Folytonos dinamikai rendszerek

Nágel Árpád

1. Lineáris rendszerek

Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) \qquad (1.1.)$$

állandó együtthatós, homogén lineáris n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszert. Jelölje az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit multiplicitással $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ és jelölje $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \cdots, \underline{s}_n$ azt a bázist az n−dimenziós euklideszi térben, amely a mátrix Jordan[1]-normálformáját adja. Ezen bázis segítségével definiálható a (1.1.) rendszer stabilis, instabilis és centrális altere.

1.1. Definíció: Legyen $\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots \underline{s}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix valós Jordan-normálalakját meghatározó egy bázis. Jelölje λ_k azt a sajátértéket, amelyhez az $\underline{s}_k$ bázisvektor tartozik. Az

$$E_s(\underline{\underline{A}}) := \langle\{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k < 0\}\rangle, \quad E_u(\underline{\underline{A}}) := \langle\{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0\}\rangle, \quad E_c(\underline{\underline{A}}) := \langle\{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\,\lambda_k = 0\}\rangle$$

altereket az (1.1.) rendszer *stabilis, instabilis, illetve centrális alterének* nevezzük.
(Itt a $\langle\cdot\rangle$ a megfelelő vektorok által kifeszített alteret jelöli.)

1.2. Megjegyzés: **a**) a fenti alterek invariánsak $\underline{\underline{A}}$-ra, és a direkt összegük az egész $\mathbb{R}^n$ tér,
b) Ha $t \to \underline{x}(t)$ az (1.1.) megoldása és $\underline{x}(0) \in E_s(\underline{\underline{A}}), E_u(\underline{\underline{A}})$ ill. $E_c(\underline{\underline{A}})$, akkor $\underline{x}(t) \in E_s(\underline{\underline{A}}), E_u(\underline{\underline{A}})$, ill. $E_c(\underline{\underline{A}})$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, **c**) minden $\underline{x}_0 \in E_s(\underline{\underline{A}})$ ($E_u(\underline{\underline{A}})$) esetén $e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{x}_0 \to \underline{0}$, ha $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), sőt a konvergencia exponenciális sebességű. ⊡

Ha $\underline{\underline{A}}$ speciálisan 2×2-es mátrix, akkor az invariáns alterekkel való jellemzés tovább finomítható.

1.3. Definíció: Legyenek az $\underline{\underline{A}}$ 2×2-es mátrix sajátértékei λ_1 és λ_2.
Azt mondjuk, hogy az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ rendszer egyensúlyi helyzete

- *stabilis csomó*, ha $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$,
- *instabilis csomó*, ha $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,
- *elfajult stabilis csomó*, ha $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ és a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós,
- *elfajult instabilis csomó*, ha $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ és a hozzájuk tartozó sajátaltér egydimenziós,
- *nyereg*, ha $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- *stabilis fókusz*, ha λ_1, λ_2 nem valósak és $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$,
- *instabilis fókusz*, ha λ_1, λ_2 nem valósak és $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$,
- *centrum*, ha $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}, \lambda_2 = 0$, azaz λ_1 és λ_2 tiszta képzetesek.

Ha az $\underline{\underline{A}}$ szinguláris, akkor az *origó nem izolált egyensúlyi helyzet*. Az elfajult esetek a következők:

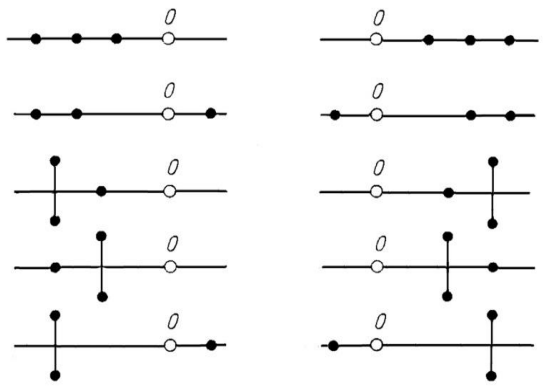
1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, akkor végtelen sok instabilis egyensúlyi pont,
2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$, akkor végtelen sok stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont,
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és a hozzá tartozó sajátaltér kétdimenziós, akkor minden pont egyensúlyi pont,
4. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós, akkor végtelen sok instabilis egyensúlyi pont van.

[1] M.E.C. Jordan (1838-1922) francia matematikus

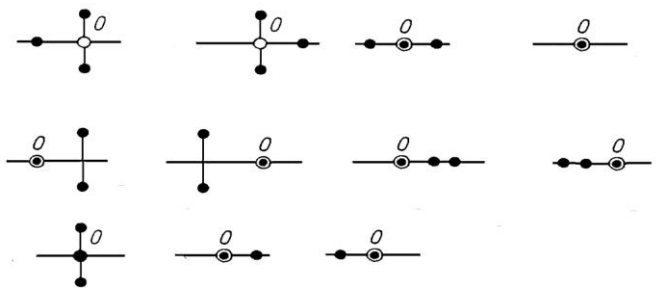
Az ún. (Tr, det) diagram segítségével a fáziskép típusa meghatározható sajátértékek konkrét kiszámítása nélkül is. A sajátértékek $\lambda_{12} = \frac{\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 - 4\det \underline{\underline{A}}}}{2}$.

1.4. Állítás: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ rendszert, ahol $\underline{\underline{A}}$ adott 2×2-es mátrix. Ekkor a rendszer
egyensúlyi helyzete
- stabilis nem elfajult csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 > 4\det \underline{\underline{A}} > 0$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$,
- instabilis nem elfajult csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 > 4\det \underline{\underline{A}} > 0$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$,
- elfajult stabilis csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 = 4\det \underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$,
- elfajult instabilis csomó, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 = 4\det \underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$,
- nyereg, ha $\det \underline{\underline{A}} < 0$,
- stabilis fókusz, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 < 4\det \underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$,
- instabilis fókusz, ha $(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}})^2 < 4\det \underline{\underline{A}}$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$,
- centrum, ha $\det \underline{\underline{A}} > 0$ és $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} = 0$.

Bonyolultabb az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 3-ad rendű differenciálegyenlet-rendszer megoldásának a szerkezete. Az egyensúlyi helyzetek jellegét, illetve a rendszer pályáit $\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei szerint osztályozhatjuk, jellemezhetjük. Két elkülönülő eset van.
a.) 10 db. normál eset: Re $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. (A többszörös gyököktől eltekintve.)



b.) 11 db. elfajult eset: Re $\lambda_i = 0$ valamilyen $i = 1, 2, 3$-ra.



Definiáljuk a Ljapunov-stabilitást *általános* differenciálegyenlet-rendszer esetén.
1.5. Definíció: Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(t_0, \underline{x}_0) \in D$.
Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t)) \qquad (1.2.)$$

differenciálegyenlet-rendszert.
Tegyük fel, hogy az (1.2.) rendszerre teljesülnek az egzisztencia és az unicitás tétel feltételei. Jelölje az (1.2) differenciálegyenlet $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás maximális értelmezési tartományát $\mathrm{I}(t_0, \underline{x}_0)$, a kezdeti érték probléma teljes megoldását $\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$.

A $t \to \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$ megoldás *Ljapunov*[2]*-értelemben stabilis*, ha
1. $[t_0, +\infty) \subset \mathrm{I}(t_0, \underline{x}_0)$ és
2. minden $\varepsilon > 0$ számhoz és minden $t_1 \in [t_0, +\infty)$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon, t_1) > 0$ szám, hogy minden $(t_1, \underline{q}) \in D, |\underline{q} - \underline{x}(t_1, t_0, \underline{x}_0)| < \delta$ esetén $[t_1, +\infty) \subset \mathrm{I}(t_1, \underline{q})$ és $|\underline{x}(t, t_1, \underline{q}) - \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq t_1$ esetén.
A megoldást *Ljapunov-értelemben instabilisnak* nevezzük, ha nem stabilis.
A megoldást *Ljapunov-értelemben aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis és

$$|\underline{x}(t, t_1, \underline{q}) - \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)| \to 0, \text{ ha } t \to +\infty.$$

A továbbiakban, ha mást nem mondunk, a stabilitást, aszimptotikus stabilitást, illetve az instabilitást Ljapunov-értelemben fogjuk használjuk.

Fontos az alábbi
1.6. Állítás: Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{b}(t) \qquad (1.3.)$$

inhomogén lineáris n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{\underline{A}}(t),\ \underline{b}(t) \in C(\mathbb{R})$ és $t \in I \subset \mathbb{R}$.
Ha a rendszer egy megoldása stabilis (aszimptotikusan stabilis), akkor minden megoldás stabilis (aszimptotikusan stabilis). Ekkor lehet beszélni a rendszer stabilitásáról (aszimptotikus stabilitásáról).

Stabilitás, aszimptotikus stabilitás és instabilitás eldöntésére lineáris esetben fontos a következő
1.7. Állítás: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ állandó együtthatós, lineáris n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszert.
a) Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van nemnegatív valós részű sajátértéke, akkor a rendszer nem aszimptotikusan stabilis.
b) Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van pozitív valós részű sajátértéke, akkor a rendszer instabilis.
c) Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van olyan 0 valós részű sajátértéke, amely a minimál polinomnak többszörös gyöke, akkor a rendszer instabilis.
d) A rendszer pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minden sajátértékének a valós része negatív.
e) A rendszer pontosan akkor stabilis, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minden sajátértékének a valós része nem negatív és $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ esetén a λ algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitásával.

Többdimenziós esetben egy lineáris rendszer egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitásának meghatározására talán a legismertebb a Routh-Hurwitz-kritérium. Ez pontosan akkor következik be, ha a (1.1.) rendszer $p_n(\lambda)$ karakterisztikus polinomja ún. *stabilis polinom*, azaz minden sajátértékének a valós része negatív. Ezt a sajátértékek tényleges kiszámítása nélkül is ellenőrizni lehet.

A szükséges feltételről szól az alábbi
1.8. Állítás: (A. B. Stodola[3]) (1893) Ha a $p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polinom stabilis, akkor $a_i > 0$ minden $i = 0, 1, \ldots n-1$-re.

