}), G) < \varepsilon$. A G lokálisan *aszimptotikusan orbitálisan stabilis*, ha orbitálisan stabilis és létezik $\delta_0 > 0$, hogy minden $\underline{q}$-ra, amelyre $d(\underline{q}, G) < \delta_0$, teljesül, hogy $\lim_{t \to +\infty} d(\underline{x}(t, \underline{q}), G) = 0$. (Ezt *stabilis határciklusnak* is nevezzük.) A pálya *orbitálisan instabilis*, ha nem orbitálisan stabilis. ($d(\underline{q}; G) := \min_{\underline{p} \in G} |\underline{q} - \underline{p}|$, ahol a $|\cdot|$ az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi norma.)

A orbitális stabilitás fogalmát ki lehet terjeszteni nem feltétlenül periodikus pályák stabilitására.

3.19. Definíció: Az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer $G^+ := \{\underline{x}(t, \underline{x}_0) : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ trajektóriája *orbitálisan stabilis* vagy *Poincaré-stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden olyan $\underline{y}_0$-ra, amelyre $d(\underline{y}_0, G^+) < \delta(\varepsilon)$, az $\underline{x}(t, \underline{y}_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmes és minden $t > 0$-ra $d(\underline{x}(t, \underline{y}_0), G^+) < \varepsilon$. Ellenkező esetben a G^+ *Poincaré-instabilis*. A G^+ trajektória (lokálisan) a*szimptotikusan orbitálisan stabilis vagy aszimptotikusan Poincaré-stabilis*, ha G^+ Poincaré-stabilis és létezik $\delta_0 > 0$, hogy minden $\underline{y}$-ra, amelyre $d(\underline{y}, G^+) < \delta_0$, teljesül, hogy $\lim_{t \to \infty} d(\underline{x}(t, \underline{y}), G^+) = 0$.

A fenti definíció szerint, ha egy mozgás kellően közel kerül az G^+ pályához a $t = 0$ időpontban, akkor közel marad hozzá minden $t > 0$ esetén. Meggondolható, hogy a $t = 0$ pillanatnak ebben *nincs* jelentősége. Valóban, tegyük fel, hogy valamely t_0 esetén $d(\underline{x}(t_0, \underline{y}_0), G^+) < \delta(\varepsilon)$, ahol $\delta(\varepsilon)$ az ε-hoz tartozó delta a definíció szerint. Ekkor nyilvánvalóan $d(\underline{x}(t, \underline{x}(t_0, \underline{y}_0)), G^+) < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ esetén, azaz $d(\underline{x}(t + t_0, \underline{y}_0), G^+) = d(\underline{x}(t, \underline{x}(t_0, \underline{y}_0)), G^+) < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az $\underline{x}(t, \underline{y}_0)$ definiálva van minden $t \geq t_0$-ra és $d(\underline{x}(t, \underline{y}_0), G^+) < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq t_0$ esetén. Hasonlóan látható, ha G^+ orbitálisan aszimptotikusan stabilis és egy megoldás közelebb kerül a pályához, mint $\delta(\varepsilon)$, akkor $t \to \infty$ esetén a távolság nulla.

Így világos az alábbi ekvivalens definíció:

3.20. Ekv. Definíció: Az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer $G^+(\underline{x}_0) = \{\underline{x}(t, \underline{x}_0): t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ trajektóriája orbitálisan vagy Poincaré-stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden olyan $\underline{y}_0$-ra, amelyre $|\underline{x}_0 - \underline{y}_0| < \delta(\varepsilon)$, az $\underline{x}(t, \underline{y}_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmes és $d(\underline{x}(t, \underline{y}_0), G^+(\underline{x}_0)) < \varepsilon$ minden $t > 0$-ra. Ellenkező esetben a $G^+(\underline{x}_0)$ Poincaré-instabilis. A $G^+(\underline{x}_0)$ trajektória lokálisan aszimptotikusan Poincaré-stabilis, ha Poincaré-stabilis, és létezik $\delta_0 > 0$, hogy minden $\underline{y}$-ra, amelyre $d(\underline{y}, G^+(\underline{x}_0)) < \delta_0$, teljesül, hogy $\lim_{t\to\infty} d(\underline{x}(t, \underline{y}), G^+(\underline{x}_0)) = 0$.

Példa: Mutassuk meg, hogy az ún. Duffing-rendszer nem triviális megoldásai Poincaré-értelemben stabilisak, de nem lesznek Ljapunov-stabilisak!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - x^3$$

Megoldás: A rendszer Hamilton-rendszer. Az origó centrum. Minden megoldás periodikus. A Hamilton-függvény: $H(x, y) = y^2 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$. A pályák szimmetrikusak az x és az y tengelyekre. Feltehetjük, hogy $x(0) = x_0$ és $y(0) = 0$. Ekkor $y^2(t) + x^2(t) + \frac{1}{2}x^4(t) = x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^4$. Jelölje $p(x_0)$ az $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$-hoz tartozó megoldás periódusát. Így az $y \geq 0$ félsíkon

$$\dot{x}(t) = y(t) = (x_0^2 + \tfrac{1}{2}x_0^4 - x^2(t) - \tfrac{1}{2}x^4(t))^{\frac{1}{2}} \text{ és } x\left(\tfrac{p(x_0)}{2}\right) = -x_0.$$

Következésképpen

$$\frac{dt}{dx} = (x_0^2 + \tfrac{1}{2}x_0^4 - x^2(t) - \tfrac{1}{2}x^4(t))^{-\frac{1}{2}}. \text{ Így}$$

$$p(x_0) = 2\int_{-x_0}^{x_0} (x_0^2 + \tfrac{1}{2}x_0^4 - x^2(t) - \tfrac{1}{2}x^4(t))^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Numerikus közelítéssel kiszámolható, hogy $p(1) \sim 4{,}7680$, $p(2) \sim 3.1792, \ldots, p(10) \sim 0.7362$. Szemléletesen eléggé nyilvánvaló, hogy $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$.

Polárkoordináta-rendszerrel: $\dot{r}(t) = -r^3(t) \sin\varphi(t) \cos^3\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t) = -(1 + r^2(t)\cos^4\varphi(t))$.

Világos, hogy minden nem triviális megoldás Poincaré-stabilis is. Látható, hogy a külső pályák lehagyják a belsőket, így a nulla megoldáson kívül egyetlen megoldás sem lesz Ljapunov-stabilis. ■

3.21. Megjegyzés: $r = 0$ esetben a rendszer „átmegy" az $\dot{r}(t) = 0$, $\dot{\varphi}(t) = -1$ rendszerbe, ami ekvivalens az $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ rendszerrel. Ekkor $p(x_0) = 2\int_{-x_0}^{x_0} (x_0^2 - x^2(t))^{-\frac{1}{2}} dx = 2\pi$.

3.23. Definíció: Az alábbi rendszert *gradiens rendszernek* nevezzük: $\dot{\underline{x}}(t) = -\underline{\nabla} \cdot \mathrm{V}(\underline{x}(t))\mathrm{grad}\, \mathrm{V}(\underline{x}(t))$, ahol $\mathrm{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ adott folytonosan differenciálható függvény és $\underline{\nabla}$ a Nabla szimbólum.

3.24. Állítás: A gradiens rendszernek nem létezik periodikus megoldása.

3. Feladatok

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszereknek nincs periodikus megoldása!

3.1. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y + x^3$
$\dot{y} = x + y + y^3$

3.2. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -y(1 + x^2 + x^4) - x$

3.3. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -2 - x^2$

3.4. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = y(1 + x^2) + x^3$

3.5. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x(1 - y^2)$
$\dot{y} = x - y(1 + e^x)$

3.6. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y + 2xy$
$\dot{y} = x + x^2 - y^2$

3. 7. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = 1 + x^2 - y(1 - x)$

3.8*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a nincs periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = y^2 + x^2 e^x$$

3.9. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y - x^3$$
$$\dot{y} = x + y - y^3$$

3.10. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x + y - x^3$$
$$\dot{y} = -x + y - y^3$$

3.11. feladat: (Megoldás) Létezik-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = 1 - x$$
$$\dot{y} = x^2 - y^2$$

3.12. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x, y) : \frac{1}{4} \leq x^4 + y^4 \leq 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y^3 + x(1 - 4x^4 - y^4)$$
$$\dot{y} = -x^3$$

3.13. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy nem létezik periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \{(x,y): x^2 + y^2 < 4\}$ halmazon!

$$\dot{x} = x - xy^2 + y^3$$
$$\dot{y} = 3y - x^2y + x^3$$

3.14. feladat: (Megoldás) Létezik-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x + 2xy^2 + y^3$$
$$\dot{y} = y + 2x^2y + 2\,x^3$$

3.15. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x,y): \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -x^3 + x - y$$
$$\dot{y} = x - x^2y$$

3.16. feladat: (Megoldás) Létezik-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x - 2y^2 + 2\,x^3$$
$$\dot{y} = -x^2 + 2y + x^4y$$

3.17. feladat: (Megoldás) Van-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x - 2$$
$$\dot{y} = 4x^2 - y^2$$

3.18. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x,y): \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + y - x^2y - 2y^3$$

3.19. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x,y): \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y - x^3 - 2xy^2$$
$$\dot{y} = x + y - x^2y - 2y^3$$

3.20. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs sem a pozitív, sem a negatív számsíkon periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -y + x^2 - xy$$
$$\dot{y} = x + xy$$

3.21. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs semmilyen pozitív a és b számok esetén periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y^2$$
$$\dot{y} = x - ay + 2x^2 - aby^3$$

3.22. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy autonóm rendszer esetén a Ljapunov stabilitásból következik a Poincaré-stabilitás! Adjunk példát arra, hogy a megfordítás nem feltétlenül teljesül!

3.23. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszer egyidejűleg Poincaré és Ljapunov értelemben stabilis!

$$\dot{x} = 1$$
$$\dot{y} = 0$$

3.24. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a $\begin{aligned}\dot{x} &= x\\ \dot{y} &= y\end{aligned}$ Poincaré-instabilis!

3.25. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk a következő rendszer határciklusainak a Poincaré-stabilitását!

$$\dot{x} = -y + x\sin\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\dot{y} = x + y\cos\sqrt{x^2 + y^2}$$

3.26. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk a következő rendszer megoldásainak a Poincaré-stabilitását!

$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = y\ln y \qquad (y > 0)$$

Számítsuk ki az alábbi rendszerek egyensúlyi helyzeteinek indexét!

3.27. feladat: (Megoldás) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2xy\\ \dot{y} &= x^2 - y^2\end{aligned}$

3.28. feladat: (Megoldás) $\begin{aligned}\dot{x} &= x\\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$

3.29. feladat: (Megoldás) $\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$

3.30. feladat: (Megoldás) $\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + y^2\\ \dot{y} &= x\end{aligned}$

3.31*. feladat: (Megoldás) $\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by\\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}$ (a, b, c és d valós számok)

3.32. feladat: (Megoldás) Számítsuk ki az origó középpontú $r = 1$ sugarú körvonalnak az alábbi rendszerre vett indexét!

$$\dot{x} = 2x^2 + 1$$
$$\dot{y} = 2xy$$

3.33. feladat: (Megoldás) Számítsuk ki az origó középpontú $r = 1$ sugarú körvonalnak az alábbi rendszerre vett indexét!

$$\dot{x} = y^3$$
$$\dot{y} = x^3$$

3.34. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy nyeregpont indexe mindig -1.

3.35. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy csomópont indexe mindig 1.

3.36. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy fókuszpont indexe mindig 1.

3.37*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az alábbi rendszert

$\dot{x} = x + f(x, y)$

$\dot{y} = y + g(x, y)$, ahol f és g az egész síkon korlátos kétváltozós függvények. Mutassuk meg, hogy a fenti rendszernek létezik legalább egy egyensúlyi helyzete!

3.38. feladat: (Megoldás) Tekintsük azt a síkmodellt, amely felülről modellezi a forgószelet, azaz minden pontban vegyük a szél fújásának irányába mutató megfelelő nagyságú síkbeli vektort. Mivel forgószélről van szó, feltételezhetjük, hogy van egy olyan zárt görbe, amelynek peremén lévő vektorok az illető perempont érintőjével mindig hegyesszöget zárnak be. Tegyük fel, hogy ez a vektormező folytonos. Mutassuk meg, hogy a görbe belsejében van legalább egy szélcsendes pont!

3.39*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\ddot{x} + (x^2 + 2(\dot{x})^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

3.40*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek egyetlen határciklusa létezik!

$$\dot{x} = x - y - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = x + y - y^3 - x^2y$$

3.41*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + y(1 - 3x^2 - 2y^2)$$

3.42*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy létezik nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\dot{x} = x + y - x^3 - 2xy^2$$
$$\dot{y} = -x + y - 3x^2y - 2y^3$$

3.43*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\dot{x} = -y + 2x^2y$$
$$\dot{y} = x + 2xy^2$$

3.44*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x^3 - xy^2$$

3.45*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -g(x),$$

ahol $g(0) = 0$, g folytonos, szigorúan növekedő függvény, amelyre $\int_0^x g(t)dt \to \infty$, ha $x \to \pm\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden megoldás periodikus.

3.46*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik (nem konstans) periodikus megoldása!

$$\dot{r} = r - r^5 - r^3(1 + \sin^2\varphi)$$
$$\dot{\varphi} = 1$$

3.47. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy nincs periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\dot{x} = 2x - x^5 - xy^4$$
$$\dot{y} = y - y^3 - x^2y$$

3.48*. feladat: (Megoldás) Van-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x\cos(x^2 + y^2) - y$$
$$\dot{y} = y\cos(x^2 + y^2) + x$$

3.49. feladat: (Megoldás) Milyen a és b-re létezik zárt trajektóriája az alábbi lineáris rendszernek?

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

3.50*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a következő differenciálegyenletnek nincsen nem konstans periodikus megoldása!

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon(\dot{x})^3 + \sin x = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

3.51*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik (nem konstans) periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = y(9 - x^2 - 2y^2) - x$$

3.52. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a 3.10. Állítás megfordítása nem igaz, azaz egy görbe indexe lehet úgy 0, hogy a görbe belsejében van egyensúlyi helyzet!