Polinom stabilitására ad szükséges és elégséges feltételt az alábbi
1.9. Állítás: (Routh-Hurwitz-kritérium[4]) (1895) A $p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polinom pontosan akkor stabilis, ha az alábbi $n \times n$-es mátrix *pozitív definit*, azaz a főminormátrix determináns sorozatai pozitívak:

[2] A. M Ljapunov (1857-1918) orosz matematikus

[3] Aurel Boreslaw Stodola (1859-1942) felvidéki származású, svájci fizikus
[4] A. Hurwitz (1859-1919) német és E. J. Routh (1831-1907) angol matematikusok

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

1.10. Megjegyzés:
a) $n = 2$ esetben a $p_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ polinom pontosan akkor stabilis, ha a

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

mátrix pozitív definit, azaz ha a_1 és $a_0 > 0$.
b) $n = 3$ esetben a $p_3(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ polinom pontosan akkor stabilis, ha a

$$\begin{pmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

mátrix pozitív definit, azaz $a_2 > 0$, $a_2 \cdot a_1 - a_0 > 0$ és $a_0 > 0$. ⊡

Léteznek polinom stabilitására más kritériumok is.
Jelölje m a $p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ polinom *pozitív valós részű* gyökeinek a darab számát. Vegyük a p_n polinom értékeit a képzetes tengelyen, azaz tekintsük a $p_n(i\omega)$-t, ahol $\omega \in \mathbb{R}$. A komplex sík $\{p_n(i\omega): \omega \in \mathbb{R}\}$ görbéjét az $p_n(\lambda)$ polinom ún. *Mihajlov-hodográfjának* nevezzük. Tekintsük a következő függvényt: $\varphi(\omega) = \operatorname{Arg} p_n(i\omega)$, $\varphi(0) = 0$. Itt $\operatorname{Arg} z$ a többértékű függvény egy folytonos ága: $\arg z + 2k\pi$, ahol k egész szám és $-\pi \le \arg z \le \pi$. (*) Ha a hodográf a $\omega = \omega_0$ pontban metszi a komplex sík $\{\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0\}$ félegyenesét, akkor az (*) függvénynek egy olyan ágát vesszük, amely biztosítja a $\varphi(\omega)$ függvény folytonosságát a ω_0 pontban. Jelöljük $\nabla\{\varphi(\omega): \omega \in (-\infty, \infty)\}$ a $\varphi(\omega)$ növekményét.

1.11. Állítás: Ha $p_n(i\omega) \neq 0$ minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén akkor

$$\nabla\{\varphi(\omega): \omega \in (-\infty, \infty)\} = \pi(n - 2m).$$

A fentiek egyenes következménye az
1.12. Állítás: (Mihajlov-tétel) Ha $p_n(i\omega) \neq 0$ minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

polinom pontosan akkor stabilis, ha $\nabla\{\varphi(\omega): \omega \in (-\infty, \infty)\} = n\pi$.

1.13. Megjegyzés: Az 1.12. Állítás teljesülése egyszerűsíthető. Mivel a $p_n(\lambda)$ polinom együtthatói valósak, ezért $\operatorname{Re} p_n(i\omega) = \operatorname{Re} p_n(-i\omega)$ és $\operatorname{Im} p_n(i\omega) = -\operatorname{Im} p_n(-i\omega)$, így a Mihajlov-hodográf szimmetrikus a valós tengelyre. ⊡

Így kapjuk az alábbi állítást:
1.14. Állítás: (Mihajlov-Leonhard) Ha $p_n(i\omega) \neq 0$ minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

polinom pontosan akkor stabilis, ha $\nabla\{\varphi(\omega): \omega \in (0, \infty)\} = n\frac{\pi}{2}$. ■

1.15. Megjegyzés: Stabilis polinomok esetén a $\varphi(\omega)$ függvény monoton növekszik. Ebben az esetben a ω növekedésével az $p_n(\lambda)$ hodográfja kiindulva a $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ pozitív féltengelyről, egymás után metszi a $\{\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$,..., féltengelyeket, miközben pontosan n darab kvadránson halad át. Ha $p_n(i\omega) \neq 0$ minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén és ω növekedésével a $p_n(\lambda)$ hodográfja $\omega \ge 0$ esetén kiindulva a $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ féltengelyről, egymás után keresztezi a

$\{\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, z < 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$, ..., ..., féltengelyeket, és közben pontosan n darab kvadránson halad át, akkor $p_n(\lambda)$ egy stabilis polinom. ⊡

A fentiek alapján teljesül az irányítástechnikában is használt Mihajlov-Leonhard-kritérium.

1.16. Állítás: (Mihajlov-Leonhard) (1938) Tekintsük a $P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ n-ed fokú polinomot. Tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$.
Legyen a P_n polinom gyöktényezős alakja frekvenciatartományban, $\lambda = i\omega$ helyettesítéssel:

$$P_n(i\omega) = a_0(i\omega - p_1)(i\omega - p_2) \dots (i\omega - p_n).$$

A P_n polinom stabilis pontosan akkor, ha az n-ed fokú karakterisztikus egyenletének megfelelő $\omega \to P_n(i\omega)$ görbe nem halad át a komplex sík origóján, és a körfrekvenciát $0 < \omega < \infty$ tartományban változtatva, a görbe pontosan n darab síknegyeden fut keresztül, az óramutató járásával ellentétes irányban.

Példa: Adjunk szükséges és elégséges feltételt a Mihajlov-Leonhard-kritérium felhasználásával az

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

polinom stabilitására!
Megoldás: Az 1.8. Állítás miatt a stabilitás szükséges feltétele, hogy az $\alpha > 0,\ \beta > 0, \gamma > 0$.
Kiszámolható, hogy $p_3(i\omega) = (\gamma - \alpha\omega^2) + i(\beta - \omega^2)\omega$. A $p_3(\lambda)$ hodográfjának metszéspontjai $\omega \geq 0$ esetén a $\{\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, z < 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$ féltengelyekkel a következő pontok: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\omega_3 = \sqrt{\beta}$. Ebben az esetben

$$p_3(0) = \gamma, p_3(i\omega_2) = (\beta - \tfrac{\gamma}{\alpha})\sqrt{\tfrac{\gamma}{\alpha}} \text{ és } p_3(i\omega_3) = \gamma - \alpha\beta.$$

Így a polinom stabilis pontosan akkor, ha $\beta - \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ és $\gamma - \alpha\beta < 0$.

1.17. Megjegyzés: A fenti 1.16. Állításban szerepló Mihajlov-Leonhard-kritérium pontosan akkor teljesül (→ 12.), ha

1. $a_n a_{n-1} > 0$ és
2. $q_1(\alpha) = a_n - a_{n-2}\alpha + a_{n-4}\alpha^2 - \dots$ és a $q_2(\beta) = a_{n-1} - a_{n-3}\beta + a_{n-5}\beta^2 - \dots$

polinomok gyökei pozitívak és alternálnak, azaz az egyik egyenlet tetszőleges két gyöke között van a másik egyenletnek gyöke: $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots$ ⊡

1. Feladatok

Vizsgáljuk meg az alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz tartozó $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszerek egyensúlyi helyzetének jellegét, határozzuk meg a stabilis, instabilis és centrális alterüket és adjuk meg ezen alterek dimenzióját!

1.1. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.2. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.4. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.5. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.6. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

1.7. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az a valós paraméter függvényében az adott lineáris rendszer egyensúlyi helyzetének a jellegét!

1.8. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.9. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -a & -(a+1) \end{pmatrix}$

1.10. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.11. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a+3 & -1 \end{pmatrix}$

1.12. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg a p valós paraméter függvényében az adott lineáris rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének dimenzióját!

1.13. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-p & 1+p \end{pmatrix}$

1.14. feladat: (Megoldás) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vizsgáljuk a stabilitás szempontjából az alábbi differenciálegyenleteket:

1.15. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$

1.16. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$

1.17. feladat: (Megoldás) $\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszer tetszőleges megoldása $t \to \infty$ esetén az azonosan nulla megoldáshoz tart!

1.18. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -3x - 4y$$

1.19. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -7x + y$$
$$\dot{y} = -2x - 5y$$

1.20. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -x + z$$
$$\dot{y} = -2y - z$$
$$\dot{z} = y - z$$

1.21. feladat: (Megoldás) Milyen a és b paraméterre lesz az alábbi differenciálegyenlet aszimptotikusan stabilis?
$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + 2x = 0$$
Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet fázisportréját!

1.22. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x$$

1.23. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = 2y$$
$$\dot{y} = -8x$$

1.24. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = y$$

1.25. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x + y$$
$$\dot{y} = -y$$

1.26. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = -4x + y$$

1.27. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -2x + y$$
$$\dot{y} = -y$$

1.28. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = 0$$
$$\dot{y} = x + y$$

1.29. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = -2x - 3y$$

1.30. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -2x - y$$
$$\dot{y} = x - 2y$$

1.31. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x - y - 1$$
$$\dot{y} = -4x + y + 1$$

1.32. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 2×2-es lineáris rendszert. Jelölje az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$ valamint sajátvektorait $\underline{s}_1 = \underline{u} + i\underline{v}$, $\underline{s}_2 = \underline{u} - i\underline{v}$. Legyen $\underline{\underline{T}} = (\underline{u}, \underline{v})$ és $\underline{x} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y}$. Mutassuk meg, hogy a det $\underline{\underline{T}}$ pozitív vagy negatív értékétől függően az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ síkon a pályák körüljárási iránya megőrződik, illetve ellentétesre változik. (→ 1.29., 1.30. feladat)

1.33. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 2×2-es lineáris rendszert. Mutassuk meg, ha a rendszernek van nem triviális periodikus megoldása, akkor minden megoldás periodikus.

1.34. feladat: (Megoldás) Mihajlov-Leonhard-kritérium segítségével döntsük el az alábbi polinom stabilitását!
a) $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 8$
b) $p_3(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda + 1$

2. Nemlineáris rendszerek

Tekintsük a továbbiakban az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \qquad (2.1.)$$

egy olyan n-dimenziós *autonóm* differenciálegyenlet-rendszert, amelyre teljesülnek az egzisztencia és a unicitás tétel feltételei. Jelölje $\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$ a (2.1.) $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ feltételt teljesítő megoldását. A (2.1.) autonóm rendszer esetén $\underline{x}(t+ t_0, t_0, \underline{x}_0) = \underline{x}(t, 0, \underline{x}_0)$. Így ezt jelölhetjük a továbbiakban $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$-lal. Legyen $\underline{p}$ a rendszer *egyensúlyi helyzete (egyensúlyi pontja)*, azaz $\underline{f}(\underline{p}) = \underline{0}$.

I. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\underline{p} = \underline{0}$.

II. Ha $\underline{f}$ folytonos függvény és $\underline{x}(t)$ a (2.1) olyan megoldása, amelyre $\lim_{t\to\infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$, akkor $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$, azaz ekkor az origó egyensúlyi helyzet.

Alapvető az 1.5. Definíció átfogalmazása autonóm rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitására.