3.53. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek végtelen sok határciklusa van!

$$\dot{x} = -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\dot{y} = x + y\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ,$$

ahol $(x, y) \neq (0, 0)$ és legyen a rendszer jobboldala, $\underline{f}(0, 0) = \underline{0}$.

3.54. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az $r = 1$ pálya aszimptotikusan Poincaré-stabilis, de nem aszimptotikusan Ljapunov-stabilis!

$$\dot{r} = 1 - r$$
$$\dot{\Theta} = r.$$

3.55. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az $y = 0$ pálya aszimptotikusan Poincaré-stabilis!

$$\dot{x} = 1 + x^2$$
$$\dot{y} = -2xy.$$

3.56. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = -x.$$

3.57. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi polárkoordinátában megadott rendszernek létezik periodikus megoldása!

$$\dot{r} = r(1 - r^3) + 0.5r\cos\varphi$$
$$\dot{\varphi} = 1.$$

3.58. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = 4x + 2y - x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -2x + y - y(x^2 + y^2).$$

3.59. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y + x^2 - 2x(x^2 + y^2)^{1/2}$$
$$\dot{y} = x + y + xy - 2y(x^2 + y^2)^{1/2}.$$

3.60. feladat: (Megoldás): Tegyük fel, hogy $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

a) Az $\{(x, y): f(x, y) = 0\}$ zárt, egyszerű görbe, amely az origót belső pontként tartalmazza,

b) $g(x, y) \neq 0$.

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -xf(x, y) + yg(x, y)$$
$$\dot{y} = -yf(x, y) - xg(x, y).$$

3.61. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y + x^3 - 1.5xy^2$$
$$\dot{y} = x + y + x^2y - 0.5y^3$$

3.62. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik *egyetlen* periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2)$$
$$\dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$$

3.63. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik egyetlen periodikus megoldása, viszont a periodikus pálya belsejében nincs egyensúlyi helyzet!

$$\dot{r} = 1 - \frac{1}{r}$$
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r}$$

3.64*. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -y - x^2$$
$$\dot{y} = -x + y^2$$

3.65. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy periodikus pálya belsejében nem lehet végtelen sok egyensúlyi helyzet!

Megoldások

1. Fejezet-Megoldások

1.1. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 5$. Az origó instabilis csomópont. $E_u = \mathbb{R}^2$, $\dim E_s = \dim E_c = 0$ ■

1.2. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$. Az origó nyeregpont. $\dim E_s = \dim E_u = 1$ és $\dim E_c = 0$ ■

1.3. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = 2i$ és $\lambda_2 = -2i$. Az origó centrum. $E_c = \mathbb{R}^2$ és $\dim E_c = 2$ ■

1.4. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 2$. $\dim E_s = 1$ és $\dim E_u = 2$ ■

1.5. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ és $\lambda_3 = -i$. $\dim E_c = 2$ és $\dim E_u = 1$ ■

1.6. Megoldás: (Feladat) $\lambda_{12} = -1$, $\lambda_3 = 3$. $\dim E_s = 2$ és $\dim E_u = 1$ ■

1.7. Megoldás: (Feladat) $\lambda_{12} = 0$, $\lambda_3 = 3$. $\dim E_c = 2$ és $\dim E_u = 1$ ■

1.8. Megoldás: (Feladat) 1. $a < -1$ esetén nyereg, 2. $-1 < a < 3$ esetén instabilis fókusz, 3. $a \geq 3$ esetén instabilis csomópont. $a = -1$ esetén a nem izolált egyensúlyi helyzet instabilis. ■

1.9. Megoldás: (Feladat) 1. $a > 1$ esetén nyereg, 2. $0 < a < 1$ esetén stabilis csomópont, 3. $a < 0$ esetén nyereg. $a = 0$ és $a = 1$ esetén a nem izolált egyensúlyi helyzet stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

1.10. Megoldás: (Feladat) 1. $a < 0$ esetén nyereg, 2. $0 < a \leq \frac{1}{4}$ esetén instabilis csomópont, 3. $a > \frac{1}{4}$ esetén instabilis fókusz. $a = 0$ esetén a $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzet instabilis. ■

1.11. Megoldás: (Feladat) 1. $a < -1$ esetén nyereg, 2. $-1 < a < -\frac{1}{2}$ esetén centrum, 3. $a > -\frac{1}{2}$ esetén nyereg. $a = -1$ esetén a $\{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ és $a = -\frac{1}{2}$ esetén a $\{(t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzetek instabilisak. ■

1.12. Megoldás: (Feladat) 1. $a < -\frac{1}{4}$ esetén stabilis fókusz, 2. $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ stabilis csomó, 3. $a > 0$ esetén nyereg. $a = 0$ esetén a $\{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzet stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

1.13. Megoldás: (Feladat) $\lambda_{12} = 1$ és $\lambda_3 = -1$. $\dim E_s = 1$ és $\dim E_u = 2$. (p-től függetlenül.) ■

1.14. Megoldás: (Feladat) Az invariáns alterek dimenziója csak $p = 0$ esetén változhat.
1. $p = 0$ esetén $\dim E_c = 2$ és $\dim E_u = 1$,
2. $p > 0$ esetén $\dim E_u = 3$,
3. $p < 0$ esetén $\dim E_s = 2$ és $\dim E_u = 1$. ■

1.15. Megoldás: (Feladat) A rendszer együttható mátrixa $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -2$, a rendszer instabilis. ■

1.16. Megoldás: (Feladat) A rendszer együttható mátrixa $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, a rendszer instabilis. ■

1.17. Megoldás: (Feladat) A rendszer együttható mátrixa $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. A Hurwitz-kritérium szerint differenciálegyenlet-rendszer instabilis. ■

1.18. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -3$, a rendszer aszimptotikusan stabilis. ■

1.19. Megoldás: (Feladat) A rendszer mátrixának a sajátértékei $\lambda_1 = -6 + i$ és $\lambda_2 = -6 - i$. Az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis. ■

1.20. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_{23} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis. ■

1.21. Megoldás: (Feladat) A Hurvitz-kritérium szerint ez a polinom stabilis pontosan akkor, ha
1. $a > 0$ és 2. $ab - 2 > 0$. ■

1.22. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$, az origó nyeregpont.

1.23. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\lambda_1 = 4i$ és $\lambda_2 = -4i$, az origó centrum. ■

1.24. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1$.
Az x-tengely pontjai nem izolált instabilis egyensúlyi helyzetek. ■

1.25. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$, az origó nyeregpont. ■

1.26. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$ adódik, az origó nyeregpont. ■

1.27. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$ az origó aszimptotikusan stabilis csomópont. ■

Megjegyzés: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ rendszert, ahol $\underline{\underline{A}}$ legyen most 2×2-es mátrix.
Ekkor az általános megoldás: $\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{s}_2$, ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok.
Ha $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, akkor a pályák grafikonjai az origóban érintik az $\underline{s}_2$ által meghatározott egyenest. Hasonló igaz, ha $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

1.28. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1$.
Az $y = -x$ egyenes pontjai nem izolált instabilis egyensúlyi pontok. Így $\dim E_u = 1$ és $\dim E_c = 1$.
Ekkor a E_u az y-tengely és a $E_c = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

1.29. Megoldás: (Feladat) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$, $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$, illetve

$\underline{s}_2 = \binom{1}{-1-i}$. Így legyen $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. A differenciálegyenlet $\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$ transzformációval az $\underline{y}$ síkon: $\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\underline{y}$. $\dot{r}(t) = -2r(t)$ és $\dot{\varphi}(t) = -1$, így a pályagörbék az $\underline{x}$ síkon negatív irányításúak.

Megjegyzés: A pályagörbék spirális alakzatok. Az (1, 0) ponthoz tartozó sebességvektor a $(-1,-2)$ vektor, ami alapján a körüljárási irány negatív irányítású. ■

1.30. Megoldás: (Feladat) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i, \underline{s}_1 = \binom{1}{-i}$, illetve $\underline{s}_2 = \binom{1}{i}$. Így legyen $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A differenciálegyenlet $\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$ transzformációval az $\underline{y}$ síkon: $\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\underline{y}$. $\dot{r}(t) = -2r(t)$ és $\dot{\varphi}(t) = -1$, azaz a pályagörbék az $\underline{y}$ síkon negatív irányításúak és az origóhoz tartanak. Az $\underline{x}$ síkon a pályagörbék pozitív irányításúak. (→ 1.32. feladat) ■

Megjegyzés: Az (1, 0) ponthoz tartozó sebességvektor a $(-2, 1)$ vektor, így a körüljárási irány pozitív. ■

1.31. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet: $x = 0$ és $y = -1$. $u := x$ és $v := y + 1$. Ez esetben $\dot{u} = u - v, \dot{v} = -4u + v$. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ és $\underline{s}_1 = \binom{1}{2}$, $\underline{s}_2 = \binom{1}{-2}$. A fáziskép a homogén rendszer fázisképének a $\vec{a}(0,-1)$ vektorral való eltolásával kapható meg.

1.32. Megoldás: (Feladat) Tekintsük egy γ síkgörbét és vezessük be az $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ és $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ polárkoordináta-rendszert. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixszal megadott nem elfajuló lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\dot{\varphi}(t) > 0$ $t > 0$-ra és $\det\underline{\underline{A}} > 0$. Ekkor $A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \cdot \begin{pmatrix} a\cos\varphi(t) + b\sin\varphi(t) \\ c\cos\varphi(t) + d\sin\varphi(t) \end{pmatrix}$. Mivel $\tilde{\varphi}(t) = \operatorname{artg}\left(\frac{c\cos\varphi(t)+d\sin\varphi(t)}{a\cos\varphi(t)+b\sin\varphi(t)}\right)$, ezért $(\dot{\tilde{\varphi}})(t) = \frac{\lambda^2}{\mu^2}(ad - bc)\dot{\varphi}(t)$. Ha $\det\underline{\underline{A}} > 0$, akkor $(\dot{\tilde{\varphi}})(t) > 0$ és ha $\det\underline{\underline{A}} < 0$, akkor $(\dot{\tilde{\varphi}})(t) < 0$. ■

1.33. Megoldás: (Feladat) Az általános megoldás

$$\underline{x}(t) = c_1e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\underline{u} - \sin(\beta t)\underline{v}) + c_2e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\underline{u} + \cos(\beta t)\underline{v})$$

alakú, ahol az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$ és a hozzátartozó sajátvektorok $\underline{s}_{12} = \underline{u} \pm i\underline{v}$. A feltétel miatt szükségképpen $\alpha = 0$. ■

2. Fejezet-Megoldások

2.1. Megoldás: (Feladat) Jelölje $x(t,0,x_0)$ az egyenlet $x(0)=x_0$ $(x_0\neq 0)$ feltételt teljesítő megoldását. $x(t,0,x_0)=\frac{x_0}{1-tx_0}$. Nem értelmezett *minden* $t>0$-ra a megoldás. A differenciálegyenlet $x=0$ megoldása nem stabilis. ■

2.2. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $y_1=1$ és $y_2=0$. Az $y_1=1$ megoldás aszimptotikusan stabilis, míg az $y_2=0$ megoldás instabilis. A vonzási tartomány: $T=(0,\infty)$.

2.3. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $y_1=1$, $y_2=-1$ és a $y_3=0$. Az $y_3=0$ megoldás aszimptotikusan stabilis, míg az $y_1=1$ megoldás instabilis és az $y_2=-1$ ún. félig instabilis. Az $y_3=0$ vonzási tartománya: $T=(-1,1)$. ■

2.4. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $y_1=1$, $y_2=-1$ és a $y_3=0$. Az $y_1=1$ és az $y_2=-1$ megoldás aszimptotikusan stabilis, míg az $y_3=0$ megoldás instabilis. Az $y_1=1$ vonzási tartománya: $T_1=(0,\infty)$, az $y_2=-1$ vonzási tartománya: $T_2=(-\infty,0)$.

2.5. Megoldás: (Feladat) A 2.4. Feladat szerint az azonosan nulla megoldás instabilis, de az ezen megoldás egy környezetéből induló megoldások korlátosak. ■

2.6. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$. $\lambda_1=0$ és $\lambda_2=k$. $k>0$ esetén instabilis, $k<0$ esetén stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. $k=0$ esetén a vizsgálandó rendszer: $\dot{x}=y, \dot{y}=0$. A pályagörbék az $y(x)=c$ görbék. Az egyensúlyi helyzetek instabilisak.