<u>2.1. Definíció</u>: Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás *stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy minden $|\underline{q} - \underline{p}| < \delta$ esetén $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$-ra.
Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás (*lokálisan*) *aszimptotikusan stabilis*, ha stabilis és *lokálisan attraktív*, azaz $\underline{p}$ egyensúlyi pontnak létezik olyan U környezete, hogy minden $\underline{q} \in U$ esetén $\lim_{t\to+\infty} \underline{x}(t, \underline{q}) = \underline{p}$.
Aszimptotikus stabilitás esetén az U halmazt *vonzási vagy attraktivitási tartománynak* nevezzük.
Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás (*lokálisan*) *exponenciálisan stabilis*, ha létezik $C, \delta > 0$ és $\alpha > 0$ szám, hogy $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |\underline{q}|$, ha $|\underline{q} - \underline{p}| \leq \delta$.
Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás *instabilis*,ha nem stabilis.
Az $\underline{x}(t, \underline{p}) = \underline{p}$ megoldás *teljesen instabilis*, ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az $S := \{\underline{x}: |\underline{x} - \underline{p}| < \delta\}$ gömb tetszőleges $\underline{q} \neq \underline{p}$ pontjából indított $\underline{x}(t, \underline{q})$ megoldás esetén létezik olyan $t_0 = t_0(\underline{q})$ pozitív szám, hogy minden $t > t_0$ esetén $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| > \delta$.

<u>2.1. Megjegyzés</u>: **a**) Az exponenciális stabilitásból az aszimptotikus stabilitás és ebből a stabilitás következik.
b) Az átfogalmazás könnyen meggondolható. Az aszimptotikus stabilitás is könnyen megmutatható, ugyanis $\lim_{t\to\infty} |\underline{x}(t, t_1, \underline{q}) - \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)| = \lim_{t\to\infty} |\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| = 0$.

c) A 2.1 Definíció fejezi ki pontosan azt, hogy a közelről indított megoldás közel marad. A stabilitást definiálhatnánk, például úgy, hogy az origó, mint egyensúlyi helyzet stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ szám esetén $|\underline{x}_0| < \varepsilon$-ből következik, hogy $|\underline{x}(t, \underline{x}_0)| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$-ra. Tekintsük az $\dot{x} = -2y$, $\dot{y} = x$ rendszert. A pályák az $x^2 + 2y^2 = C$ $(C \geq 0)$ ellipszisek. Adott $\varepsilon > 0$ számra az $|\underline{x}_0| < \varepsilon$-ből induló pálya elhagyhatja a ε sugarú körlemezt, így a fenti értelemben az origó instabilis lenne, de Ljapunov-értelemben nyilvánvalóan stabilis. ⊡

Az attraktivitás és a stabilitás egymástól független fogalmak. Létezik olyan példa, hogy az egyensúlyi helyzet ún. *globálisan attraktív*, azaz minden pályagörbét vonz, de az mégsem stabilis. Az origó ekkor instabilis, de nem teljesen instabilis egyensúlyi helyzet. (R. E. Vinograd 1957.)

A pályagörbék jellege az egyensúlyi pontok környezetében az *esetek egy részében* meghatározható linearizálással is. Ha $\underline{f} \in C^1$, akkor tekinthetjük $\underline{p}$ egyensúlyi pont egy környezetében az

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{f}'(\underline{p}) \cdot \underline{y}(t) \qquad (2.2.)$$

ún. *linearizált rendszert*. (Az $\underline{f}'$ az $\underline{f}$ vektormező Jacobi-mátrixa.)

A linearizálás segítségével a (2.1.) rendszer stabilitása a következőképpen dönthető el:

2.2. Állítás: Tegyük fel, hogy $\underline{f} \in C^1$.

a). Ha az $\underline{\underline{A}} = \underline{f}'(\underline{p})$ mátrix minden sajátértékének a valós része negatív, akkor a $\underline{p}$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja a (2.1.) rendszernek, *sőt* létezik $C, \delta, \alpha > 0$, hogy a (2.1.) minden $\underline{x}(t, \underline{q})$ megoldására $|\underline{x}(t, \underline{q}) - \underline{p}| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |\underline{q}|$, ha $|\underline{q} - \underline{p}| \leq \delta$, azaz $\underline{p}$ ekkor exponenciálisan stabilis is.

b). Ha az $\underline{\underline{A}} = \underline{f}'(\underline{p})$ mátrixnak van pozitív valósrészű sajátértéke, akkor a $\underline{p}$ instabilis egyensúlyi pontja a (2.1.) rendszernek.

c). Ha az $\underline{\underline{A}} = \underline{f}'(\underline{p})$ mátrixnak minden sajátértéke pozitív valósrészű, akkor a $\underline{p}$ teljesen instabilis egyensúlyi pontja a (2.1.) rendszernek.

Teljesül a következő

2.3. Állítás: Tekintsük a következő ún. kvázilineáris differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x}(t)), \qquad (2.3.)$$

amelyre tegyük fel, hogy $\underline{g}(\underline{0}) = \underline{0}$ és $\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{0}$.

Tekintsük a (2.3.) egyenletben a nemlineáris tagokat elhagyva, az egyenlet linearizáltját:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t). \qquad (2.4.)$$

Ha a (2.4.) linearizált egyenlet $\underline{p} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis, akkor a (2.3.) egyenlet $\underline{p} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzete is aszimptotikusan stabilis.

Ha a (2.4.) linearizált egyenlet $\underline{\underline{A}}$ mátrixának minden sajátérték valós része pozitív (létezik pozitív valós részű sajátértéke), akkor a (2.3.) egyenlet $\underline{p} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzete teljesen instabilis (instabilis).

2.4. Megjegyzések: **a**) A 2.3. Állításban az első feltételből következik, hogy $\underline{p} = \underline{0}$ a (2.3) egyenletnek egyensúlyi helyzete. A második feltétel szerint a $\underline{g}$ függvény már csak lineárisnál nagyobb rendű tagokat tartalmaz.

b) A 2.2. a) Állítás megfordítható: A $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet exponenciálisan stabilis pontosan akkor, ha az $\underline{f}'(\underline{p})$ mátrix stabilis, azaz minden sajátértékének valós része negatív.

c) Ez nem igaz aszimptotikus stabilitásra, mint ahogy azt az $\dot{x} = -x^3$ példája mutatja. Ekkor a Jacobi-mátrix nem stabilis, ugyanis $f'(0) = 0$, de az origó, (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ⊡

A kétdimenziós autonóm rendszerek esetén a 2.2. Állítás tovább finomítható.

2.5. Állítás: (Poincaré[5]) Ha $\underline{f} \in C^2$ és $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ a $\underline{f}'(\underline{p})$ Jacobi-mátrix tetszőleges sajátértékére, akkor a (2.1.) rendszer $\underline{p}$ egyensúlyi helyzete ugyanolyan típusú, mint a (2.2) rendszerben az origó.

2.6. Megjegyzés: A fenti tételben fontos szerepet játszott, hogy $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ teljesült tetszőleges sajátértékre. Ha ez a tulajdonság teljesül az adott mátrixra, akkor a mátrixot *nem kritikus mátrixnak*, illetve az egyensúlyi pontot *nem kritikus egyensúlyi helyzetnek* nevezzük. Ebben az esetben a linearizált rendszer a *lokális* fázisképet meghatározza. ⊡

2.7. Megjegyzés: Ha a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet kritikus, akkor az egyensúlyi helyzet stabilitása általában linearizálással nem dönthető el. Viszonylag egyszerű példák vannak arra, amikor a (2.1.) rendszer egyensúlyi helyzete stabilis vagy instabilis fókusz, de a linearizáltja ugyanitt centrum. Kritikus egyensúlyi helyzet lokális vizsgálatában fontos szerepet játszik a Ljapunov-féle direkt módszer. ⊡

[5] H. Poincaré (1854-1912) francia matematikus

2.8. Állítás: (Ljapunov-féle elégséges feltétel stabilitásra) (1892) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $\mathrm{V}:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény amelyre

1. $\mathrm{V}(\underline{x}) > \mathrm{V}(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$ (azaz $\underline{p}$ a V függvény szigorú lokális minimumhelye U-ban),
2. $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. Ha 2. helyett *csak* a

2.* $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in U$ feltétel teljesül, akkor $\underline{p}$ (lokálisan) stabilis egyensúlyi helyzet.

2.9. Megjegyzés: A (2.1) rendszernek még az egyszerűbb esetekben sem létezik konstruktívan megadható megoldása. A (2.1.) rendszer és az összetett függvény deriválási szabálya alapján:

$$\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \frac{d}{dt}\mathrm{V}(\underline{x}(t)) = \mathrm{V}'(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t) = \mathrm{V}'(\underline{x}(t)) \cdot \underline{f}(\underline{x}(t)).$$

Ha a fenti kifejezés például negatív, akkor V csökken a pályák mentén. Így a megoldások ismerete nélkül el tudjuk dönteni, hogy egy adott függvény értéke a megoldások mentén hogyan változik, hiszen ehhez csak az iránymezőt kell ismernünk. Ezt a fenti tétel segítségével ellenőrizhetjük. Ha V csökken a pályák mentén, akkor a megoldások V szintvonalain keresztül az egyre kisebb értékek felé haladnak, azaz V lokális minimumai felé törekednek. Ha az egyensúlyi helyzet egybeesik a minimummal, akkor ez stabilis, hiszen közelednek hozzá a megoldások. Ha nem esik vele egybe, akkor viszont az egyensúlyi helyzethez bármilyen közeli megoldás is eltávolodik a minimum közelébe, tehát az egyensúlyi helyzet instabilis. A tételekben megadott tulajdonságú V függvény birtokában nem csak a stabilitás, illetve az aszimptotikus stabilitás tényét tudjuk megállapítani. A V függvény ismeretében meghatározható az egyensúlyi helyzet egy alkalmas vonzási halmaza. ⊡

2.10. Megjegyzés: Ha a 2. feltétel helyett a gyengébb 2.* $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$ feltétel teljesül, akkor a megoldások nem feltétlenül közelednek V függvény minimumához, hanem csak annyit tudhatunk, hogy nem távolodnak tőle. Ez a 2.8. Állítás miatt elégséges a stabilitáshoz, de nem garantálja az aszimptotikus stabilitást! Ugyanakkor a $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$ feltétel nem mindig teljesül. ⊡

Ezért hasznos lehet a következő

2.11.a) Állítás: (Barbasin-Kraszovszkij[6]) (1952) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen létezik olyan $\mathrm{V}:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $\mathrm{V}(\underline{x}) > \mathrm{V}(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in U$,
3. a $t \to \underline{p}$ (triviális) megoldáson kívül az U halmaz nem tartalmaz olyan teljes $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ pályát, amely mentén a $t \to \mathrm{V}(\underline{x}(t, \underline{x}_0))$ függvény állandó. Ekkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis.

A fenti tétel egy variánsa a

2.11.b) Állítás: (Barbasin-Kraszovszkij) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $\mathrm{V}:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $\mathrm{V}(\underline{x}) > \mathrm{V}(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $\mathrm{V}'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in U$.

Legyen $S = \{\underline{x} \in U: \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$. Tegyük fel, hogy a $\underline{x}(t) = \underline{p}$ (triviális) megoldáson kívül nincs más teljes pálya az S-ben. Ekkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis.

2.12. Állítás: (LaSalle-féle invariancia elv) (1960) Tegyük fel, hogy a $\underline{0}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan D környezete, amelyen megadható olyan $\mathrm{V}:D \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

[6] N. N. Kraszovszkij (1924-2012) és J. A. Barbasin (1918-1969) szovjet matematikusok

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{0})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$ (azaz a $\underline{0}$ V függvény szigorú lokális minimumhelye D-ben),
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in D$

Jelölje $\mathfrak{I}$ azon teljes pályák unióját, amelyek benne vannak a $\{\underline{x} \in D: \dot{V}(\underline{x}) = 0\}$ halmazban. Ekkor a $\underline{0}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, hogy minden $\underline{x}_0 \in U$ esetén $\omega(\underline{x}_0) \subseteq \mathfrak{I}$. (→ 5.35.)

Elégséges feltételt ad a globális aszimptotikus stabilitásra az alábbi

2.13. Állítás: (Kraszovszkij) Tegyük fel, hogy megadható olyan $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$,
3. a V függvény *radiálisan nem korlátos*, azaz ha $|\underline{x}| \to \infty$, akkor $V(\underline{x}) \to \infty$,
4. a $\underline{p}$ az egyetlen invariáns halmaz az $S = \{\underline{x}: \dot{V}(\underline{x}) = 0\}$ halmazban,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet *globálisan* aszimptotikusan stabilis.

2.14. Állítás: (Kraszovszkij) Ha az 1. és a 3. tulajdonság mellett teljesül a $\frac{d}{dt}V(\underline{x}(t))$ függvényre, hogy $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén, akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis.

2.14. Megjegyzés: Megadható olyan autonóm rendszert, amelyben az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet és létezik olyan $V:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$,

de az origó *nem lesz globálisan* aszimptotikusan stabilis.
Ilyen például a következő rendszer:

$$\dot{x} = -\frac{6x}{(1+x^2)^2} + 2y$$
$$\dot{y} = 2\frac{x+y}{(1+x^2)^2}.$$

Tekintsük a $V(\underline{x}) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$ függvényt és vizsgáljuk a $V(\underline{x}) = c$ szintvonalakat. Világos, hogy $\Omega_c := \{\underline{x}: V(\underline{x}) \leq c\}$ korlátos, c növekedtével a $V(\underline{x}) = c$ szintvonalak nyíltak lesznek és az Ω_c nem korlátos halmazzá válik. Így V radiálisan korlátos. V mentén a megoldások monoton csökkennek. Tekintsük az $y(x) = \frac{2}{x-\sqrt{2}}$ hiperbolát az $x > \sqrt{2}$ sávban. Megmutatható, hogy a vektormező és a hiperbola érintőjének meredekségei kielégítik a következő feltételt: $\left.\frac{f_2}{f_1}\right|_{\text{hiberbola}} >$ hiperbola érintőjének a meredeksége. Ez azt jelenti, hogy minden állapot, amely a hiperbola fölött indul, nem a hiperbola irányába mozog. Így az origó nem lehet globálisan aszimptotikusan stabilis, még akkor sem, ha $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ az egész $\mathbb{R}^2$-re nézve. ⊡

2.15. Állítás: (Ljapunov-féle elégséges feltétel instabilitásra) Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $\underline{p}$ nem lokális minimumhelye a V függvénynek,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet instabilis.

Ismertek autonóm rendszer egyensúlyi helyzetére vonatkozó különféle instabilitási feltételek.

2.16. Állítás: Tegyük fel, hogy a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet instabilis.

Nyereg típusú instabilitás esetén $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x})$ pozitivitása az egyensúlyi helyzet *teljes* környezetében nem biztosítható. Ebben az esetben alkalmazható az alábbi tétel, ami szintén elégséges feltételt ad instabilitásra.

2.17. Állítás: (Csetajev[7]) (1934) Ha a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete és ezen egy $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, valamint adott egy $U_1 \subset U$ nyílt összefüggő halmaz, amelyre fennáll:
1. $\underline{p} \in \partial U_1$ (∂U_1 az U_1 halmaz határát jelöli),
2. Ha $\underline{x} \in \partial U_1 \cap U$, akkor $V(\underline{x}) = 0$,
3. Ha $\underline{x} \in U_1 \cap U$, akkor $V(\underline{x}) > 0$ és $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$,
akkor $\underline{p}$ instabilis egyensúlyi helyzet.

Autonóm differenciálegyenlet egyensúlyi helyzetének instabilitására jól alkalmazható még az alábbi
2.18. Állítás: Tegyük fel, hogy a (2.1.) rendszernek az $\underline{x} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzete és az origónak létezik olyan $U = \{\underline{x}: |\underline{x}| \le k\}$ környezete, amelyen megadható olyan $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, amelyre

1. $V(\underline{0}) = 0$,
2. $\dot{V}(\underline{0}) = 0$ és $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in U$,
3. Az origó minden környezetében létezik legalább egy $\underline{x}$ pont, amelyre $V(\underline{x}) > 0$,

akkor az origó instabilis egyensúlyi helyzet.

2.19. Megjegyzés: A fenti tételben a „tipikus" függvény a $V(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, $x^{\alpha} - y^{\beta}$. ⊡

2.20. Definíció: A $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1 *függvény deriváltja az* $\underline{f}$ *vektormező mentén* (A V függvény ún. *Lie-deriváltja*) $(L_{\underline{f}}V)(\underline{x}) := \langle V'(\underline{x}), \underline{f}(\underline{x})\rangle$, ahol $\underline{x} \in D_{\underline{f}}$, ahol $\langle \cdot,\cdot \rangle$ az $\mathbb{R}^n$-beli skalárszorzat.

2.21. Állítás: Legyen $\underline{x}(t)$ a (2.1) rendszer egy megoldása. Ekkor a $V^*(t) = V(\underline{x}(t))$ képlettel definiált függvényre $\dot{V}^*(t) = (L_{\underline{f}}V)(\underline{x}(t))$, ahol $t \in D_{\underline{x}}$.

2.22. Megjegyzés: Fontos speciális eset, amikor V függvény értéke a megoldások mentén állandó. ⊡

2.23. Definíció: A V függvényt a (2.1.) rendszer *első integráljának* nevezzük, ha $(L_{\underline{f}}V)(\underline{x}) = 0$.

2.24. Állítás: Legyen V függvény a (2.1.) rendszer első integrálja és $c \in \mathcal{R}\,V$.
Ekkor az $F = \{\underline{x}: V(\underline{x}) = c\}$ invariáns halmaz. (→ 3.2. Definíció)

Az egyensúlyi helyzet attraktivitási tartományáról szól az alábbi fontos
2.25. Megjegyzés: A 2.8 Állításban láttuk, hogy ha a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek létezik olyan U környezete, amelyen megadható olyan $V{:}U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{p}$, $\underline{x} \in U$,

akkor $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. Ha ezen túlmenően létezik olyan $c > V(\underline{p})$, hogy az $S_c = \{\underline{x} \in U: V(\underline{x}) \le c\}$ korlátos halmaz, akkor a $\underline{p}$ vonzási tartománya tartalmazza az S_c halmazt. Sokszor előfordul, hogy alkalmas $c^* > V(\underline{p})$ esetén, minden $V(\underline{p}) < c < c^*$esetén az S_c korlátos halmaz. Ekkor az $U := \cup\{S_c : V(\underline{p}) < c < c^*\}$ halmazt tartalmazza a $\underline{p}$ vonzási tartománya. Ha $U = \mathbb{R}^n$ és $|\underline{x}| \to \infty$ esetén $V(\underline{x}) \to \infty$, akkor valamilyen c-re teljesül, hogy az $S_c = \{\underline{x} \in U: V(\underline{x}) \le c\}$

[7] N. G. Csetajev (1902-1959) szovjet matematikus

korlátos halmaz, azaz ebben az esetben a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis. (Ezt már megfogalmaztuk a 2.13. Állításban is.) ⊡

2.26. Megjegyzés:
LaSalle elv variánsa **1.**
Jelölje U a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzetnek egy környezetét, legyen $\mathrm{V}:U \to \mathbb{R}$ C^1 függvény és tegyük fel, hogy az $S_c = \{\underline{x} \in U: \mathrm{V}(\underline{x}) \leq \mathrm{c}\}$ (zárt) halmaz valamilyen $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$-re korlátos. Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S_c \qquad (1)$$

autonóm differenciálegyenletet és tegyük fel, hogy $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) \leq 0$, ha $\underline{x} \in S_c$.
Ekkor a feltétel miatt az S_c halmaz nyilván pozitívan invariáns. A V (Ljapunov-függvény) (1) rendszer szerinti deriváltjának zéró halmazán vezessük be a $N_{\dot{\mathrm{V}}} = \{\underline{x} \in S_c: \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$ jelölést és majd a $N_{\dot{\mathrm{V}}}$ halmazban elhelyezkedő teljes trajektóriák uniójára az $\mathrm{Inv}\, N_{\dot{\mathrm{V}}} = \{\underline{x} \in N_{\dot{\mathrm{V}}} : \gamma(\underline{x}) \in N_{\dot{\mathrm{V}}}\}$ jelölést. A fenti feltételek mellett: $\omega(\underline{x}) \subset \mathrm{Inv}\, N_{\dot{\mathrm{V}}}$ minden $\underline{x} \in N_{\dot{\mathrm{V}}}$-re. (→ 5.35. Def.) Speciálisan, ha $\underline{x}_0 \in S_c$ egyensúlyi helyzet és $\mathrm{Inv}\, N_{\dot{\mathrm{V}}} = \{\underline{x}_0\}$, akkor az $\underline{x}_0$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis és az $\underline{x}_0$ vonzási tartománya tartalmazza a S_c halmazt. ⊡

LaSalle[8] elv variánsa **2.**
Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega$$

autonóm rendszert. Legyen $\mathrm{V}:\Omega \to \mathbb{R}$ C^1 függvény és $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan kompakt invariáns halmaz, amelyre $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) \leq 0$, ha $\underline{x} \in S$. Jelölje $N = \{\underline{x} \in S: \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$, valamint legyen M az N halmazban elhelyezkedő teljes trajektóriák uniója. Ekkor tetszőleges $\underline{x}_0 \in S$ esetén az $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ trajektóriára teljesül, hogy $d(\underline{x}(t, \underline{x}_0), M) := \inf_{\underline{y} \in M} |\underline{x}(t, \underline{x}_0) - \underline{y}| \to 0$, ha $t \to \infty$.