2.7. Megoldás: (Feladat) A differenciálegyenlet ekvivalens a $\dot{x}=y, \dot{y}=2xy$ rendszerrel. Az egyensúlyi helyzet $\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$. A pályák egyenlete: $y=x^2+c$. Az egyensúlyi helyzet instabilis. ■

2.8. Megoldás: (Feladat) A differenciálegyenlet ekvivalens az $\dot{x}=y, \dot{y}=-x\operatorname{sign}x$ rendszerrel. Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Az origó nem stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.9. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}2y-1 & 2x+1\\ 20x^3+2 & 3y^2-3\end{pmatrix}$, $f'(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$. Az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.10. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}2x-2 & 2y\\ 6x-1 & 3\end{pmatrix}$, $f'(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Az origó nyeregpont. ■

2.11. Megoldás: (Feladat) $f'(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Az origó nyeregpont. ■

2.12. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}1+y & x\\ 2x & -1\end{pmatrix}$, $f'(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Az origó nyeregpont. ■

2.13. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}1+y & -1-x\\ 3-y & -2-x\end{pmatrix}$, $f'(0,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$. Az origó aszimptotikusan stabilis fókusz. ■

2.14. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}1+2x & 2y\\ -y & 1-x\end{pmatrix}$, $f'(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Az origó elfajult instabilis csomópont. ■

2.15. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y^3 & 1+3xy^2 \\ 1-y & -2-x \end{pmatrix}$, $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Origó nyeregpont. ■

2.16. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \end{pmatrix}$, $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Az origó centrum. ■

2.17. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$, $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Az első integrál $F(x,y) = \cos x + \cos y$. Az origó centrum. ■

2.18. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$ és $P_2(-1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. A P_1 és P_2 pont instabilis csomópont. ■

2.19. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,1)$ és $P_2(-1,-1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ és $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. A P_1 pont aszimptotikusan stabilis (elfajult) csomópont és P_2 pont nyeregpont. ■

2.20. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,1)$ és $P_2(-1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ és $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. A P_1 pont aszimptotikusan stabilis fókusz és P_2 pont nyeregpont.■

2.21. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és $P_3(-1,-1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ és $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. A P_1 pont nyereg, a P_2 és P_3 pont aszimptotikusan stabilis fókuszpont. ■

2.22. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A P_1 pont aszimptotikusan stabilis csomópont, a P_2 pont nyeregpont. ■

2.23. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,\frac{3}{2})$, $P_3(1,0)$ és $P_4(-1,2)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -y & 3-x-4y \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$, $f'(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ és $f'(P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. A P_1 pont instabilis csomópont, a P_2 pont aszimptotikusan stabilis csomópont, a P_3 és P_4 pont nyeregpont. ■

2.24. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$. Az origó nyeregpont. ■

2.25. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2y^2 & 4xy \\ 8xy & -2+4x^2 \end{pmatrix}$. Az origó nyeregpont. ■

2.26. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,1)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = f'(P_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. A P_1 pont nyeregpont, a P_2 és P_3 pont instabilis csomópont. ■

2.27. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -1+y^2 & 2xy \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
$f'(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Az origó aszimptotikusan stabilis csomópont.■

2.28. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_k(k\pi,0)$, ahol $k \in Z$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -3 \end{pmatrix}$.
Így $f'(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -3 \end{pmatrix}$. A $P_k(k\pi,0)$ pontban a), ha $k = 2n$, akkor aszimptotikusan stabilis csomópont b), ha $k = 2n+1$, akkor nyeregpont. ■

2.29. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,-1)$ és $P_4(-1,1)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ és $f'(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
P_1 és P_3 pont nyereg, a P_2 pont aszimptotikusan stabilis fókusz és a P_4 pont instabilis fókuszpont. ■

2.30. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(3,4)$, $P_2(-3,-4)$, $P_3(4,3)$ és $P_4(-4,-3)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $f'(P_4) = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.
A P_1 és P_2 pont nyereg, a P_3 pont instabilis csomópont és a P_4 pont aszimptotikusan stabilis csomópont. ■

2.31. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_3(-1,0)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3x^2-1+y & x \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ és $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
A P_1 pont nyereg, a P_2 pont instabilis fókuszpont és a P_3 pont aszimptotikusan stabilis fókuszpont. ■

2.32. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-2y & 1-2x \end{pmatrix}$.
$f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. A P_1 instabilis fókusz és a P_2 nyeregpont.■

2.33. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet: $P_1(1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$.
Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A P_1 aszimptotikusan stabilis fókusz. ■

2.34. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és a $P_3(-1,0)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2-1 & -1 \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ és $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
A P_1 pont aszimptotikusan stabilis fókuszpont, a P_2 és a P_3 pont nyeregpont. ■

2.35. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,2)$, $P_3(1,0)$ és $P_4(-3,4)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -y & 3-x-3y \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $f'(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ és $f'(P_4) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. A P_1 pont instabilis csomópont, a P_2 pont aszimptotikusan stabilis csomópont, a P_3 és a P_4 pont nyeregpont. ■

2.36. Megoldás: (Feladat) Egyensúlyi pont az origó. $\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = -2x + y + 2z + xz + yz$,
$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2+z & 1+z & 2+x+y \end{pmatrix}$. $f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 2$,
Az origó instabilis. ■

2.37. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta - z & -1 & -x \\ y & x & -\gamma \end{pmatrix}$. $f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = -\gamma$,
$\lambda_{23} = \frac{-1-\alpha \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4\alpha(1-\beta)}}{2}$. $\beta < 1$ esetén $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 < 0$, azaz ebben az esetben a $\dim E_s = 3$,
$\beta = 1$ esetén $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 < 0$, azaz ebben az esetben a $\dim E_c = 1$ és $\dim E_s = 2$, $\beta > 1$ esetén $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0$, azaz ekkor $\dim E_u = 1$ és $\dim E_s = 2$. ■

2.38. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0,0)$, $P_2(-2,2,-2)$.
$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2x & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A karakterisztikus polinom a P_1-ben: $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, a P_2-ben: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$, ill. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_{23} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$. P_1-ben $\dim E_u = 1$, $\dim E_s = 2$ és a P_2-ben $\dim E_s = 3$. ■

2.39. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 1$, $\dim E_c = 1$ és $\dim E_u = 2$. ■

2.40. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,-1)$ és $P_2(2,-3)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} & 1 \end{pmatrix}$.
Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$. P_1-ben $\dim E_u = 2$ és a P_2-ben $\dim E_u = 1$, $\dim E_s = 1$. ■

2.41. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,0)$.
$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & -z & -y \end{pmatrix}$. $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. P_1-ben $\dim E_s = 2$, $\dim E_u = 1$ és a P_2-ben $\dim E_u = 2$, $\dim E_s = 1$. ■

2.42. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(1 - r^2)$ és $\dot{\varphi} = 1$.
A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint stabilis határciklusból és ezen határciklusra (kívülről és belülről) rácsavarodó pályákból áll. ■

2.43. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = -r^3$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint aszimptotikusan stabilis fókuszból és erre rácsavarodó pályákból áll. ■

2.44. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(1 - r^2)$ és $\dot{\varphi} = -1$.
A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint stabilis határciklusból és ezen határciklusra (kívülről és belülről) rácsavarodó pályákból áll. ■

2.45. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(1 - r)^2$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint belülről stabilis kívülről instabilis határciklusból és ezen határciklusra belülről rácsavarodó és kívülről távolodó pályákból áll. ■

2.46. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(r-1)(r-2)$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint stabilis határciklusból, $r = 2$ körvonalból, mint instabilis határciklusból és ezen határciklusokra kívülről, illetve belülről rácsavarodó és kívülről távolodó pályákból áll. ■

2.47. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = rf(r)$ és $\dot{\varphi} = 1$.
Ha $r < r_0$ esetén $f(r) > 0$ és $r > r_0$ esetén $f(r) < 0$, akkor f r_0-ban lokálisan monoton csökkenő, így ez esetben az $r = r_0$ körvonal stabilis határciklus. Ha $r < r_0$ esetén $f(r) < 0$ és $r > r_0$ esetén $f(r) > 0$, akkor f r_0-ban lokálisan monoton nő, így ez esetben az $r = r_0$ körvonal instabilis határciklus. Ha f nem vált előjelet az r_0-ban, akkor az $r = r_0$ körvonal félig stabilis határciklus. ■

2.48. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$.
Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. P_1 pont nyeregpont, viszont a P_2 pont kritikus. A pályagörbe egyenlete: $x - \ln|x| + y - \ln|y| = C$. P_2 stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. Létezik periodikus megoldása is. Az x-tengely instabilis, az y-tengely stabilis altér. ■

2.49. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek $\{(x,0): x \in \mathbb{R}\}$. A pályagörbék az $y = \frac{1}{2}x^2 - x + C$ parabolák. Az egyensúlyi helyzet $x \geq 1$ esetén instabilis és $x < 1$ esetén stabilis. ■

2.50. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix kritikus. A pályák az $x^4 + y^4 = C$ $(C > 0)$ görbék. Az origó centrum.. ■

2.51. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Az átviteli elv alapján a rendszer ekvivalens az alábbi rendszerrel $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x(1 + \alpha x^2)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-3\alpha x^2 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix kritikus. Létezik első integrálja: $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4$. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

2.52. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Az átviteli elv alapján a rendszer ekvivalens az alábbi rendszerrel $\dot{x} = y, \dot{y} = -kx$. Elemi úton eldönthető, hogy a rendszer egyensúlyi helyzete centrum. A pályagörbék egyenlete: $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$. Az origó centrum. ■

2.53. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2y \end{pmatrix}$, így $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix kritikus. Létezik első integrál: $V(x,y) = y^2e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A szeparátrix (a zárt és a nyílt pályák szétválasztója) az $y^2 = -x + \frac{1}{2}$ parabola lesz.

2.54. Megoldás: (Feladat) Látható, hogy ha $k \leq 0$, akkor nincs egyensúlyi pont. Ha $k > 0$. akkor a $P_k(\ln k, 0)$ az egyensúlyi pont. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^x & 0 \end{pmatrix}$, így $f'(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ mátrix kritikus, a rendszernek egyszerűen megadható az első integrálja: $V(x,y) = e^x - kx + \frac{1}{2}y^2$. A $P_k(\ln k, 0)$ stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

2.55. Megoldás: (Feladat) Ha $k \geq 0$, akkor nincs egyensúlyi pont. Ha $k < 0$. akkor a $P_k(\ln(-k), 0)$ az egyensúlyi pont. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$, így $f'(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$. A P_k-ban nyeregpont van. A pályagörbék: $\frac{1}{2}y^2 = e^x + kx + C$. ■

2.56. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_3(-1,0)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4x^3 - 2x & 0 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ és $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
A P_2 pont nyeregpont. A P_1 elfajult, a P_3 kritikus pont. Az első integrál:$\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$. A V függvény, mint kétváltozós függvény a P_3 egy (kis) környezetében konvex. Létezik a P_3-at megkerülő zárt pálya, a P_3 stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A P_1 nem stabilis egyensúlyi pont, ez csúcs. (Lásd. 2.33.c Megj.) Az origó nem stabilis. ■

2.57. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = -r^2$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint aszimptotikusan stabilis fókuszból és erre rácsavarodó pályákból áll. ■

2.58. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,1)$ és $P_2(0,-1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. A P_2 pont nyeregpont, viszont a P_1 pont kritikus. A fázisportré a függőleges tengelyre szimmetrikus a P_1 pontban centrum van és a nyeregből jobbról felfelé kimenő és balról bejövő pálya egybeesik, egy ún. homoklinikus pályát formálva. ■

2.59. Megoldás: (Feladat) Az első integrál: $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{4}x^4$. A pályagörbék egyenlete: $\frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{4}x^4 = C$. Következőleg van zárt pályagörbe, sőt minden megoldás periodikus.■

2.60. Megoldás: (Feladat) Az első integrál: $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4$. A pályagörbék egyenlete: $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4 = C$. Az egyetlen egyensúlyi helyzet, az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. Következőleg van zárt pályagörbe, sőt minden megoldás periodikus.■

2.61. Megoldás: (Feladat) A rendszer Hamilton-típusú. A rendszer Hamilton-függvénye:
$H(x,y) = -x^2y + y - \frac{1}{3}y^3$. Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,1), P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$ és $P_4(-1,0)$. A P_1 és P_2 pontok centrumpontok, míg a P_3 és P_4 pontok nyeregpontok. Az y tengelyre szimmetrikusak a pályagörbék. Így a 2.40. Következmény miatt, a P_1 és P_2 pont centrum. ■

2.62. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0), P_2(1,0), P_3(-1,0)$. A rendszer Hamilton-típusú. A megfelelő ekvivalens differenciálegyenlet-rendszer $\dot{x} = y, \dot{y} = -U'(x)$, ahol U egyszer folytonosan differenciálható valós függvény. $U(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x^4$. A P_1 pont nyeregpont, a P_2 és P_3 pont centrum. A pályagörbék szimmetrikusak az x és az y-tengelyre is. A rendszer Hamilton-függvénye: $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$. ■

2.63. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A rendszer Hamilton-típusú.
A megfelelő ekvivalens differenciálegyenlet-rendszer $\dot{x} = y, \dot{y} = -U'(x)$, ahol U egyszer folytonosan differenciálható valós függvény. $U(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. Az origó centrum. A Hamilton-függvény: $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$ a teljes számsíkon konvex, minden megoldás periodikus. ■

2.64. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(n\pi, 0)$ és a $P_2(\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi, 0)$, ahol n és m egész számok. A rendszer Hamilton-típusú. Az ekvivalens differenciálegyenlet-rendszer $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -U'(x)$, ahol U egyszer folytonosan differenciálható valós függvény. $U(x) = -\sin^2 x - \cos x$. A P_1 pont nyereg, a P_2 pont centrum . A fáziskép az x-tengely mentén 2π-szerint periodikus. ■

2.65. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=x^2+y^2$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=2(x^4+y^4)$. A 2.16. Tétel miatt az origó instabilis. ■

2.66. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=x^2+y^4$. Ekkor $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-2x^6-4y^6(1-y^2)<0$, ha $-1<y<1$, így a V függvény teljesíti a 2.8. Állítás Ljapunov-féle aszimptotikus stabilitás feltételét az origó egy (kis) környezetében, az origó (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.67. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y):=ax^2+by^2$! Ha $a=2b$, akkor $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-4x^4-2y^4$. A 2.8. Állítás miatt az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.68. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y):=ax^{\propto}+by^{\beta}$! Ha $4a-6b=0$ és $\alpha=6,\ \beta=4$, akkor $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=0$. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A koordinátatengelyek minden pontja egyensúlyi pont. A pályák az y-tengelyhez közelednek és az x-tengelytől távolodnak. A pályák az y-tengelyen lévő egyensúlyi helyzetekhez tartanak. ■

2.69. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=-x^4+2y^2$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-(2x^3-y)^2-3y^2(1-\frac{4}{3}y)$. Az origó egy (kis) környezetében $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)<0$ és a $\mathrm{V}(x,y)$ függvénynek az origó nem lokális minimuma. A 2.15. Állítás szerint a $(0,0)$ pont instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.70. Megoldás: (Feladat) A Ljapunov-függvény: $\mathrm{V}(x,y)=2x^2+y^4$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-4x^4\le\ 0$. A 2.8 Állítás miatt az origó stabilis. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.71. Megoldás: (Feladat) Ljapunov-függvény: $\mathrm{V}(x,y)=x^4+2y^2$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-4x^6\le 0$. A 2.8 Állítás miatt az origó stabilis. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.72. Megoldás: (Feladat) Próbálkozzunk $\mathrm{V}(x,y)=ax^2+by^2+cy^4$ alakú Ljapunov-függvény keresésével! Ha $a=2$, $b=4$ és $c=1$, akkor a $\mathrm{V}(x,y)=2x^2+4y^2+y^4$. Ljapunov-függvényre: $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=\ -(2x-4y)^2-8y^4<0$, ha $(x,y)\ne(0,0)$. Továbbá, $\mathrm{V}(0,0)=0$, $\mathrm{V}(x,y)>0$, ha $(x,y)\ne(0,0)$. A 2.8. Állítás miatt az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont. ■