Nemlineáris rendszerek egyensúlyi helyzeteire is értelmezzük az egyensúlyi helyzet típusait a lineáris rendszerekre definiált típusok geometriai tulajdonságainak analógiája alapján. (Nem teljes osztályozás! (→ 3.53. feladat.)

2.27. Definíció: Tekintsünk egy $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm rendszert. Írjuk fel a $\underline{p}$ egyensúlyi helyzet egy U környezetében a megoldásokat (r, φ) polárkoordinátás alakban. A $\underline{p}$
- *stabilis csomópont*, ha $\lim_{t \to +\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t)| < \infty$,
- *instabilis csomópont*, ha $\lim_{t \to -\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t \to -\infty} |\varphi(t)| < \infty$,
- *nyeregpont*, ha létezik két olyan pálya U-ban, melyek $t \to +\infty$ esetén $\underline{p}$-hez tartanak, és létezik két olyan pálya U-ban, melyek $t \to -\infty$ esetén $\underline{p}$-hez tartanak. (ezek a pályák az ún. szeparátrixok.) A többi pontból induló pálya pedig $t \to +\infty$ esetén és $t \to -\infty$ esetén is elhagyja U-t,
- *stabilis fókusz*, ha $\lim_{t \to +\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t)| = \infty$,
- *instabilis fókusz*, ha $\lim_{t \to -\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t \to -\infty} |\varphi(t)| = \infty$,
- *centrum*, ha U-ban az egyensúlyi helyzeten kívül minden pálya periodikus.

2.28. Megjegyzés: Az első integrál segítségével megkaphatjuk a fázisképet, hiszen annak szintvonalain fekszenek a rendszer pályái. Sokszor úgy sikerül megmutatni a (2.1.) rendszer egyensúlyának stabilitását, hogy sikerül találni egy olyan első integrált, amelynek a szintfelületei (nívóhalmazai) korlátos, zárt halmazt alkotnak. Ha az első integrál, mint többváltozós függvény (lokálisan) konvex vagy konkáv, akkor a fázistérben a pályagörbék zártak. ⊡

Nem állandó első integrálok megadására nincs konstruktív módszer. Van példa olyan rendszerre, amelynek nincs is (nem állandó) első integrálja!

[8] J. P. LaSalle (1916-1983) francia matematikus

Általában, ezt ne is várjuk, ugyanis általános esetben a fázisgörbék nem helyezkednek el semmilyen függvény egyetlen szintfelületén. Van olyan (fontos) speciális eset, amikor erre van esélyünk.

2.29. Definíció: Azt mondjuk, hogy a
$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x,y)\\ \dot{y} &= f_2(x,y)\end{aligned} \qquad (2.5)$$
rendszer *Hamilton*[9]*-rendszer*, ha létezik $H: D_{\underline{f}} \to \mathbb{R}$ $(\underline{f} = (f_1, f_2)$ kétszer differenciálható függvény, amelyre $f_1(x,y) = \partial_2 H(x,y)$ és $f_2(x,y) = -\partial_1 H(x,y)$.

2.30. Megjegyzés: Ismeretes, hogy a fenti tulajdonságú H függvény létezésének feltétele, hogy $\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y) = 0$, vagyis $\operatorname{div} \underline{f}(x,y) = 0$. Ekkor a (2.5) rendszer $H(x,y)$ *Hamilton-függvénye* az $\underline{g}(x,y) = (-f_2, f_1)$ vektormező primitív függvénye, és természetesen a $H(x,y)$ maga is egy első integrál, ugyanis ebben az esetben $(L_{\underline{f}} H)(x,y) = 0$. ⊡

2.31. Megjegyzés: Tekintsük a (2.5.) rendszer linearizáltját, az $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{x}$ rendszert. Ekkor
$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \partial_{21} H(x,y) & \partial_{22} H(x,y) \\ -\partial_{11} H(x,y) & -\partial_{12} H(x,y) \end{pmatrix}.$$
Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) egyensúlyi helyzet nem elfajult, azaz $\det \underline{f}'(x_0, y_0) = \det \underline{\underline{J}}(x_0, y_0) \neq 0$. Ellenőrizhető, hogy $\det \underline{\underline{J}} = \det H''$. Világos, hogy $\operatorname{Tr} \underline{\underline{J}} = 0$.

a) $\operatorname{Tr} \underline{\underline{J}} = 0$ és $\det \underline{\underline{J}} < 0$ esetén a linearizált rendszernek az origó nyeregpontja, (1.4. Állítás) így az (x_0, y_0) (2.5.) rendszernek is nyeregpontja. (2.5. Állítás) Ez pontosan akkor következik be, ha a $H(x,y)$ Hamilton-függvénynek az (x_0, y_0) nyeregpontja.

b) $\operatorname{Tr} \underline{\underline{J}} = 0$ és $\det \underline{\underline{J}} > 0$ esetén a linearizált rendszernek az origó centruma. (1.4. Állítás) Ismeretes (2.40. Állítás) , hogy ekkor a (2.5) rendszer (x_0, y_0) egyensúlyi helyzete centrum, vagy fókusz. Meggondolható, hogy az (x_0, y_0) egyensúlyi helyzet centrum. Megmutatható, hogy Hamilton-rendszer esetén „működik" a linearizálás, azaz ha a linearizált rendszernek az origó centruma, akkor az egyensúlyi helyzetben a Hamilton-rendszernek is centruma van. ⊡

2.32. Megjegyzés: A Hamilton-rendszerek fontos speciális esete az
$$\ddot{x} + \mathrm{U}'(x) = 0 \qquad (2.6.)$$
ún. egy szabadsági fokú konzervatív mechanikai rendszer, ahol U C^1 függvény.
A megfelelő ekvivalens differenciálegyenlet-rendszer
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -\mathrm{U}'(x).\end{aligned} \qquad (2.7.)$$
A (2.7.) rendszer első integrálja a $\mathrm{V}(x,y) = \frac{y^2}{2} + \mathrm{U}(x)$ függvény. A rendszer trajektóriái a V függvény szintvonalain helyezkednek el. Jelölje $\mathrm{T}(x) = \frac{1}{2}(\dot{x})^2$ (mozgási energia) és $\mathrm{U}(x) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(t)dt$ helyzeti energia).A teljes mechanikai energia: $\mathrm{E}(x) = \mathrm{T}(x) + \mathrm{U}(x)$ a (2.6.) első integrálja. ⊡

2.33. Megjegyzés: A (2.7.) rendszer Jacobi[10] mátrixa viszonylag egyszerű szerkezetű:
$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{U}''(x) & 0 \end{pmatrix}.$$
$\operatorname{Tr} \underline{\underline{J}} = 0$, azaz az egyensúlyi helyzet csak nyereg vagy centrum típusú lehet. Mivel, $\det \underline{\underline{J}} = \mathrm{U}''(x)$, ezért, ha az egyensúlyi helyzetben $\mathrm{U}''(x) > 0$, akkor az centrum, ha az egyensúlyi helyzetben $\mathrm{U}''(x) < 0$, akkor az nyeregpont. ⊡

[9] W. R. Hamilton (1805-1865) angol matematikus
[10] G. C. J. Jacobi (1804-1851) német matematikus

Fontosak azok a rendszerek, amelyben létezik első integrál.

2.34. Definíció: Az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$ rendszer *konzervatív*, ha létezik $\mathrm{E}:D_{\underline{f}} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható tetszőleges nyílt halmazon nem konstans függvény, amely a rendszer pályáin konstans, azaz

$$\dot{\mathrm{E}}(\underline{x}(t)) = \frac{d}{dt}\mathrm{E}(\underline{x}(t)) = \mathrm{E}'(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t) = \mathrm{E}'(\underline{x}(t)) \cdot \underline{f}(\underline{x}(t) = 0.$$

2.35. Állítás: Konzervatív rendszerben az egyensúlyi pont nem lehet aszimptotikusan stabilis.

2.36. Állítás: Ha az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$ konzervatív rendszer esetén a rendszer első integráljának az $\underline{x}_0$ egyensúlyi pontban szigorú minimumhelye van, akkor $\underline{x}_0$ stabilis egyensúlyi helyzet.

2.37. Megjegyzés: A fenti állításban $n = 2$ esetben, ha $\underline{x}_0$ *izolált* egyensúlyi pont, akkor az $\underline{x}_0$ centrum. Nem izolált egyensúlyi pont esetén ez nem igaz. Az alábbi példa meggyőz minket erről:

$$\dot{x} = xy$$
$$\dot{y} = -x^2.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $\mathrm{E}(x,y) = x^2 + y^2$ első integrál, az origó nem izolált egyensúlyi helyzet, az $\mathrm{E}(x,y)$ függvénynek az origó szigorú minimumhelye. Viszont az origó nem centrum! ⊡

2.38. Megjegyzés: A vektormező szimmetriái segíthetnek a pályagörbék lokális vizsgálatában. Előfordulhat, hogy a pályák szimmetrikusak egy, az egyensúlyi helyzeten áthaladó tengelyre, síkra vagy az egyensúlyi helyzetre. Ezt a megoldások ismerete nélkül is be lehet bizonyítani.
Tekintsük egy általános $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ autonóm rendszert. Legyen $\mathbb{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az a tükrözés, amely a pályákat önmagukba képezi az idő visszafordításával, azaz egy $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részét a $\mathbb{T}$ leképezés a $\mathbb{T}(\underline{p})$ pontból induló pálya negatív értékekhez tartozó részére képezi. Ekkor $-\underline{f}(\mathbb{T}(\underline{p})) = \mathbb{T}'(\underline{p}) \cdot \underline{f}(\underline{p})$.
Ez utóbbi ellenőrzéséhez nem kell a megoldások ismerete.

I. Kétdimenzióban, a függőleges tengelyre való tükrözés a $\mathbb{T}(x;y) = (-x,y)$. Az $\dot{x} = f_1(x,y)$, $\dot{y} = f_2(x,y)$ pályái a *függőleges tengelyre szimmetrikusak az idő megfordításával*, ha

$$f_1(-x,y) = f_1(x,y) \text{ és } -f_2(-x,y) = f_2(x,y).$$

II. Kétdimenzióban, a vízszintes tengelyre való tükrözés a $\mathbb{T}(x;y) = (x,-y)$. Az $\dot{x} = f_1(x,y)$, $\dot{y} = f_2(x,y)$ rendszer pályái a *vízszintes tengelyre szimmetrikusak az idő megfordításával*, ha

$$f_1(x,-y) = -f_1(x,y) \text{ és } f_2(x,-y) = f_2(x,y).$$

Például, tekintsük az $m\ddot{x} = F(x)$ mechanikai rendszert. A fenti rendszer invariáns a $t \to -t$ transzformációra ($\ddot{x}$ változatlan marad) és a fentivel ekvivalens

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \frac{1}{m}F(x)$$

rendszer invariáns $(t,y) \to (-t,-y)$ transzformációra. (Például a matematikai inga esetén, mint egy filmet visszafelé nézve, nem látunk különbséget.)
III. Megadható az origóra szimmetrikus pálya tulajdonsága is.
Ekkor egy $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részét a $\mathbb{T}$ leképezés a $\mathbb{T}(\underline{p})$ pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részére képezi. Ekkor $\underline{f}(\mathbb{T}(\underline{p})) = \mathbb{T}'(\underline{p}) \cdot \underline{f}(\underline{p})$.
Ez utóbbi ellenőrzéséhez sem kell a megoldások ismerete.
Kétdimenzióban, az origóra való tükrözés a $\mathbb{T}(x;y) = (-x;-y)$. Az $\dot{x} = f_1(x,y)$, $\dot{y} = f_2(x,y)$ rendszer pályái az *origóra szimmetrikusak*, ha $f_1(-x,-y) = -f_1(x,y)$ és $f_2(-x,-y) = -f_2(x,y)$. ⊡

2.39. Állítás: Legyen adott egy $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm differenciálegyenlet-rendszer, ahol $\underline{f} \in C^1$ egy síkbeli nyílt halmazon, valamint $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$. Tegyük fel továbbá, hogy az origó a

linearizált rendszernek centruma. Ekkor az origó az eredeti rendszernek vagy centruma,vagy ún. centrum-fókusza (3.53. feladat) vagy fókusza.

Megmutatható (Dulac 1923.), hogy síkbeli analitikus rendszernek nem lehetséges végtelen sok határciklusa, így teljesül a 2.39. Állítás élesítése is.

2.40. Állítás: Legyen adott egy $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm differenciálegyenlet-rendszer, Tegyük fel, hogy az $\underline{f}$ vektormező *analitikus* egy síkbeli nyílt halmazon és $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$. Ha az origó a linearizált rendszernek centruma, akkor az origó az eredeti rendszernek vagy centruma vagy fókusza.

Nagyon fontos a 2.39. állítás következménye:

2.41. Következmény: Legyen adott egy $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ *kétdimenziós* autonóm differenciálegyenlet-rendszer, ahol $\underline{f} \in C^1$ egy $E \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli nyílt halmazon. Tegyük fel, hogy

a) $P(x_0, 0) \in E$ $(P(0, y_0) \in E)$ izolált egyensúlyi helyzet,

b) $\underline{f}'(P(x_0, 0))$ $(\underline{f}'(P(0, y_0)))$ Jacobi mátrix tiszta képzetes sajátértékű kritikus mátrix, így az origó a linearizált rendszernek a centruma,

c) a rendszer pályái a vízszintes (függőleges) tengelyre szimmetrikusak az idő megfordításával.

Ekkor a $P(x_0, 0)$ $(P(0, y_0))$ egyensúlyi helyzet a nemlineáris rendszernek is centruma, azaz van olyan környezete, amelyben minden megoldás periodikus.

2.42. Megjegyzés: Ljapunov-függvény konstruktív megadási módja lineáris rendszerek esetén. **I.**
Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszert és legyen $\mathrm{V}(\underline{x}) := < \underline{x}, \underline{\underline{P}}\,\underline{x} >= \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ egy pozitív definit és szimmetrikus mátrix. Ekkor minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor esetén $\mathrm{V}(\underline{x}) > 0$.
Mivel

$$\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}) + (\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T)\underline{\underline{P}} \cdot \underline{x} = \underline{x}^T \cdot (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{x} = -\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{x},$$

ezért a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit (minden sajátértéke negatív), ha létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. *Ljapunov-egyenlet*:

$$\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}. \ (*)$$

Megmutatható, hogy az origó a rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete pontosan akkor, ha a Ljapunov-egyenletnek van megoldása. ⊡

Ezt mondja ki az alábbi

2.43. Állítás: A következő állítások ekvivalensek:

1. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ teljesül a mátrix minden sajátértékére.

2. Van olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amely esetén a $(*)$ Ljapunov egyenletnek létezik $\underline{\underline{P}}$ pozitív definit mátrix megoldása.

3. Minden $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix esetén a $(*)$ Ljapunov egyenletnek létezik $\underline{\underline{P}}$ pozitív definit mátrix megoldása a következő alakban:

$$\underline{\underline{P}} = \int_0^\infty e^{\underline{\underline{A}}^T t} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot e^{\underline{\underline{A}} t} dt.$$

2.44. Megjegyzés: Ljapunov-függvény konstruktív megadási módja lineáris rendszerek esetén. **II.**
Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszert, ahol $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, ..n)$ $n \times n$-es adott mátrix. Tegyük fel, hogy az origó aszimptotikusa stabilis. Jelölje $\underline{\varphi}_i(t)$ az egyenlet $\underline{\varphi}_i(0) = \underline{e}_i$ feltételhez tartozó megoldását, ahol $\underline{e}_i = (0, 0, 0, \ldots .1, 0, 00)$. Ekkor $\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \underline{\varphi}_i(t)$. $\mathrm{V}(\underline{x}) := \int_0^\infty |\underline{\varphi}(t, \underline{x})|^2 dt$.
A V pozitív definit és az improprius integrál konvergens. Mivel $\mathrm{V}(\underline{\varphi}(t, \underline{x})) = \int_t^\infty |\underline{\varphi}(t, \underline{x})|^2 d\tau$, így $\frac{d}{dt}\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \frac{d}{dt}\,\dot{\mathrm{V}}(\underline{\varphi}(t, \underline{x}))\Big|_{t=0} = -\,|\underline{x}|^2 < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$. Így a fent definiált $\mathrm{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény Ljapunov-függvény. ⊡

2.45. Megjegyzés: Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x})$ kvázilineáris rendszert.

Tételezzük fel, hogy

$$\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} \to 0, \text{ ha } \underline{x} \to \underline{0} \text{ és } \underline{g}(\underline{0}) = \underline{0}.$$

Tegyük fel, hogy az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete a linearizált rendszernek. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit szimmetrikus mátrix, amely adott $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit szimmetrikus mátrixhoz tartozik, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet:

$$\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}.$$

Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{g}(\underline{x})) + (\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T + \underline{g}(\underline{x})^T) \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x} = -\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{x} + 2\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{g}(\underline{x})$. $(*)$

A feltevés szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $\underline{x} \in S(\underline{0}, \delta)$-re

$$|\underline{g}(\underline{x})| \le \varepsilon |\underline{x}|.$$

Így $\underline{x} \in S(\underline{0}, \delta)$ esetén $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) \le -\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{x} + 2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon|\underline{x}|^2 \le -(\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}}) - 2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon)|\underline{x}|^2$

Elegendően kicsi ε-ra $\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}}) - 2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon > 0$, ezért ilyen ε-ra az $S(\underline{0}, \delta)$-n a $\mathrm{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$ függvény pozitív definit és a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit, azaz $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \in S(\underline{0}, \delta)$, ahol $\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}})}{2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})}$.

Az origó attraktivitási tartománya: $T \supset \{\underline{x}: \mathrm{V}(\underline{x}) < r\}$, ahol $r = \max\{\mathrm{V}(\underline{x}): \underline{x} \in S(\underline{0}, \delta)\}$. ⊡

2.46. Megjegyzés: Speciális autonóm rendszer esetén is meg lehet konstruktívan adni Ljapunov-függvényt. (*Kraszovszkij-módszer*)

Tekintsük a továbbiakban az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \qquad (2.8.)$$

egy olyan n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{f} \in C^1(D), \underline{0} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy a rendszer egyensúlyi helyzete az origó, valamint, hogy az $\underline{f}'(\underline{x}) =: \underline{\underline{A}}(\underline{x})$ deriválttenzor mátrixára teljesül, hogy az $F(\underline{x}) := \underline{\underline{A}}(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}^T(\underline{x})$ negatív definit minden $\underline{x} \in D$ esetén. Ekkor az origó lokálisan aszimptotikusan stabilis és a $\mathrm{V}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}), \underline{x} \in D$ a rendszer egy Ljapunov-függvénye lesz. Ha ezenkívül $D = \mathbb{R}^n$, és a $\mathrm{V}(\underline{x})$ radiálisan nem korlátos, akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. A $\mathrm{V}(\underline{x})$ pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot (\underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}(\underline{x})) \cdot \underline{f}(\underline{x})$. Mivel az $\underline{\underline{A}}(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}^T(\underline{x})$ negatív definit, ezért a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit. ⊡

Egy példával illusztráljuk a Kraszovszkij-módszert.

Példa: $x_1 = -x_1$

$x_1 = x_1 - x_2 - x_2^3$.

Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}$, $\underline{f}'(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$. Az $F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix}$ negatív definit minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ esetén. Jelölje $\mathrm{V}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2$. A $\mathrm{V}(\underline{x})$ olyan pozitív definit függvény, amelyre a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit és a $\mathrm{V}(\underline{x})$ radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ⊡

2.47. Megjegyzés: A 2.46. Megjegyzésben látottak általánosíthatók autonóm rendszer esetén. (*Általánosított Kraszovszkij-módszer*) Tekintsük a továbbiakban az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \qquad (2.9.)$$

egy olyan n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{f} \in C^1(D), \underline{0} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete az origó, és jelölje $\underline{f}'(\underline{x}) := \underline{\underline{A}}(\underline{x})$ az $\underline{f}$ vektormező deriválttenzorának mátrixát minden $\underline{x} \in D$ esetén. Legyen $\underline{\underline{P}}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix. $\mathrm{V}(\underline{x}) := \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{f}(\underline{x}), \underline{x} \in D$. $\mathrm{V}(\underline{x})$ pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{f}^T(\underline{x}) \cdot (\underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x})) \cdot \underline{f}(\underline{x})$. Jelölje $\underline{\underline{Q}}(\underline{x}) := \underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x})$. Világos, hogy ha létezik olyan $\underline{\underline{P}}$ pozitív definit, szimmetrikus mátrix, amelyre a fenti $\underline{\underline{Q}}(\underline{x})$ mátrix negatív definit minden $\underline{x} \in D$ esetén, akkor a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit minden $\underline{x} \in D$-re. Így az origó 2.9. rendszernek aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete. ⊡

2.48. Megjegyzés: Ljapunov-függvény megadási módja a *gradiens módszerrel*.
Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ (2.1.) n-dimenziós differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\underline{f} \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ egyszeresen összefüggő tartomány és az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x})$ a rendszer egy alkalmas Ljapunov-függvénye. Jelölje $\underline{g}(\underline{x}) := \operatorname{grad} \mathrm{V}(\underline{x})$. Ekkor természetesen $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{g}^T(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x})$. Megválasztható a $\underline{g}$ függvény, hogy a $\mathrm{V}(\underline{x})$ pozitív definit és a $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x})$ negatív definit legyen. A $\underline{g}$ vektormező potenciálos, így a $\underline{g}$ rotációmentessége miatt a $\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}$ deriválttenzor mátrixa szimmetrikus, azaz minden $i, j = 1, 2, \dots n$-re $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$. Mivel a $\underline{g}$ konzervatív is, így a $\mathrm{V}(\underline{x})$ megadható az alábbi vonalintegrállal is. $\mathrm{V}(\underline{x}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} \underline{g}(\underline{u}) d\underline{u}$. A fenti vonalintegrálban a tengelyekkel párhuzamosan is integrálhatunk:

$$\mathrm{V}(\underline{x}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} \sum_{i=1}^{n} g_i(\underline{u})\, du_i = \int_0^{x_1} g_1(u_1, 0, .., 0) du_1 + \int_0^{x_2} (g_2(x_1, u_2, 0, .., 0) du_2 + \cdots +$$
$$+ \int_0^{x_n} (g_n(x_1, x_2, .., u_n) du_n, \text{ ahol } \underline{g} = (g_1, g_2, \dots g_n)^T.$$

A fenti módszer sok esetben reménykeltő lehet, ezt egy példával illusztráljuk.
Példa: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -h(x) - ay,$$

ahol $h \in C^1$, $h(0) = 0, xh(x) > 0$, ha $x \neq 0$, $x \in (-d, c)$ $(c, d > 0)$ és $a > 0$.
A fentiek szerint fogunk eljárni. Az origó egyensúlyi helyzet. Legyen

$$\underline{g}(x, y) = \big(g_1(x, y), g_2(x, y)\big)^T := \begin{pmatrix} \alpha(x, y)x + \beta(x, y)y \\ \gamma(x, y)x + \delta(x, y)y \end{pmatrix},$$

ahol $\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)$ és $\delta(x, y)$ később meghatározandó folytonosan differenciálható skalármezők. Mivel a $\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}$ deriválttenzor mátrixa szimmetrikus, ezért

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y)x + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)y + \beta(x, y) = \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y)x + \gamma(x, y) + \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, y)y. \quad (*)$$

Legyen a továbbiakban

$$\alpha(x, y) := \alpha(x), \beta(x, y) := \beta, \gamma(x, y) := \gamma, \delta(x, y) := \delta.$$

A $(*)$ miatt $\beta = \gamma$. Így

$$\dot{\mathrm{V}}(x, y) = (\alpha(x, y)x + \beta(x, y)y)y + (\gamma(x, y)x + \delta(x, y)y)(-h(x) - ay) =$$
$$= (\alpha(x)x - \delta h(x) - a\beta x)y - (a\delta - \beta)y^2 - \beta h(x)x.$$

Legyen

$$\alpha(x)x - \delta h(x) - a\beta x := 0$$

Ekkor

$$\dot{\mathrm{V}}(x, y) = -(a\delta - \beta)y^2 - \beta h(x)x.$$

Továbbá

$$\mathrm{V}(x, y) = \int_0^x (\alpha(u)u + \beta y) d\underline{u} + \int_0^y (\beta x + \delta u) d\underline{u} =$$
$$= \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} a\beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta \int_0^x h(u) du.$$

Legyen

$$\delta > 0,\ 0 < \beta < a\delta, \text{ például } \beta = ka\delta, \text{ ahol } 0 < k < 1.$$

Ekkor a fentiek értelmében a $\begin{pmatrix} a\beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2k\delta & ka\delta \\ ka\delta & \delta \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit, így a $\mathrm{V}(x, y)$ is az. Világos, hogy a $\dot{\mathrm{V}}(x, y) = -(a\delta - ka\delta)y^2 - \beta h(x)x$ negatív definit. Következésképpen az origó lokálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet és az origó egy vonzási halmaza $M = \{(x, y) : x \in (-c, c)\}$. Általában linearizálással az origó stabilitása nem dönthető el. ⊡

2. Feladatok

2.1. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = x^2$ differenciálegyenlet $x = 0$ megoldásának stabilitását!

2.2. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = (1-x)x$ egyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitását! Aszimptotikus stabilitás esetén határozzuk meg a vonzási tartományt!

2.3. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = (x-1)x(x+1)^2$ egyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitását! Aszimptotikus stabilitás esetén határozzuk meg a vonzási tartományt!

2.4. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az $\dot{x} = x - x^3$ egyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitását! Aszimptotikus stabilitás esetén határozzuk meg a vonzási tartományt!

2.5. feladat: (Megoldás) Lehetséges-e egy differenciálegyenletnek olyan instabilis egyensúlya, amelynek a környezetéből induló *minden* megoldás mégis korlátos?

Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenleteknek a fázisportréit!

2.6. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - k\dot{x} = 0$ (k valós paraméter)

2.7. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - 2x\dot{x} = 0$

2.8. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + x\mathrm{sign}x = 0$

Az alábbi feladatokban vizsgáljuk meg az origó, mint egyensúlyi helyzet típusát a stabilitás szempontjából!

2.9. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = 2xy - x + y$$
$$\dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y$$

2.10. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x^2 + y^2 - 2x$$
$$\dot{y} = 3x^2 - x + 3y$$

2.11. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x$$
$$\dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y$$

2.12. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = xy + x$$
$$\dot{y} = x^2 - y$$

2.13. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = xy - y + x$$
$$\dot{y} = 3x - 2y - xy$$

2.14. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x + x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = y - xy$$

2.15. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = 2x + y + xy^3$$
$$\dot{y} = x - 2y - xy$$

2.16. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -y\sqrt{1 - x^2} \qquad |x| < 1$$
$$\dot{y} = x\sqrt{1 - x^2}$$

2.17. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = \sin y$
$\dot{y} = -\sin x$

Az alábbi feladatokban vizsgáljuk meg egyensúlyi helyzetek típusát a stabilitás szempontjából!

2.18. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + y$
$\dot{y} = x + y^2$

2.19. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - xy$
$\dot{y} = x - y^3$

2.20. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - y$
$\dot{y} = x^2 - y^2$

2.21. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - xy$
$\dot{y} = x^2 - y$

2.22. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy - x$
$\dot{y} = xy - y$

2.23. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - x^2 - xy$
$\dot{y} = 3y - xy - 2y^2$

2.24. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + xy$
$\dot{y} = x^2 - y$

2.25. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x + 2xy^2$
$\dot{y} = -2y + 4x^2y$

2.26. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^3 + y$
$\dot{y} = x + y^3$

2.27. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x + xy^2$
$\dot{y} = -4y$

2.28. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -\sin x - 3y$

2.29. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y^2 - 1$
$\dot{y} = x^2 + y^2 - 2$

2.30. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^2 + y^2 - 25$
$\dot{y} = xy - 12$

2.31. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y$
$\dot{y} = x^3 - x + xy$

2.32. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - y$
$\dot{y} = x + y - 2xy$

2.33. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - xy$
$\dot{y} = (x - 1)y$

2.34. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x^3 - x - y$$

2.35. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x(1 - x - y)$$
$$\dot{y} = y(3 - x - \tfrac{3}{2}y)$$

2.36. feladat: (Megoldás) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet egyensúlyi helyzetének stabilitását:
$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = \ddot{x}x + \ddot{x}\dot{x}$$

2.37*. feladat: (Megoldás) Határozzuk meg az origóban a linearizált rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének a dimenzióját! (Lorenz-rendszer)
$$\dot{x} = \alpha(y - x)$$
$$\dot{y} = \beta x - y - xz \qquad (\alpha, \beta \text{ és } \gamma > 0)$$
$$\dot{z} = -\gamma z + xy$$

Határozzuk meg a linearizált rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének a dimenzióját az egyensúlyi helyzetekben!

2.38. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y + z$$
$$\dot{y} = x^2 - 2y$$
$$\dot{z} = x + y$$

2.39. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = xy$$
$$\dot{y} = x + y$$
$$\dot{z} = x + z$$

2.40. feladat. (Megoldás)
$$\dot{x} = x + y + 1$$
$$\dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}$$

2.41. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = x^2 - yz - 1$$

Vizsgáljuk az alábbi autonóm rendszerek globális fázisképét!

2.42*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x - x^3 - xy^2 - y$$
$$\dot{y} = y - x^2y - y^3 + x$$

2.43*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -y - xy^2 - x^3$$
$$\dot{y} = x - y^3 - x^2y$$

2.44*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y + x - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = y - x - y^3 - x^2y$$

2.45*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 - y$$
$$\dot{y} = y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + x$$

2.46*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) - y$$
$$\dot{y} = y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) + x$$

2.47*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xf\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - y$
$\dot{y} = yf\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x$, ahol $f \in C(\mathbb{R})$

2.48*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x - xy$ (Lotka-Volterra-féle populációdinamikai modell)
$\dot{y} = xy - y$

2.49. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = xy - y$

2.50. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y^3$
$\dot{y} = x^3$

2.51*. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} = -x - \alpha x^3$ $(\alpha > 0)$

2.52. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + kx = 0$ (Csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás) $(k > 0)$

2.53. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -y^2 - x$

2.54. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + e^x = k$ (k valós paraméter)

2.55. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - e^x = k$ (k valós paraméter)

2.56*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x^4 - x^2$

2.57. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x\sqrt{x^2+y^2} - y$
$\dot{y} = -y\sqrt{x^2+y^2} + x$

2.58*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$
$\dot{y} = 2x$

2.59. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása!
$\dot{x} = y^5$
$\dot{y} = -x^3$

Vizsgáljuk az alábbi Hamilton-rendszerek egyensúlyi helyzeteinek a típusát!