2.73. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=x^2+y^2$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-2x^4-2y^4<0$, ha $(x,y)\ne(0,0)$, A V függvény teljesíti a 2.8. Állítás Ljapunov-féle aszimptotikus stabilitás feltételét, következőleg az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.74. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=2x^2+y^2$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-4x^4-4y^4<0$, ha $(x,y)\ne(0,0)$, A V függvény teljesíti a 2.8. Állítás Ljapunov-féle aszimptotikus stabilitás feltételét, következőleg az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.75. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=x^2+y^2$ Ljapunov-függvény esetén: $(\underline{L_f}V)\,(x,y)=-2x^4\le 0$. Így a 2.8 Állítás miatt az origó stabilis egyensúlyi helyzet. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.76. Megoldás: (Feladat) Az ekvivalens rendszer $\dot{x}=y,\dot{y}=-f(x)y-g(x)$. A linearizált rendszer mátrixa $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -f'(x)y-g'(x) & -f(x)\end{pmatrix}$. Az origóban ez $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g'(0) & -f(0)\end{pmatrix}$ alakú. Legyen $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)$, ahol $G'(x)=g(x)$. $(\underline{L_f}\mathrm{V})\,(x,y)=-f(x)y^2\le 0$, ha $(x,y)\ne(0,0)$. Az origó stabilis egyensúlyi helyzet. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.77. I. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = x^4 + y^4$. $(L_f V)\ (x,y) = 0$, a pályák egyenlete: $x^4 + y^4 = C$. Az origó stabilis. A koordinátatengelyek minden pontja egyensúlyi pont. A pályák az y-tengelyhez közelednek és az x-tengelytől távolodnak. ■

2.77. II. Megoldás: (Feladat) A pályák $x^4 + y^4 = C$ alakúak. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

2.78. Megoldás: (Feladat) : $V(x,y) = x^2 + 2y^2$. $(L_f V)\ (x,y) < 0$, ha $(x,y) \neq (0,0)$,
Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.79. Megoldás: (Feladat) Legyen $V(x,y) = x + y^2$. Ekkor $V(0,0) = 0$, $V(k,k) > 0$ minden $k > 0$-ra és $(L_f V)\ (x,y) = (x+y)^2 + 2y^2 > 0$ minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén. A 2.18. Állítás miatt az origó. ■

2.80. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = x^2 + y^2$. Az origó (kis) környezetében $(L_f V)\ (x,y) < 0$. A 2.8. Állítás miatt az origó (lokálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.81. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = ax^2 + by^2$ esetén
$(L_f V)\ (x,y) = (2a - 8b)xy - 2ax\sin^3 x - 2by\sin^3 y$. Legyen $a = 1$ és $b = \frac{1}{4}$. Ekkor
$(L_f V)\ (x,y) = -2x\sin^3 x - \frac{1}{2}y\sin^3 y < 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ esetén. Az origó egy környezetében teljesül a 2.8. Állítás feltétele. Az origó (lokálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.82. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = x^2 + y^2$ kandidánssal próbálkozva. Az origó (kis) környezetében $(L_f V)\ (x,y) \leq 0$. Így a 2.8. Állítás miatt az origó stabilis egyensúlyi helyzet. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. A vonzási halmaz tartalmazza az $\{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$ halmazt. ■

2.83. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = x^2 + y^2$ kandidánssal próbálkozva a feltételek miatt $2y^2 Q(x,y) < 0$. A 2.8. Állítás miatt az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.84. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_f V)\ (x,y) \leq 0$. A 2.8 Állítás miatt az origó stabilis egyensúlyi helyzet. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.85. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = ax^\alpha + by^\beta$! Behelyettesítéssel látszik, hogy $\alpha = 3$, $\beta = 4$ és például $a = 20$, $b = -9$ választás esetén a $(L_f V)\ (x,y) = -120x^6 - 108y^4 < 0$. Mivel ez esetben a $V(x,y) = 20x^3 - 9y^4$ függvénynek az origóban nincs lokális minimuma, ezért a 2.15. Állítás miatt az origó instabilis egyensúlyi pont. ■

2.86. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = xy$. Ekkor $V(0,0) = 0$, $V(k,k) > 0$ minden $k > 0$-ra és $(L_f V)\ (x,y) = x^4 + y^4 > 0$ minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén. Így a 2.18. Állítás miatt az origó instabilis egyensúlyi pont. ■

2.87. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = xy$. $V(0,0) = 0$, $V(k,k) > 0$ minden $k > 0$-ra és $(L_f V)\ (x,y) = x^2 + y^2 - xy\sin x$. $(L_f V)\ (x,y) > 0$. Így teljesülnek a 2.16. Állítás feltételei, az origó instabilis egyensúlyi pont. ■

2.88. Megoldás: (Feladat) A $V(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_f V)\ (x,y) > 0$ minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén. Így a 2.16. Állítás miatt az origó instabilis. ■

2.89. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := axy^2 + bx^3$! $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) = -3ax^2y^2 - ay^4 + 3bx^4 - 3bx^2y^2 =$ ($a = -1$, $b = 1$ választás esetén) $= 3x^4 + y^4$, így $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) = 3x^4 + y^4 > 0$ minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén. Ugyanakkor a $\mathrm{V}(x,y) = -xy^2 + x^3$ függvényre teljesülnek a 2.18. Állítás feltételei, ugyanis $\mathrm{V}(0,0) = 0$ és $\mathrm{V}(k,0) > 0$ minden $k > 0$-ra. Az origó instabilis. ■

2.90. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = -x^4 + 2y^2$. $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) < 0$. A 2.15. Állítás miatt az origó instabilis. ■

2.91. Megoldás I: (Feladat) $f'(0,0) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. Legyen $a \neq 0$, $\lambda_{12} = \frac{2a\pm\sqrt{-4}}{2} = a \pm i$. Ha $a > 0$, akkor az origó instabilis fókusz, ha $a < 0$, akkor az origó aszimptotikusan stabilis fókusz.
Ha $a = 0$, akkor a differenciálegyenlet az alábbi alakot ölti: $\dot{x} = -y + x^3$, $\dot{y} = x + y^3$.
$\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) > 0$, ha $(x,y) \neq (0,0)$, és $\mathrm{V}(0,0) = 0$, $\mathrm{V}(x,y) > 0$, ha $(x,y) \neq (0,0)$.
A 2.16. Állítás miatt az origó instabilis. ■

2.91. Megoldás II: ($a = 0$ esetben) $\dot{r} = r^3(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)$ és $\dot{\varphi} = 1 - r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi$.
Ebből következőleg: $\dot{r} > 0$, azaz nem lehet stabilis az origó. ■

2.92. Megoldás: (Feladat) A $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) = 2k(x^2 + y^2)^2$. Így ha $k > 0$, akkor $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) > 0$, míg $k < 0$, akkor $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) < 0$. Így $k > 0$ esetén az origó instabilis és $k < 0$ esetén az origó (globálisan) aszimptotikus stabilis a 2.8. Állítás miatt. $k = 0$ esetén a differenciálegyenlet: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ alakot ölt. Az origó centrum. ■

2.93. Megoldás: (Feladat) Az átviteli elv alapján a rendszer ekvivalens az alábbi rendszerrel.
$\dot{x} = y, \dot{y} = axy - x$. Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 - y - \frac{1}{a}\ln(\frac{1}{a} - y)$. $U = \left\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y < \frac{1}{a}\right\}$ tartományon minden megoldás periodikus. Ha $y > \frac{1}{a}$, akkor a trajektóriák nem zártak. Az $y = \frac{1}{a}$ megoldás a zárt és nyílt pályákat szétválasztó szinguláris megoldás. ■

2.94. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = 0$ és $\dot{\varphi} = r^2$. A pályák origó középpontú körök, amelyeken a megoldás különböző szögsebességgel halad, ugyanis a $\dot{\varphi}$ most nem állandó. Két közeli pont közül a külső elhagyja a belsőt. Ebből következőleg az egyik megoldás sem lehet stabilis, de minden megoldás Poincaré-értelemben (orbitálisan) stabilis. Az origó Ljapunov-stabilitás. ■

2.95. Megoldás: (Feladat) Legyen $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x f(t,0)dt$. Az 1. és a 3. feltétel miatt a $\mathrm{V}(0,0) = 0$ és $\mathrm{V}(x,y) > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$, másrészt $(L_f\mathrm{V})\,(x,y) = (f(x,y) - f(x,0))y \leq 0$, azaz $L_f\mathrm{V}$ negatív szemidefinit. Így a 2.8. Állítás miatt az origó stabilis. ■

2.96. Megoldás: (Feladat) Alkalmazzuk a 2.95. feladatban megfogalmazott állítást!
Tekintsük a rendszerrel ekvivalens $\dot{x} = y, \dot{y} = -x^3 - x^2\,\mathrm{y}$ rendszert . $f(x,y) = -x^3 - x^2\,\mathrm{y}$. $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4$ Ljapunov-függvényre teljesülnek a 2.8. Állítás feltételei, az origó stabilis. ■

2.97. Megoldás: (Feladat) Alkalmazzuk a 2.95. feladatban megfogalmazott állítást!
Tekintsük a rendszerrel ekvivalens rendszert: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + x^3 - x^2\mathrm{y}$. $f(x,y) = -x + x^3 - x^2\mathrm{y}$. $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4$. Ljapunov-függvényre teljesülnek a 2.8. Állítás feltételei, az origó stabilis. ■

2.98. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = \frac{1}{2}Ax^2 + B\int_0^y f(t)dt$. Léteznek olyan A és B pozitív számok, hogy a V függvényre teljesüljön, hogy $V(0,0) = 0$ és $V(x,y) > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$. $(L_{\underline{f}}V)(x,y) = -aA(x - \frac{Ab+Bc}{2aA}f(y))^2 + \frac{f^2(y)}{Aa}(-ABad + \frac{1}{4}(Ab+Bc)^2)$. A kifejezés akkor lesz negatív, ha 1. $A > 0$ és 2. $-ABad + \frac{1}{4}(Ab+Bc)^2 < 0$, azaz $(Ab+Bc)^2 - 4ABad < 0$. Az a, b, c és d pozitív számok esetén megválasztható az A és B úgy, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül. ■

2.99. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A differenciálegyenlet-rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3$. A pályagörbék a $xy^2 - \frac{1}{3}x^3 = C$ alakú görbék. Az origó instabilis. A pályák aszimptotái az $x = 0$ és az $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ egyenesek. ■

2.100. Megoldás: (Feladat)$\dot{x} = y\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x}{2}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$, $\dot{y} = x\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{2}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$.
A két egyensúlyi helyzet a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pont. A pályák az 1 sugarú, origó középpontú körvonalhoz közelítenek az óramutató járásával ellenkező irányban. Az $(1,0)$ pont határértéke a pont környezetéből induló minden (nem nulla) megoldásnak, azaz az $(1,0)$ pont *lokálisan* attraktív. Viszont ez a pont nem lesz stabilis. A $(0,0)$ egyensúlyi helyzet instabilis. ■

2.101. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r(1-r^2)$ és $\dot{\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{2}$. A két egyensúlyi helyzet a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pont. A pályák az 1 sugarú, origó középpontú körvonalhoz közelítenek az óramutató járásával ellenkező irányban. A $\varphi = 0$ félegyenesről nem mennek le a megoldások. Itt $x > 1$ esetén balra, $x < 1$ esetén jobbra haladnak. Az $(1,0)$ pont határértéke a pont környezetéből induló minden (nem nulla) megoldásnak, azaz az $(1,0)$ egyensúlyi helyzet *lokálisan* attraktív. Viszont, hogy ez a pont nem lehet stabilis. Az $(0,0)$ egyensúlyi helyzet instabilis. ■

2.102. Megoldás: (Feladat) Tekintsük a rendszerrel ekvivalens $\dot{x} = y, \dot{y} = -\frac{g}{l}\sin x - \frac{k}{m}y$.
Az egyensúlyi helyzetek: $(n\pi, 0)$ pontok. $k = 0$ esetén a linearizált rendszer mátrixa az origóban kritikus. $V(x,y) = mgl(1-\cos x) + \frac{1}{2}ml^2y^2$ az $U = \{(x,y): |x| < \pi\}$ környezetben. Ekkor $V(0,0) = 0$ és $V(x,y) > 0$, $(x,y) \in U$, $\frac{d}{dt}V(\underline{x}(t)) = -kl^2y^2 \leq 0$. Az origó stabilis. $S = \{(x,y) \in U: \dot{V}(x,y) = 0\}$. Ekkor $S = \{(x,y) \in U: y = 0\}$. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.103. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és a $P_3(-1,-1)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1+4xy & 2x^2-3y^2 \end{pmatrix}$. $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ $(L_{\underline{f}}V)(x,y) = -(x^2-y^2)^2 \leq 0$ tetszőleges x és y esetén. Így az origó stabilis. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó lokálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet és LaSalle-féle invariancia tétel miatt a vonzási tartománya tartalmazza az $\{(x,y): \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 < 1\}$ halmazt. ■

2.104. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = \frac{r}{(1+r^4)(1+u^2)^2}(u^4 - 2u^3 + u - 1 + u^3r^2\sin^2\varphi)$, ahol $u = \operatorname{tg}\varphi$.
Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A pályák az origóra szimmetrikusak. A nullvonalak az $y = 0$, $y = 2x$, $y^5 + x^2y - x^3 = 0$ görbék. Jelölje M és N az alábbi szektorokat:
$M = \{(x,y): -y < x < \frac{1}{2}y\}$ és $N = \{(x,y): y < x < \frac{5}{4}y\}$. A pályák M és N-en balról jobbra haladnak. A $y^5 + x^2y - x^3 = 0$ görbe és az $y = \frac{4}{5}x$ egyenes az $x = \frac{25}{32}$ és az $y = \frac{5}{8}$ pontokban metszi egymást. Jelölje $P := (\frac{25}{32}, \frac{5}{8})$. Legyen S az OP és az x-tengely által meghatározott szektor. Itt a pályák csökkennek és balra haladnak és az itt haladó pályák az origóba tartanak. Viszont az origó instabilis, ugyanis az origó (kis) környezetéből induló pályák elhagyják ezt a környezetet, azaz közelről induló pályák nem maradnak közel. Az origó globálisan attraktív. ■

2.105. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = 0$ és $\dot{\varphi} = x - k = -k + r\cos\varphi$. Tegyük fel, hogy $k \neq 0$. Az egyensúlyi helyzetek a $(0,0)$ és az (k,y) pontok, ahol y tetszőleges. Az $x = k$ egyenest nem metsző pályák origó körüli körök. Az $x = k$ egyenest érintő kör egy homoklinikus pályából és az egyenesen lévő egyensúlyi pontból áll. Az $x = k$ egyenest metsző körök egy heteroklinikus pályából és két egyensúlyi pontból állnak. Az $x > k$ félsíkban a pályák pozitív, az $x < k$ félsíkban negatív irányításúak. Így az origó centrum. A (k,y) pontok stabilis, illetve instabilis egyensúlyi helyzetek aszerint, hogy y pozitív, illetve negatív. Az $(k,0)$ egyensúlyi helyzet instabilis. Az azonosan nulla megoldáson kívül minden megoldás instabilis, ugyanis két közeli pont közül a külső elhagyja a belsőt vagy lemarad tőle. $k = 0$ esetben a pályák origó körüli körök, heteroklinikus pályák. Ekkor nincs periodikus megoldás. A pályák a második tengelynél véget érnek. ■

2.106. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és $\dot{\varphi} = -xy = -r^2\sin\varphi\cos\varphi$. A rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete az origó. Az egyensúlyi helyzet instabilis. Az első és a harmadik negyedben a pályák negatív, míg a második és a negyedik negyedben pozitív körüljárásúak. ■

2.107. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r^3$. Megoldva a differenciálegyenletet, $r^2(t) = \frac{-1}{2(t+c)}$. $t = -c$ esetén az $r(t)$ függvény nem korlátos. A feltételekből könnyen meghatározható a c értéke. A kezdeti érték feltételek miatt: $r(0) = 1$. Ekkor $c = -\frac{1}{2}$, azaz ekkor $r(t) = \sqrt{\frac{1}{1-2t}}$. Ebből következőleg $t = \frac{1}{2}$. ■

2.108. Megoldás: (Feladat) A rendszer Hamilton-típusú. $H(x,y) = (-y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3)\frac{1}{2}$.

Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0), P_2(-2,0)$, $P_3(1,\sqrt{3})$ és $P_4(1,-\sqrt{3})$. A P_1 pont centrum, míg a P_2, P_3 és P_4 pontok nyeregpontok. A $-y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3 = C$ görbék a pályák a fázistérben. Mivel $H(x,y) = -y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3$ függvény a $(0,0)$ pont (kis) környezetében konvex, ezen környezetben minden megoldás periodikus. ■

2.109. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0), P_2(-1,1)$ és $P_3(-1,-1)$. A linearizált rendszer mátrixa: $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1-3y^2 \\ -1 & -2y \end{pmatrix}$. A P_2 és P_3 pont nyeregpont. A $P_1(0,0)$ kritikus pont. A pályák az x-tengelyre szimmetrikusak. Alkalmazva a 2.40. Következményt, az origó centrum. ■

2.110. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet: $P_1(0,0)$. A linearizált rendszer mátrixa:$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A $P_1(0,0)$ pont kritikus pont. A fáziskép a függőleges tengelyre szimmetrikus. A 2.40. Következményt felhasználva, az origó centrum. ■

2.111. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek a $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és $P_3(-1,-1)$ pontok. A P_1 pont nyeregpont, a P_2 és P_3 pontokban instabilis fókusz van. Az $x = 0$ és az $y = 0$ tengelyek féltengelyei pályát alkotnak. $\mathrm{V}(x,y) = x - \ln x + \frac{1}{2}y^2 - \ln y$. A V függvénynek a P_2 pontban lokális minimuma van. Mivel $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) \geq 0$, ezért a pályák a V szintvonalain kifelé haladnak. Így az $(1,1)$ pont szükségképpen instabilis. Az $y = 1$ egyenes nem tartalmaz teljes pályát, ■

Megjegyzés: A $\mathrm{V}(x,y) = x - \ln x + y + \frac{1}{y}$ függvény is egy alkalmas Ljapunov-függvénye. ⊡

2.112.I. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. A pályagörbék egyenlete a fázissíkon: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$ alakú. A rendszer pályái $(0,K)$ középpontú, K sugarú körsorok és az origó. Az x-tengely invariáns. Látható, hogy itt a pályák jobbra haladnak. A körsorok homoklinikus pályák és az origó nem stabilis egyensúlyi helyzet. A valós tengely pozitív részét kivéve bármely pontból induló megoldás az origóba tart (az origó vonzási halmaza), de az origó mégsem stabilis. ■

2.112.II. Megoldás: (Feladat) $z(t) := x(t) + iy(t)$. $\dot{z}(t) = z^2(t)$. $z(t) = \frac{1}{C-t}$, ahol C tetszőleges komplex konstans. A $z(0) = z_0$ kezdeti értéket teljesítő megoldás $z(t) = \frac{z_0}{1-z_0 t}$. Határozzuk meg a függőleges tengelyről induló megoldásokat! Ezekre $z(0) = iK$, így $C = \frac{1}{iK}$, ahol K tetszőleges valós konstans. Rövid számolással kapható: $z(t) = \frac{Ki-tK^2}{1+t^2K^2}$. Ekkor $x(t) = \frac{-tK^2}{1+t^2K^2}$ és $y(t) = \frac{K}{1+t^2K^2}$. Ezzel az $x^2 = (K-y)y$ összefüggést kapjuk. Ez egy olyan kör, amelynek a középpontja a $(0, K)$, a sugara K. A felső félsíkban pozitív irányban haladnak a megoldások, az alsó félsíkban pedig negatív irányban. ■

2.113. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+2xy & -1+x^2 \end{pmatrix}$. Az origó aszimptotikusan stabilis fókusz. A $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$ Ljapunov-függvény esetén $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 2y^2(x^2-1)$. Így a 2.8. Tétel miatt, ha $|x| < 1$, akkor az origó stabilis. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. Tekintsük a $S_{c^*} = \{(x,y) \in U\colon x^2 + y^2 < 1\}$ halmazt. Ez korlátos és ekkor $\dot{\mathrm{V}}(x,y) \le 0$, ha $(x,y) \in S_{c^*}$. A 2.26. Megjegyzés miatt az origó egy vonzási tartománya tartalmazza a S_{c^*} -t. ■

2.114. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -8-y^2 & -2xy-9y^2 \\ -4xy+2y^2 & -2x^2+4xy \end{pmatrix}$. Az origóban a mátrixa kritikus $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -8$ sajátértékkel. A $\mathrm{V}(x,y) = 2x^2 + 3y^2$. Ljapunov-függvény esetén $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = -16x^2(2+y^2)$. Az origó stabilis. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. $\mathrm{V}(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ Ljapunov-függvény radiálisan nem korlátos, alkalmazva a 2.13. állítást, az origó globálisan aszimptotikusan stabilis.■

2.115. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet a $P_1(0,0)$ és $P_2(\frac{1}{2}, 0)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -1+4x & 2y \\ 0 & 2y-1 \end{pmatrix}$. Az origó elfajult stabilis csomópont. A $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$ Ljapunov-függvény esetén $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 2(x^2(2x-1) + y^2(x-1+y))$. Így a 2.8. Tétel miatt, ha $x < \frac{1}{2}$ és $y < 1-x$, akkor $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) < 0$, azaz az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. A $T = \left\{(x,y)\colon x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$ vonzó halmaz és az origó vonzási tartománya tartalmazza a T halmazt. ■

2.116. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y) = \begin{pmatrix} -2+3x^2y^2 & 1+2x^3y \\ -1+2xy^3 & -2+3x^2y^2 \end{pmatrix}$. Az origó stabilis fókuszpont. A rendszer $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x})$ alakú, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^3y^2 \\ x^2y^3 \end{pmatrix}$. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{\underline{P}}\,\underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -\underline{x}^T\underline{\underline{Q}}\,\underline{x} + 2\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{g}(\underline{x})$. (*)

Megoldva a Ljapunov egyenletet $\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ választással, $\underline{\underline{P}}$-re a $\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ mátrix adódik.

$\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} = x^2y^2 < \frac{(x^2+y^2)^2}{2} = \frac{|\underline{x}|^4}{2} < \varepsilon \;\leftrightarrow\; |\underline{x}| < \sqrt[4]{2\varepsilon}$. Így (*) miatt $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) < -|\underline{x}|^2(1 - 2\varepsilon|\underline{\underline{P}}|)$.

A $\underline{\underline{P}}$ választása miatt $|\underline{\underline{P}}| = \frac{1}{4}$ (A $\underline{\underline{P}}$ maximális sajátértéke), ezért $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) < 0$, ha $\varepsilon < \frac{1}{2|\underline{\underline{P}}|} = 2$. (**)

(**) miatt $|\underline{x}| < \sqrt[4]{2\varepsilon} < \frac{1}{\sqrt[4]{|\underline{\underline{P}}|}}$, így $\lambda_{min}(\underline{\underline{P}})|\underline{x}|^2 < \lambda_{min}(\underline{\underline{P}})\frac{1}{\sqrt{|\underline{\underline{P}}|}}$. A $T = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon \mathrm{V}(\underline{x}) < \frac{1}{2}\}$ vonzó halmaz. Így az origó egy vonzási halmaza $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 < 2\}$. ■

2.117. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1-3x^2 & -2\end{pmatrix}$. Az origó elfajult stabilis csomópont. A rendszer $\dot{\underline{x}}(t)=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t)+\underline{g}(\underline{x})$ alakú, ahol $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ és $\underline{g}(\underline{x})=\begin{pmatrix}0\\ -x^3\end{pmatrix}$. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}}+\underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}}=-\underline{\underline{Q}}$. Válasszuk meg $\underline{\underline{Q}}=\underline{\underline{E}}$-nak, ekkor $\underline{\underline{P}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. A $\underline{\underline{P}}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_{12}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy $|\underline{g}(\underline{x})|\le\varepsilon|\underline{x}|$ minden $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$ esetén. Így $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$ esetén $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le-|\underline{x}|^2(\lambda_{min}(\underline{\underline{Q}})-2\lambda_{max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon)$. Elegendően kicsi ε-ra $\lambda_{min}(\underline{\underline{Q}})-2\lambda_{max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon>0$, ezért ilyen ε-ra az $S(\underline{0},\delta)$-n a $\mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$ függvény pozitív definit és a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ itt negatív definit. $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})<0$, ha $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$, ahol $\varepsilon<\frac{\lambda_{min}(\underline{\underline{Q}})}{2\lambda_{max}(\underline{\underline{P}})}$. A 2.44. Megjegyzésben foglaltak szerint válasszuk az ε-t olyan kicsire, hogy $\frac{\lambda_{min}\underline{\underline{Q}}}{2\lambda_{max}\underline{\underline{P}}}>\varepsilon$. Mivel $\lambda_{max}\underline{\underline{P}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\lambda_{min}\underline{\underline{Q}}=1$. Így $\frac{\lambda_{min}\underline{\underline{Q}}}{2\lambda_{max}\underline{\underline{P}}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$. Következésképpen válasszuk ε-t pl. $\varepsilon=\frac{1}{4}$-nek és legyen δ *egy olyan* pozitív szám, amelyre $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$ esetén $|\underline{g}(\underline{x})|\le\frac{1}{4}|\underline{x}|$, azaz $\left|\begin{pmatrix}0\\ -x^3\end{pmatrix}\right|\le\frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right|$. Így az origó egy attraktivitási tartománya: $T=\{\underline{x}\colon \mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}=\frac{3}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2<r\}\subset S(\underline{0},\delta)$.■

2.118. Megoldás: (Feladat) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2x & -2\end{pmatrix}$. Az origó stabilis csomópont. A rendszer $\dot{\underline{x}}(t)=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t)+\underline{g}(\underline{x})$ alakú, ahol $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ és $\underline{g}(\underline{x})=\begin{pmatrix}0\\ x^2\end{pmatrix}$. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}}+\underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}}=-\underline{\underline{Q}}$. Válasszuk meg $\underline{\underline{Q}}=\underline{\underline{E}}$-nak. $\underline{\underline{P}}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. A $\underline{\underline{P}}$ sajátértékei: $\lambda_{12}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{12}$. Így minden $\varepsilon>0$ esetén létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy $|\underline{g}(\underline{x})|\le\varepsilon|\underline{x}|$ minden $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$ esetén. $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$ esetén $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le-|\underline{x}|^2(\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}})-2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon)$. Elegendően kicsi ε-ra $\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}})-2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon>0$, ezért ilyen ε-ra az $S(\underline{0},\delta)$-n a $\mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$ függvény pozitív definit és a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ itt negatív definit. $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})<0$, ha $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$, ahol $\varepsilon<\frac{\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}})}{2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})}$. A 2.44. Megjegyzésben foglaltak szerint válasszuk az ε-t olyan kicsire, hogy $\frac{\lambda_{\min}\underline{\underline{Q}}}{2\lambda_{\max}\underline{\underline{P}}}>\varepsilon$. Mivel $\lambda_{max}\underline{\underline{P}}=\frac{5+\sqrt{5}}{12}$ és $\lambda_{min}\underline{\underline{Q}}=1$. Így $\frac{\lambda_{\min}\underline{\underline{Q}}}{2\lambda_{\max}\underline{\underline{P}}}=\frac{6}{5+\sqrt{5}}$. Következésképpen, válasszuk ε-t pl. $\varepsilon=\frac{1}{2}$-nek és a 2.44. Megjegyzésben foglaltak szerint haladva, legyen δ *egy* olyan pozitív szám, amelyre $\underline{x}\in S(\underline{0},\delta)$ esetén $|\underline{g}(\underline{x})|\le\frac{1}{2}|\underline{x}|$, azaz $\left|\begin{pmatrix}0\\ x^2\end{pmatrix}\right|\le\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right|$. Így az origó attraktivitási tartománya: $T=\{\underline{x}\colon \mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}y^2<r\}\subset S(\underline{0},\delta)$.■

2.119. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & \alpha-6\alpha y^2\end{pmatrix}$, így $f'(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$ mátrix nem kritikus, az origó stabilis. $\mathrm{V}(x,y)=x^2+3y^2$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})=6y^2(1-2y^2)$. Ha $1-2y^2>0$, azaz $|y|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le 0$. Az origó stabilis. Legyen $U=\left\{(x,y)\colon x^2+3y^2<\frac{3}{2}\right\}$. Ekkor a Barbasin-Kraszovszkij tételt alkalmazva, az origó aszimptotikusan stabilis is és az U halmaz az origó (egy) vonzási halmaza. ■

2.120. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_{23}(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1+3y^2\end{pmatrix}$. így $f'(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Az origó stabilis fókusz, $\mathrm{V}(x,y)=2x^2+y^2$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})=-4x^2+2y^2(y^2-1)$. Ha $|y|<1$, akkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})<0$. Az origó aszimptotikusan stabilis. Legyen $U=\{(x,y)\colon 2x^2+y^2<1\}$. Ekkor az U halmaz az origó (egy) vonzási halmaza. ■

2.121. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = x^2 - y^2$. $\dot{V}(\underline{x}) = 2(x^4 - y^4)$. Legyen (a Csetajev-tétel jelöléseivel összhangban) $U_1 = \{(x,y): |y| < |x|\}$ és U az origó tetszőleges környezete. Ekkor

1. $(0,0) \in \partial U_1$
2. $V(x,y) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
3. $\dot{V}(\underline{x}) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
4. $V(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in U \cap \partial U_1$

Következésképpen a Csetajev-tétel miatt az origó instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.122. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = xy$. $\dot{V}(\underline{x}) = y^2 + x^2 + x^2y^2$. Legyen (a Csetajev-tétel jelöléseivel összhangban) $U_1 = \{(x,y): xy > 0\}$ és U az origó tetszőleges környezete. Ekkor

1. $(0,0) \in \partial U_1$
2. $V(x,y) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
3. $\dot{V}(\underline{x}) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
4. $V(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in U \cap \partial U_1$

Következésképpen a Csetajev-tétel miatt az origó instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.123. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$. Ekkor $\dot{V}(\underline{x}) = -x^2(1 - \frac{3}{2}y) - y^2(1-x)$. Látható, hogy ha $x < 1$ és $y < \frac{2}{3}$, akkor $\dot{V}(\underline{x}) < 0$. Az origó aszimptotikusan stabilis. Az origó vonzási halmaza az $U = \left\{(x,y): \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 < \frac{1}{9}\right\}$. ■

2.124. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_{2345}(\pm 1, \pm 1)$.
$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - 1 & 2xy \\ -2xy & -x^2 + 1 \end{pmatrix}$. Egyedül az origó nem kritikus, ez nyeregpont. A pályák szimmetrikusak az origóra. A pályagörbe egyenlete: $\frac{1}{2}x^2 - \ln x + \frac{1}{2}y^2 - \ln y = C$. A (1,1) pont stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A P_{2345} pont centrum. Az x-tengely stabilis, az y-tengely instabilis altér. ■

2.125. Megoldás: (Feladat) Csomópont esetén a pályák az origóban egy adott egyenest érintenek, ezért $\lim_{t \to +\infty} r(t) = 0$, illetve $\lim_{t \to -\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t)| < \infty$. Aszerint, hogy az origó stabilis vagy instabilis. Fókuszpont esetén a pályák az origót végtelen sokszor megkerülik, így $\lim_{t \to \pm\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t \to \pm\infty} |\varphi(t)| = \infty$, aszerint, hogy az origó stabilis vagy instabilis. Nyeregpont esetén láttuk, hogy a stabilis és instabilis alterek lesznek az állításban szereplő pályák. Az ezektől különböző többi pálya pedig $t \to +\infty$ esetén és $t \to -\infty$ esetén elhagyja az origó tetszőleges környezetét. Centrum pont esetén minden pálya periodikus. ■

2.126. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$.
a P_1 stabilis csomópont, P_2 nyeregpont van. $V(x,y) = x^2 + y^2$. $\dot{V}(\underline{x}) = -2\{x^2(1-y) + y^2(1-x)\}$. Látható, hogy ha $1 - x > 0$ és $1 - y > 0$, akkor $\dot{V}(\underline{x}) < 0$. Jelölje $W = \{(x,y): x < 1, y < 1\}$. Az origó vonzási halmaza: $U = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$. A P_2 nyeregpont lokális instabilis sokasága az $y = x$ egyenes és a lokális stabilis sokasága $x - \ln|x| - y + \ln|y| = 0$. Az origó globális stabilis sokasága a $T = \{(x,y):\ x = 0, y = 0, x - \ln|x| - y + \ln|y| < 0\}$ ■

2.127. Megoldás: (Feladat) $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. $\dot{V}(\underline{x}) = -2(x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz)$.
Az origó egy vonzási halmaza az $U = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$. ■

2.128. I. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) := \alpha\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$. Ekkor a V pozitív definit és $\dot{V}(\underline{x}) = -\beta y^2$.
Így $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$, azaz az origó stabilis A Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet, azaz a vonzási halmaza az egész $\mathbb{R}^2$. ■

2.129. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(-4,4)$. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -4\\ 4 & 2y\end{pmatrix}$. A P_2 pontban nyeregpont van, viszont a P_1 kritikus pont. Az invariáns pálya: $y(x)=x-4$. Tekintsük az $A(x,y):=(x+y,x-y)$ lineáris transzformációt. Jelölje $u=x+y, v=x-y$. Ekkor a transzformált rendszer: $\dot{u}=4v+\frac{1}{2}(u^2+v^2)=f(u,v)$, $\dot{v}=u(v-4)=g(u,v)$. Ez utóbbi rendszer pályái szimmetrikusak az idő megfordításával a v tengelyre és természetesen az origó ez utóbbi rendszernek is egyensúlyi helyzete. A rendszer invariáns a $(t,u)\to(-t,-u)$ transzformációra. Az origó az (u,v) síkon centrum. Az eredeti rendszer esetén is centrum az origó. ■

Megjegyzés: Megmutatható, hogy a $\mathrm{V}(x,y)=\frac{xy+16}{x-y-4}-4\ln|x-y-4|$ a rendszer első integrálja. Így a nyeregponton áthaladó homoklinikus pálya: $\frac{xy+16}{x-y-4}-4\ln|x-y-4|=-4\ln 12$. ⊡

2.130. Megoldás: (Feladat) Legyen például $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x^3$. Az origó egyensúlyi helyzet. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3x^2 & 0\end{pmatrix}$. Az origó stabilis, a pályák egyenlete: $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}y^2=C$. Az origó centrum. Viszont világos, hogy az origóban linearizált rendszer instabilis. $\dot{x}=y$, $\dot{y}=0$. ■

2.131. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}-y^2 & -2xy\\ 1-4x^3y & -x^4\end{pmatrix}$. Az origóban a linearizált rendszer mátrixa kritikus. $\mathrm{V}(x,y):=x^2+y^2$. Ekkor a V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})=-2x^2y^2(1+x^2)$. Így $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le 0$, azaz az origó stabilis egyensúlyi helyzet. A Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis is, azaz a vonzási halmaza az egész $\mathbb{R}^2$. ■

2.132. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Az origó elfajult stabilis csomópont. A Kraszovszkij-módszert fogjuk alkalmazni. $F(x,y):=\underline{\underline{A}}(x,y)+\underline{\underline{A}}^T(x,y)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ negatív definit minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén. A $\mathrm{V}(x,y):=\underline{f}^T(x,y)\cdot\underline{f}(x,y)=x^2+(x-y)^2$, $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ Ljapunov-függvény lesz. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.133. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az $\dot{x}=f_1(x,y)$, $\dot{y}=f_2(x,y)$ (*) Hamilton-rendszert. Ekkor létezik $H{:}D_{\underline{f}}\to\mathbb{R}$ $(\underline{f}=(f_1,f_2)$ kétszer differenciálható függvény, amelyre $f_1(x,y)=\partial_2 H(x,y)$ és $f_2(x,y)=-\partial_1 H(x,y)$. Tegyük fel, hogy (x_0,y_0) egyensúlyi helyzet. Ekkor a rendszer Jacobi-mátrixa $\underline{\underline{J}}=\begin{pmatrix}\partial_{21}H(x,y) & \partial_{22}H(x,y)\\ -\partial_{11}H(x,y) & -\partial_{12}H(x,y)\end{pmatrix}$. Világos, hogy $\det\underline{\underline{J}}=\det\, H''(x,y)$. Tekintsük a (*) rendszer linearizáltját: $\dot{\underline{x}}=\underline{\underline{J}}(x_0,y_0)\underline{x}$. (**) Tegyük fel, hogy $\operatorname{Re}\lambda=0$. Így a karakterisztikus polinom: $(\partial_1 f_1-\lambda)\,(\partial_2 f_2-\lambda)-(\partial_1 f_2)(\partial_2 f_1)=0$. Ebből következően: $\lambda^2+\det\underline{\underline{J}}(x_0,y_0)=0$. Így $\det\underline{\underline{J}}(x_0,y_0)=\det\, H''(x_0,y_0)>0$, azaz, ha az origó a (**) centruma, akkor az (x_0,y_0) a (*) rendszer centruma. ■

2.134. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y):=x^4+x^2+y^2$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le 0$, azaz az origó stabilis. A Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis is. ■

2.135. Megoldás: (Feladat) Egy alkalmas Ljapunov-függvény: $\mathrm{V}(x)=\frac{1}{2}x^2$. A feltétel miatt: $(L_f\mathrm{V})\,(x)=xf(x)<0$, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.136. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $f'(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1-5y^4\end{pmatrix}$.

Az origó elfajult stabilis csomópont. $\mathrm{V}(x,y):=\underline{f}^T(x,y)\cdot\underline{f}(x,y)=x^2+(x-y-y^5)^2$. $\dot{\mathrm{V}}(x,y)$ negatív definit. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.137. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az $\underline{\dot{x}}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}$ rendszert és tegyük fel, hogy $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^T$negatív definit. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x})=\underline{x}^T\cdot\underline{x}$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})<0$, így az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet, így az $\underline{\underline{A}}$ összes sajátértékének a valós része negatív. ■

2.138. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y):=x^2+\frac{1}{2}y^2$. $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le 0$, azaz az origó stabilis. Legyen $S=\{(x,y)\colon \dot{\mathrm{V}}(\underline{x})=0\}=\{(x,y)\colon\ 2x^2=y^4\}=\left\{(x,y)\colon x=\frac{1}{\sqrt{2}}y^2 \text{ és } x=-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2\right\}$. A triviális pályától eltekintve semmilyen pálya nem maradhat az S-ben, erről letér, így a Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.139. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y):=x^2+y^2$. $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})\le 0$, azaz az origó stabilis. A pályák az origóra szimmetrikusak. A pályák egyenlete: $y(x)=Cx^2$. Mivel az origó nem izolált egyensúlyi helyzet, így az origó nem lehet lokálisan vonzó, így nem lehet aszimptotikusan stabilis sem. ■

2.140. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az alábbi rendszert:$\dot{x}=x\frac{3x^2y^2-1}{x^2y^2+1}$, $\dot{y}=-y$. Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. $\mathrm{V}(x,y):=\frac{x^2}{x^2+1}+y^2$. V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})<0$, ha $(x,y)\ne(0,0)$, így az origó aszimptotikusan stabilis. Az origó nem lehet globálisan aszimptotikus stabilis, ugyanis az $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ hiperbola a pályákat szétválasztó szeparátrix. Így bármely kezdeti állapot, amely a hiperbola fölött kezdődik, nem tud aszimptotikusan konvergálni az origóhoz, így az origó nem lehet globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.141. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet a $P_1(0,\frac{1}{a})$. $y(t)=y(0)e^{-a\omega t}+\frac{1}{a}$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve: $\dot{x}=-(y(0)e^{-a\omega t}+\frac{1}{a})x$. Legyen $\mathrm{V}(x):=\frac{1}{2}x^2$. Ekkor V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(x)=-(y(0)e^{-a\omega t}+\frac{1}{a})x^2$. Világos, hogy minden $y(0)$ esetén $\lim_{t\to\infty}y(0)e^{-a\omega t}=0$, így elegendően nagy t-re $\dot{\mathrm{V}}(x)\le-\frac{1}{a}x^2<0$, ha $x\ne 0$. Így a $P_1(0,\frac{1}{a})$ egyensúlyi helyzet minden pályát vonz. ■

2.142. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Keressük a Ljapunov-függvényt $\mathrm{V}(x,y):=\frac{1}{2}x^2+g(y)$ alakban, ahol g „alkalmas” differenciálható függvény. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(x,y)=xy+g'(y)\frac{-x}{1+y^2}$. Legyen $g'(y)=y(1+y^2)$. Így $g(y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1+y^2)^2$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(x,y)=0$, azaz a fenti V függvény első integrál és az origó stabilis egyensúlyi helyzet. A pályagörbék $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}x^2=C$. Az origó centrum. ■

3. Fejezet-Megoldások

3.1. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = 3x^2 + 1 + 3y^2 \geq 1 > 0$,

ezért a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.2. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = -1 - x^2 - x^4 \leq -1 < 0$,

ezért a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.3. Megoldás: (Feladat) Mivel a rendszernek nincs egyensúlyi helyzete, így nem lehet periodikus megoldása sem a 3.12. Állítás értelmében.■

3.4. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$, ezért a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.5. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = -y^2 - e^x < 0$, ezért a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.6. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re

$$\text{rot}\,\underline{f}(x,y) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ y + 2xy & x + x^2 - y^2 & 0 \end{pmatrix} = (1+2x)\underline{k} - (1+2x)\underline{k} = \underline{0},$$

ezért a 3.15. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.7. Megoldás: (Feladat) Mivel a rendszernek nincs egyensúlyi helyzete, így nem lehet periodikus megoldása sem a 3.12. Állítás értelmében.■

3.8. Megoldás: (Feladat) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = 2x + 2y$, ezért ez a $D_1 = \{(x,y): x + y > 0\}$ és a $D_1 = \{(x,y): x + y < 0\}$ tartományon állandó előjelű, így a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.9. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 2(x^2 + y^2 - x^4 - y^4)$. A $D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ olyan kompakt halmaz, amely pozitívan invariáns. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. Teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei, következésképpen létezik a rendszernek D-ben haladó periodikus pályája. ■

Megjegyzés: Észrevehető, hogy $-4 \leq \text{div}\,\underline{f} = 2 - 3(x^2 + y^2) \leq -1$, azaz állandó előjelű a D halmazon és mégis létezik D-ben periodikus pályája. A Bendixson-tételt most nem is lehetne alkalmazni, ugyanis a $D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ halmaz nem egyszeresen összefüggő.

3.10. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 2(x^2 + y^2 - x^4 - y^4)$.

A $D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ olyan kompakt halmaz, amely pozitívan invariáns. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. Így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei, következésképpen létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.11. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi pontok: $P_1(1,1)$ és $P_2(1,-1)$. Az $x = 1$ egyenes is pályát alkot. Nincs olyan zárt pálya, amely megkerüli az egyik vagy mindkettő egyensúlyi helyzetet. ■

3.12. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^4 + y^4$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 4x^4(1-4x^4-4y^4)$. A $D = \left\{(x,y): \frac{1}{4} \le x^4 + y^4 \le 1\right\}$ olyan kompakt halmaz, amely pozitívan invariáns. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. Teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei, így létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.13. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = 4 - (x^2+y^2)$. Így $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 4\}$ $(x,y) \in D$ esetén div $\underline{f}(x,y) < 0$, így a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.14. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = 2 + 2x^2 + 2y^2$. div $\underline{f}(x,y) > 0$, így a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.15. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. A $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ olyan kompakt halmaz, amely pozitívan invariáns. Egyetlen egyensúlyi pont az origó. Teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei, így létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.16. Megoldás: (Feladat) Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = 3 + 7x^2 > 0$, így a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.17. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi pontok: $P_1(2,4)$ és $P_2(2,-4)$. Az $x = 2$ egyenes is pályát alkot, ezért nem lehetséges olyan zárt pálya, amely megkerüli az egyik vagy mindkettő egyensúlyi helyzetet. ■

3.18. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. A $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ olyan kompakt halmaz, amely pozitívan invariáns. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. Teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei, így létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.19. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. A $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ olyan kompakt halmaz, amely pozitívan invariáns, azaz a megoldások mindenütt a halmazba *befelé* mennek. Az egyetlen egyensúlyi pontja az origó. Teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei, így létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.20. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = x(x^2 - xy + y^2)$. Mivel az $x^2 - xy + y^2$ kifejezés értéke minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén pozitív, ezért az $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) > 0$, illetve $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) < 0$ aszerint, hogy $x > 0$ vagy $x < 0$. Azaz a két félsíkon a trajektóriák szigorú monoton nőnek vagy csökkennek. Így a 3.7 Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.21. Megoldás: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = -a - 3aby^2 < 0$, ezért ez állandó előjelű, így a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.22. Megoldás: (Feladat) Tegyük fel, hogy az $\underline{x}^*(t)$ Ljapunov-értelemben stabilis. Így minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|\underline{x}^*(0) - \underline{x}(0)| < \delta$ esetén $|\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| < \varepsilon$ minden $t \ge 0$-ra, ahol $\underline{x}(t)$ egy környezetből induló megoldás. Tekintsük az $\underline{x}(0) = \underline{a}$ és $\underline{x}^*(0) = \underline{a}^*$-ból induló a fázistérben lévő H, illetve H^* félgörbéket. Ekkor $|\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| \le \max_{\underline{x} \in H} d(\underline{x}, H^*) < \varepsilon$. Így a Ljapunov-stabilitásból következik a Poincaré-stabilitás. Poincaré-stabilitásból általában nem következik a Ljapunov-stabilis. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$. Az általános megoldás: $x(t) = y(0)t + x(0)$, $y(t) = y(0)$.

Az x-tengely minden pontja egyensúlyi helyzet. A pályagörbék az x tengellyel párhuzamos egyenesek Poincaré-stabilisak, viszont nem Ljapunov-stabilisak, ugyanis legyen $\underline{x}^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$. Ekkor $t_0 = 0$-ra.

$$|\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| = |\underline{x}^*(0) - \underline{x}(0)| = \sqrt{(y^*(0)t - y(0)t + x^*(0) - x(0))^2 + ((y^*(0) - y(0))^2}$$

nem korlátos $t \geq 0$-ra. Így a fenti rendszer nem Ljapunov-stabilis. ■

3.23. Megoldás: (Feladat) Az általános megoldás: $x(t) = t + x(0),\ y(t) = y(0)$.
A pályagörbék az x tengellyel párhuzamos egyenesek, ezért a rendszer minden megoldása nyilvánvalóan Poincaré-stabilis. Ugyanakkor a megoldások Ljapunov-stabilisak is. Ugyanis legyen $\underline{x}^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$. Ekkor $t_0 = 0$ esetén

$$|\underline{x}^*(0) - \underline{x}(0)| = |\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| = \sqrt{(x^*(0) - x(0))^2 + ((y^*(0) - y(0))^2}.$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén, ha $|\underline{x}^*(0) - \underline{x}(0)| < \varepsilon$, akkor $|\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$-ra.

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén $\delta = \varepsilon$ megfelelő lesz, azaz a fenti rendszer Ljapunov-stabilis. ■

3.24. Megoldás: (Feladat) A pályagörbék $y = Cx$ egyenletű, origón átmenő egyenesek a megfelelő irányítással. Egyetlen megoldás sem lehet Poincaré-stabilis.■

3.25. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r\sin r$ és $\dot{\varphi} = 1$. Az $r = (2n+1)\pi$ $(n \in N)$ körök mindegyike stabilis határciklus. Így Poincaré-féle értelemben (orbitálisan) stabilisak. A $r = 2n\pi$ $(n \in N)$ körök mindegyike instabilis határciklus. Ezek a pályák Poincaré-féle értelemben instabilisak. ■

3.26. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi pontok: $P_1(0,0)$ és $P_2(0,1)$. A pályák egyenlete:
$y(x) = e^{Cx}$. Ha $C < 0$, akkor a pályák Poincaré értelemben stabilisak és, ha $C > 0$, akkor a pályák Poincaré értelemben instabilisak. ■

3.27. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A 3.9. Definíció szerint eljárva, tekintsük a $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j},\ t \in [0,2\pi]$ az origót megkerülő görbét. Ezek szerint

$f_1(\gamma(t)) = \sin 2t$ és $f_2(\gamma(t)) = \cos 2t$. $\operatorname{ind}\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_2(\gamma(t)) - f_2(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_1(\gamma(t))}{f_1^2(\gamma_1(t)) + f_2^2(\gamma_2(t))}dt = -2$.■

3.28. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A rendszernek itt nyeregpontja van. Így az egyensúlyi helyzet indexe -1. Ez definíció szerint is kiszámolható. A 3.9. Definíció szerint eljárva, tekintsük a $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j},\ t \in [0,2\pi]$ az origót megkerülő görbét. Ezek szerint

$f_1(\gamma(t)) = \cos t$ és $f_2(\gamma(t)) = -\sin t$. $\operatorname{ind}\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_2(\gamma(t)) - f_2(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_1(\gamma(t))}{f_1^2(\gamma_1(t)) + f_2^2(\gamma_2(t))}dt = -1$. ■

3.29. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Az origó centrum. A 3.9. Definíció szerint: Tekintsük a $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j},\ t \in [0,2\pi]$ az origót megkerülő görbét. Ezek szerint

$f_1(\gamma(t)) = \sin t$ és $f_2(\gamma(t)) = -\cos t$. $\operatorname{ind}\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_2(\gamma(t)) - f_2(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_1(\gamma(t))}{f_1^2(\gamma_1(t)) + f_2^2(\gamma_2(t))}dt = 1$. 3.13. Állítás miatt az index szükségszerűen 1. ■

3.30. Megoldás: (Feladat) Nincs egyensúlyi helyzet, ezért tetszőleges görbe indexe 0. ■

3.31. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Vegyük most célszerűen az $(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = 1$ ellipszist. Paraméterezzük az ellipszist a következőképpen:

$$f_1(x,y) = ax + by = \cos t \quad \text{és} \quad f_2(x,y) = cx + dy = \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy $x = \frac{d\cos t - b\sin t}{ad - bc}$, illetve $y = \frac{-c\cos t + a\sin t}{ad - bc}$.

Így a 3.7. Definíciót alkalmazva: $\operatorname{ind}\gamma = \operatorname{sign}(ad - bc)$. ■

3.32. Megoldás: (Feladat) Tekintsük a $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j},\ t \in [0,2\pi]$ origót megkerülő görbét. Ezek szerint $f_1(\gamma(t)) = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$ és $f_2(\gamma(t)) = \sin 2t$. $\operatorname{ind}\gamma = 2$. ■

3.33. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A pályagörbék $y^4 - x^4 = C$ alakúak. $\mathrm{V}(x,y) = xy$. Ekkor $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = x^4 + y^4$. Alkalmazva a 2.15 tételt, látszik, hogy az origó instabilis egyensúlyi helyzet. Az origó jellege nyeregpont. Az egyensúlyi helyzet indexe -1. ■

3.34. Megoldás: (Feladat) Mivel a körüljárási szám topológiailag invariáns, ezért a megoldás közvetlen következménye a 3.31. feladatnak. ■

3.35. Megoldás: (Feladat) Mivel a körüljárási szám topológiailag invariáns, ezért a megoldás közvetlen következménye a 3.31. feladatnak. ■

3.36. Megoldás: (Feladat) Mivel a körüljárási szám topológiailag invariáns, ezért a megoldás közvetlen következménye a 3.31. feladatnak. ■

3.37. Megoldás: (Feladat) Megmutatható, hogy van olyan zárt görbe, amelynek a rendszerre tekintett indexe különbözik a 0-tól. Ekkor a 3.14. Állítás miatt a rendszernek kell lennie egyensúlyi pontjának.

3.38. Megoldás: (Feladat) Egyenes következménye a 3.12. Állításnak ■

3.39. Megoldás: (Feladat) $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x - (x^2 - 2y^2 - 1)y$. $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
$(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = -y^2(x^2 + 2y^2 - 1)$. $D = \{(x,y): \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\}$. A D kompakt, pozitívan invariáns halmaz, amely nem tartalmazza a rendszer egyensúlyi helyzetét, a $(0,0)$-t, így a Poincaré-Bendixson-tétel értelmében létezik benne periodikus pálya. ■

3.40. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
$(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) > 0$, ha pl. $(x,y) \in \{(x,y): x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$. Origó instabilis. $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 2\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz, ami nem tartalmazza a rendszer (egyetlen) egyensúlyi helyzetét, a $(0,0)$-t, így a Poincaré-Bendixson-tétel értelmében létezik benne periodikus pálya. A 3.8. Állítás szerint a D gyűrűszerű síkbeli nyílt halmazon, amelyre a $\operatorname{div} f$ állandó előjelű és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, legfeljebb egy határciklus lehet, amely teljesen a D-ben fekszik. A D-n $-8 \le \operatorname{div} f = 2 - 4x^2 - 4y^2 \le 0$, azaz $\operatorname{div} f$ D-n állandó előjelű és csak egy görbe pontjaiban tűnik el. Így legfeljebb egy határciklusa lehet. ■
Megjegyzés: A nevezett periodikus megoldás az $r = 1$ körvonal, $\dot{r} = r(1 - r^2)$ és $\dot{\varphi} = 1$. ⊡

3.41. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r\sin^2\varphi(1 - 3r^2\cos^2\varphi - 2r^2\sin^2\varphi)$ és
$\dot{\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi(1 - 3r^2\cos^2\varphi - 2r^2\sin^2\varphi)$. A $T = \{(r,\varphi): \frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ nem tartalmazza a rendszer (egyetlen) egyensúlyi helyzetét, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Így létezik a rendszernek T-ben haladó periodikus pályája. ■

3.42. Megoldás: (Feladat) Az origó egyetlen egyensúlyi helyzete.

$$\dot{r} = r(1 - r^3(\cos^4\varphi + 5\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2\sin^4\varphi)) \text{ és } \dot{\varphi} = -1 - 2r^2\cos^3\varphi\sin\varphi$$

A $T = \{(r,\varphi): \frac{1}{4} \le r \le 1\}$ pozitívan invariáns és nem tartalmazza a rendszer egyensúlyi helyzetét, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Így létezik T-ben haladó periodikus pálya (negatív irányítással). ■

3.43. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\dot{r} = r^3 \sin 2\varphi$ és $\dot{\varphi} = 1$.
A pályák egyenlete: $1 + 2y^2 = C|2x^2 - 1|$. Ha $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $Cx^2 - y^2 = \frac{1}{2}(1 + C)$ hiperbolák, (alkalmas C-re), ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $Cx^2 + y^2 = \frac{1}{2}(C - 1)$ origót megkerülő ellipszisek. Az $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ sávban minden megoldás periodikus. A nyílt és zárt pályák szétválasztója az $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ egyenes. ■

3.44. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r \sin\varphi \cos\varphi(1 - r^2)$ és $\dot{\varphi} = -r^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$. A pályák egyenlete: $e^{-x^2}(x^2 + y^2 - 1) = C$. Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényt: $\mathrm{V}(x, y) = e^{-x^2}(x^2 + y^2 - 1)$.
A V függvénynek a $(0, 0)$ pontban lokális minimuma van és lokálisan konvex. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. Létezik periodikus megoldása is. ■

3.45. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A pályagörbék egyenlete:
$\frac{y^2}{2} + G(x) = C$, ahol $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Így két pálya létezik:

$$y(x) = \sqrt{2}\sqrt{(C - G(x))}, \text{ ha } G(x) < C, \qquad \text{(i)}$$
$$y(x) = -\sqrt{2}\sqrt{(C - G(x))}, \text{ ha } G(x) < C. \qquad \text{(ii)}$$

A feltételek miatt a $G(x) \to \infty$, ha $x \to \pm\infty$. G folytonos és $G(0) = 0$. Mivel a (ii) az (i)-nek az x-tengelyre való tükrözésével keletkezik, ezért van periodikus megoldás, az origó centrum, sőt minden megoldás periodikus. ■

3.46. Megoldás: (Feladat) A alábbi halmaz pozitívan invariáns: $T = \{(r, \varphi): \frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$. A $T = \{(r, \varphi): \frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$ nem tartalmazza a rendszer egyensúlyi helyzetét, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik T-ben haladó periodikus pálya. ■

3.47. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(0, -1)$ $P_4(\sqrt[4]{2}, 0)$, $P_4(-\sqrt[4]{2}, 0)$. Az $x = 0$ és az $y = 0$ egyenesek pályák. A rendszer összes egyensúlyi helyzete a tengelyeken van, így periodikus megoldása a rendszernek nem lehet.■

3.48. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\dot{r} = r\cos r^2$ és $\dot{\varphi} = 1$.
$\dot{r} = 0 \leftrightarrow r = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ $k \in \mathbb{N}$. A rendszer határciklusai: $r = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ $k \in \mathbb{N}$. Ha k páros, akkor ez stabilis, ha k páratlan, akkor instabilis határciklus. ■

3.49. Megoldás: (Feladat) A Bendixon-kritérium alapján, ha $a + d \neq 0$, akkor nem létezhet zárt pálya. Az $a + d = 0$ esetben a Bendixon-kritérium semmitmondó. Így: $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$. Ekkor $\lambda^2 + (ad - bc) = 0$. Láttuk, hogy, ha $ad - bc < 0$, akkor rendszernek nyeregpontja van és ha $ad - bc > 0$, akkor centruma az origóban. Így ez utóbbi esetben lehetséges zárt trajektória. Létezik zárt trajektóriája pontosan akkor, ha $a + d = 0$ és $ad - bc > 0$.■

3.50. Megoldás: (Feladat) Tegyük fel, hogy létezik $x(t)$ periodikus megoldása a differenciálegyenletnek $T > 0$ periódussal. Az egyenletet szorozva $\dot{x}$-tal és integrálva 0-tól T-ig:

$$0 = \int_0^T \ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)dt + \int_0^T (\dot{x}(t))^2 dt + \varepsilon\int_0^T (\dot{x}(t))^4 dt + \int_0^T \dot{x}(t)\sin x(t)dt$$

Mivel $\int_0^T \ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)dt = \frac{1}{2}\left[(\dot{x}(t))^2\right]_0^T = 0$ és $\int_0^T \dot{x}(t)\sin x(t)dt = [\cos x(t)]_0^T = 0$, ezért

$$0 = \int_0^T ((\dot{x}(t))^2 dt + \varepsilon(\dot{x}(t))^4)dt = \int_0^T ((\dot{x}(t))^2(1 + \varepsilon(\dot{x}(t))^2)dt.$$

Amiből következőleg: $\dot{x}(t) = 0 \to x(t) = C$. Így a periodikus megoldások $x(t) = k\pi$. $(k \in \mathbb{R})$ ■

3.51. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r\sin^2\varphi(9 - r^2(1 + \sin^2\varphi))$. A $T = \{(r, \varphi): \frac{3}{\sqrt{2}} \leq r \leq 3\}$ pozitívan invariáns halmaz. Mivel a $T = \{(r, \varphi): \frac{3}{\sqrt{2}} \leq r \leq 3\}$ nem tartalmazza az egyetlen egyensúlyi helyzetet, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Következésképpen létezik T-ben haladó periodikus pálya. Ez stabilis határciklus. ■

3.52. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az következő rendszert: $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = y^2$ és $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j}$, $t \in [0,2\pi]$ az origót megkerülő görbét. Így szerint $f_1(\gamma(t)) = \cos^2 t$ és $f_2(\gamma(t)) = \sin^2 t$. $\operatorname{ind}\gamma = 0$. ■

3.53. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r^2 \sin\frac{1}{r}$ $r > 0$-ra és $\dot{r}(0) = 0$, valamint $\dot{\varphi} = 1$. $\dot{r} = 0 \leftrightarrow r = \frac{1}{n\pi}$, azaz az $r = \frac{1}{n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ körök a rendszer pályái. Ha $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi$ esetén $\dot{r} < 0$, ha n páratlan és $\dot{r} > 0$, ha n páros. A pályák az $r = \frac{1}{n\pi}$ körsorok és ezen körök közötti növekedő vagy csökkenő spirális alakzatok. Ebben az esetben az origó ún. *centrum-fókusz*. (Az *origó centrum-fókusz*, ha létezik a rendszernek $\{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ zárt egymásba skatulyázott pályája, hogy $\Gamma_n \to 0$, ha $n \to \infty$ úgy, hogy Γ_n és Γ_{n+1} között minden trajektória tart Γ_n vagy Γ_{n+1}-hez, ha $t \to \pm\infty$.) ■

3.54. Megoldás: (Feladat) Tekintsük a rendszer $\underline{\varphi}(t) = (r(t), \Theta(t))$ azon megoldását, amelyre $r(t_0) = 1$, $\Theta(t_0) = \Theta_0$. A kezdeti érték probléma megoldása $r(t) = 1$ és $\Theta(t) = t + \Theta_0 - t_0$.
Vegyük a rendszer azon $\underline{\tilde{\varphi}}(t) = (\tilde{r}(t), \widetilde{\Theta}(t))$ megoldását, amelyre $\tilde{r}(t_0) = \tilde{r}_0$, $\widetilde{\Theta}(t_0) = \widetilde{\Theta}_0$ és $\tilde{r}_0 \neq 1$.
A kezdeti érték probléma megoldása: $\tilde{r}(t) = (\tilde{r}_0 - 1)e^{t_0 - t} + 1$ és $\widetilde{\Theta}(t) = (\widetilde{\Theta}_0 - t_0)e^{t_0 - t} + t$.
Ekkor $|\underline{\varphi}(t) - \underline{\tilde{\varphi}}(t)| = \left(1 + \left((\tilde{r}_0 - 1)e^{t_0 - t} + 1\right)^2 - 2\left((\tilde{r}_0 - 1)e^{t_0 - t} + 1\right)\cos\left(\Theta(t) - \widetilde{\Theta}(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$,
ami nagy t-re a folytonosság miatt:$|\underline{\varphi}(t) - \underline{\tilde{\varphi}}(t)| \sim (4 - 2\cos(\Theta_0 - t_0))^{\frac{1}{2}}$. Így a $\underline{\varphi}(t)$ nem lehet Ljapunov-stabilis, így Ljapunov-aszimptotikusan stabilis se. A pályagörbék globális viselkedéséből látszik, hogy a $\underline{\varphi}(t)$ Poincaré-stabilis, sőt $\underline{\varphi}(t)$ Poincaré-aszimptotikusan is stabilis. ■

3.55. Megoldás: (Feladat) A pályák egyenlete: $y(x) = \frac{C}{1+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Tekintsük az $y(x) = 0$ pályát. Az $y(x) = 0$ görbe Poincaré-stabilis. Az $y(x) = 0$ pálya aszimptotikusan Poincaré stabilis is. ■

3.56. Megoldás: (Feladat) Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$-re $\operatorname{div} \underline{f}(x, y) = -3x^2$. $\operatorname{div} \underline{f}(x, y) = 0$ csak az $\{(x, y): x = 0\}$-n és ez nullmértékű $\mathbb{R}^2$-ben., ezért a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.57. Megoldás: (Feladat) $r = 2$ esetén $\dot{r} < 0$, és $r = \frac{1}{2}$ esetén $\dot{r} > 0$. Így az $r = 2$ körön a pályák közelednek, az $r = \frac{1}{2}$ körön távolodnak a rendszer egyensúlyi helyzetétől, az origótól, így kell lennie a két kör között periodikus pályának. ■
Megjegyzés: A megoldásban adott Bendixson-zsák élesíthető.
Mivel $\cos\varphi \geq -1$, ezért $\dot{r} = r - r^3 + 0.5r\cos\varphi \geq r - r^3 - 0.5r = r(1/2 - r^2)$. Így, ha $r < \sqrt{1/2}$, akkor $\dot{r} > 0$. Mivel $\cos\varphi \leq 1$, ezért $\dot{r} = r - r^3 + 0.5r\cos\varphi \leq r - r^3 + 0.5r = r(3/2 - r^2)$.
Így, ha $r > \sqrt{3/2}$, akkor $\dot{r} < 0$. Így a $T := \{r: \sqrt{1/2} \leq r \leq \sqrt{3/2}\}$ is egy Bendixson-zsák. ⊡

3.58. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = 2.5r - r^3 + 1.5r\cos 2\varphi$, és $\dot{\varphi} = -2r - 3r\cos\varphi\sin\varphi$. Mivel $\cos 2\varphi \geq -1$, ezért $\dot{r} \geq r(1 - r^2)$. Így, ha $r < 1$, akkor $\dot{r} > 0$. Mivel $\cos 2\varphi \leq 1$, ezért $\dot{r} \leq r(4 - r^2)$. Így, ha $r > 2$, akkor $\dot{r} < 0$. A $T := \{r: 1 \leq r \leq 2\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a rendszernek létezik T-ben fekvő periodikus pályája. ■

3.59. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r - 2r^2 + r^2\cos\varphi$ és $\dot{\varphi} = 1$.
Mivel $\cos 2\varphi \geq -1$, ezért $\dot{r} \geq r(1 - 3r)$. Következésképpen, ha $r < 1/3$, akkor $\dot{r} > 0$.
Mivel $\cos 2\varphi \leq 1$, ezért $\dot{r} \leq r(1 - r)$. Így, ha $r > 1$, akkor $\dot{r} < 0$. A $T := \{r: 1/3 \leq r \leq 1\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a rendszernek létezik T-ben fekvő periodikus pályája. ■

Megjegyzés: A határciklus egyenlete: $15(x^2+y^2)-2xy-4(x+y)=4$.

3.60. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Tekintsük az alábbi halmazokat: $R_c := \{(x,y): f(x,y)=0,\ R_I := \{(x,y): f(x,y)>0, R_E := \{(x,y): f(x,y)<0\}$.

$$\dot{r}=-rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \text{ és } \dot{\varphi}=-g(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Világos, hogy R_I-n $\dot{r}<0$ és R_E-n $\dot{r}>0$. A $T := \{(x,y): -\varepsilon \le f(x,y) \le \varepsilon,\ \varepsilon>0, \varepsilon \ll 1\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik T-ben fekvő periodikus pálya. ■

3.61. Megoldás: (Feladat) $\dot{r}=r-r^3(1+0.5\sin^2\varphi-\sin^4\varphi)$. Megmutatható, hogy az $\frac{1}{2} \le 1+0.5\sin^2\varphi-\sin^4\varphi \le \frac{17}{16}$. (*). (*) miatt $\dot{r} \le r(1-\frac{1}{2}r^2)$, így ha $r>\sqrt{2}$, akkor $\dot{r}<0$.
(*) miatt $\dot{r} \ge r(1-\frac{17}{16}r^2)$, így ha $r<\frac{4}{\sqrt{17}}$, akkor $\dot{r}>0$. A $T := \{r: \frac{4}{\sqrt{17}} \le r \le \sqrt{2}\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik T-ben fekvő periodikus pálya. ■

3.62. Megoldás: (Feladat) $\dot{r}=r(1-2r^2-r^2\sin^2\varphi)$ és $\dot{\varphi}=1$. Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Az $r=1/2$ körön $\dot{r}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin^2\varphi)$. Ekkor $\dot{r}>0$. Az $r=1$ körön $\dot{r}=-1-\sin^2\varphi$. Ekkor $\dot{r}<0$. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a $T := \{r: \frac{1}{2} \le r \le 1\}$-n létezik határciklus. $\operatorname{div} f=2(1-4r^2-2r^2\sin^2\varphi)$. A $\operatorname{div} f<0$ a T-n. A 3.8. Állítás miatt létezik egyetlen határciklus. ■

3.63. Megoldás: (Feladat) A rendszernek nincs egyensúlyi helyzete. Tulajdonképpen az origó lehetne ez, de ott nincs a rendszer értelmezve. Az értelmezési tartomány nem egyszeresen összefüggő tartomány. Az x-y koordináta-rendszerben a rendszer alakja: $\dot{x}=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2}$, $\dot{y}=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}$

Az origó középű, egy sugarú körvonal periodikus pálya (instabilis határciklus) és egyszerű számolással adódik, hogy $\operatorname{div} f=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, azaz így állandó előjelű. ■

Megjegyzés: A feladat kapcsolatban áll a 3.8. Állítással is.

3.64. Megoldás: (Feladat) $\operatorname{div} f=-2x+2y$. A Bendixson-tétel miatt a rendszernek nem lehet periodikus megoldása sem a $D_1=\{(x,y): -x+y>0\}$, sem a $D_2=\{(x,y): -x+y<0\}$ halmazon. Így, ha van periodikus megoldás, akkor a pályájának metszenie kell az $y=x$ egyenest. Világos, hogy ezen egyenesen $\dot{x}=-x-x^2$, $\dot{y}=-x+x^2$. Látható, hogy itt $\dot{x} \le \dot{y}$, azaz nem juthatunk el D_1-ből D_2-be, így ha D_1-ből indulunk, akkor D_1-be is maradunk. ■

3.65. Megoldás: (Feladat) Tegyük fel, hogy végtelen sok izolált egyensúlyi helyzet létezik egy periodikus pálya belsejében. Legyenek ezek $\{\underline{x}_n\}$. Mivel az $\{\underline{x}_n\}$ pontsorozat korlátos, ezért létezik $\{\underline{x}_{n_k}\} \subset \{\underline{x}_n\}$ konvergens részsorozat. Legyen $\underline{x}^* = \lim \underline{x}_n$. Világos, hogy ekkor $\underline{x}^*$ is egyensúlyi helyzet és $\underline{x}^*$ minden környezetében végtelen sok egyensúlyi helyzet van, azaz $\underline{x}^*$ nem lenne izolált egyensúlyi helyzet. ■