2.60. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -2x^3$

2.61. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$
$\dot{y} = 2xy$

2.62. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = 2x - 2x^3$

2.63. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -x^3 - x$

2.64. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = (2\cos x - 1)\sin x$

Alkalmas Ljapunov-függvény segítségével döntsük el az origó stabilitását!

2.65. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^3 - y$
$\dot{y} = x + y^3$

2.66. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y^3 - x^5$
$\dot{y} = -x - y^3 + y^5$

2.67. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy^2 - x^3$
$\dot{y} = -y^3 - 2x^2y$

2.68. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -xy^4$
$\dot{y} = x^6y$

2.69. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy + x^3$
$\dot{y} = -y + y^2 - x^3 + x^4$

2.70*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y^5 - x^3$
$\dot{y} = -2xy^2$

2.71*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y - x^3$
$\dot{y} = -x^3$

2.72. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2y - x - y^3$
$\dot{y} = x - 2y$

2.73. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -y - x^3$
$\dot{y} = x - y^3$

2.74. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x^3 + xy^2$
$\dot{y} = -2x^2y - y^3$

2.75*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x^3 + 2y^3$
$\dot{y} = -2xy^2$

2.76*.feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, ahol az f és g differenciálható függvények, valamint minden $x \neq 0$ esetén $f(x) > 0$ és $xg(x) > 0$ (ún. Liénard-egyenlet speciális esete)

2.77. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -xy^4$
$\dot{y} = x^4y$

2.78. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x - 2y^2$
$\dot{y} = xy - y^3$

2.79. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^2 + y^2$
$\dot{y} = x + y$

2.80*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = -x^3 + y^4$
$\dot{y} = -y^3 + y^4$

2.81*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y - \sin^3 x$
$\dot{y} = -4x - \sin^3 y$

2.82. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y - x + x^2$
$\dot{y} = -x$

2.83. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xP(x,y)$
$\dot{y} = yQ(x,y)$, ahol a P és Q az origó egy környezetében folytonos negatív függvények.

2.84*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -h(x,y)y - x$, ahol a $h > 0$ folytonos függvény az origó egy környezetében.

2.85. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 3y^4 - 2x^4$
$\dot{y} = 5x^2y + 3y$

2.86*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y^3 + x^2y$
$\dot{y} = x^3 - xy^2$

2.87*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x - y\sin x$

2.88. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2)$
$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$

2.89*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x^2 - y^2$
$\dot{y} = -2xy$

2.90. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = xy + x^3$
$\dot{y} = -y + y^3 + x^4$

2.91. feladat: (Megoldás) Határozzuk meg az alábbi rendszerben az origó stabilitását, ha α valós paraméter!

$$\dot{x} = \alpha x - y + x^3$$
$$\dot{y} = x + \alpha y + y^3$$

2.92. feladat: (Megoldás) Megfelelően választott Ljapunov-függvény segítségével határozzuk meg, hogy az origó milyen k paraméter esetén lesz stabilis, aszimptotikusan stabilis, illetve instabilis!

$$\dot{x} = y + kx(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

2.93*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a > 0$ szám esetén az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása!

$$\ddot{x} - ax\,\dot{x} + x = 0$$

2.94. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek az azonosan nulla megoldása stabilis, de minden más megoldása instabilis!

$$\dot{x} = -y(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = x(x^2 + y^2)$$

2.95*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x,y)$ rendszert. Tegyük fel, hogy

1. $f(0,0) = 0$,
2. $(f(x,y) - f(x,0))y \leq 0$,
3. $\int_0^x f(t,0)dt < 0$ az origó egy környezetében.

Mutassuk meg, hogy a fenti feltételek fennállása esetén az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ megoldás stabilis!

2.96. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az origó stabilis egyensúlyi helyzete az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\ddot{x} = -x^3 - x^2\,\dot{x}$$

2.97*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az origó stabilis egyensúlyi helyzete az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\ddot{x} = -x + x^3 - x^2\,\dot{x}$$

2.98*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az $\dot{x} = -ax + bf(y)$, $\dot{y} = cx - df(y)$ rendszert. Tegyük fel, hogy

1. $f(0) = 0$,
2. $yf(y) > 0$, ha $y \neq 0$,
3. a, b, c és d olyan pozitív számok, amelyre $ad > bc$.

Mutassuk meg, hogy a fenti feltételek fennállása esetén az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ megoldás aszimptotikusan stabilis!

Vizsgáljuk az alábbi rendszereket!

2.99. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = 2xy$$
$$\dot{y} = x^2 - y^2$$

2.100*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{r} = r(1-r)$$
$$\dot{\varphi} = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

2.101*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x\,(1 - \sqrt{x^2+y^2}) - \frac{y}{2}\,(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$
$$\dot{y} = y\,(1 - \sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x}{2}\,(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

2.102. feladat: (Megoldás)

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l}\sin\Theta - \frac{k}{m}\,\dot{\Theta}$$

(Az ingamozgás súrlódó közegben: Θ a kitérés szöge, m a test tömege, l az inga hossza és k a sebességgel arányos súrlódási erő)

2.103*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = -x + 2x^2y - y^3$$

2.104*. feladat: (Megoldás) (Vinograd-példa)

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x)+y^5}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}$$
$$\dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}$$

2.105. feladat: (<u>Megoldás</u>)

$$\dot{x} = ky - xy$$
$$\dot{y} = -kx + x^2$$

(k valós paraméter)

2.106. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^3 + 2xy^2$$
$$\dot{y} = y^3$$

2.107. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek a triviális megoldáson kívüli minden megoldása véges időn belül nem korlátos lesz! Adjuk meg ezt az időt a (1,0) kezdőpontból induló megoldás esetén, ha $t_0 = 0$!

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$$

2.108. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása, de nincs határciklusa!

$$\dot{x} = -y + xy$$
$$\dot{y} = x + \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

2.109*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y - y^3$$
$$\dot{y} = -x - y^2$$

2.110*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -y - x^2$$
$$\dot{y} = x$$

2.111. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert! (Brüsszelátor-modell)

$$\dot{x} = x(1 - y^2)$$
$$\dot{y} = y(xy - 1)$$

2.112. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = 2xy$$

2.113*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - y(1 - x^2)$$

2.114*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -8x - xy^2 - 3y^3$$
$$\dot{y} = -2x^2y + 2xy^2$$

2.115. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x + 2x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = -y + y^2$$

2.116*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -2x + y + x^3y^2$$
$$\dot{y} = -x - 2y + x^2y^3$$

2.117*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - 2y - x^3$$

2.118*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = -2y + x^2$$

2.119. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -3y$$
$$\dot{y} = x - \alpha(2y^3 - y), \text{ ahol } \alpha < 0.$$

2.120. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x - y$$
$$\dot{y} = 2x - y + y^3$$

2.121. feladat: (Megoldás) Csetajev-tételt alkalmazva, mutassuk meg, hogy az origó instabilis egyensúlyi helyzete az alábbi rendszernek!

$$\dot{x} = x^3 + y$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

2.122. feladat: (Megoldás) Csetajev-tételt alkalmazva, mutassuk meg, hogy az origó instabilis egyensúlyi helyzete az alábbi rendszernek!

$$\dot{x} = x + y$$
$$\dot{y} = x - y + xy^2$$

2.123. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x + y^2$$
$$\dot{y} = -2y + 3y^2$$

2.124. feladat: (<u>Megoldás</u>) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = x(y^2 - 1)$$
$$\dot{y} = -y(x^2 - 1)$$

2.125. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a lineáris rendszerek esetében definiált csomópont, fókuszpont, örvénypont és nyeregpont teljesíti a 2.27. Definíció feltételét!

2.126. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = xy - x$$
$$\dot{y} = xy - x$$

2.127. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egy vonzási halmazát!

$$\dot{x} = -x - 3y + 2z + yz$$
$$\dot{y} = 3x - y - z + xz$$
$$\dot{z} = -2x + y - z + xy$$

2.128. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó vonzási halmazát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\alpha x^3 - \beta y \quad (\alpha, \beta > 0)$$

2.129*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását!

$$\dot{x} = -4y + x^2$$
$$\dot{y} = 4x + y^2$$

2.130. feladat: (Megoldás) Adjunk példát olyan rendszerre, ahol az origó stabilis egyensúlyi helyzet, de a linearizált rendszer instabilis.

2.131*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását!

$$\dot{x} = -y - xy^2$$
$$\dot{y} = x - x^4 y$$

2.132. feladat: (Megoldás) Adjuk meg a rendszer egy alkalmas Ljapunov-függvényét!

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = x - y$$

2.133. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy Hamilton-rendszer esetén „működik” a linearizálás, azaz ha a linearizált rendszernek az origó centruma, akkor az egyensúlyi helyzetben a Hamilton-rendszernek is centruma van.

2.134. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = -x - 2y + 2x^3$$

2.135. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $f(0) = 0$ és $xf(x) > 0$, akkor az $\dot{x} = -f(x)$ rendszer $x = 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis!

2.136. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = -x - y - y^5$$

2.137. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy ha az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix esetén az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T$ pozitív definit mátrix, akkor az $\underline{\underline{A}}$ Hurvitz-mátrix.

2.138. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = xy^4 - 2x^3 - y$$
$$\dot{y} = 2x + 2x^2y^3 - y^7$$

2.139*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó stabilitását!

$$\dot{x} = -x^3y^2$$
$$\dot{y} = -2x^2y^3$$

2.140*. feladat: (Megoldás): Adjunk meg egy olyan autonóm rendszert, amelyben az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet,és létezik olyan $V:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre

1. $V(\underline{x}) > V(\underline{p})$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$,
2. $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$,

de ennek ellenére az origó nem lesz globálisan aszimptotikusan stabilis.

2.141. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszer egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabilis!

$$\dot{x} = -xy$$
$$\dot{y} = \omega(1 - ay) \quad (a, \omega > 0)$$

2.142. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az origó egyensúlyi helyzetét!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\frac{x}{1+y^2}$$

Kétdimenziós autonóm periodikus rendszerek

Kétdimenzióban a pályák nem lehetnek nagyon bonyolultak. Minden pálya $t \to \infty$ esetén vagy egy egyensúlyi helyzethez vagy egy periodikus pályához vagy egyensúlyi helyzeteket összekötő ún. homoklinikus-heteroklinikus pályák láncolatához tart.

3.1. Definíció: Az $\underline{x}_0$ pont *periodikus pont*, ha létezik $p > 0$, amelyre $\underline{x}(t+p, \underline{x}_0) = \underline{x}(t, \underline{x}_0)$ minden t valós számra. Egy periodikus pont pályáját *periodikus pályának* nevezzük. Feltehető, hogy p a legkisebb periódus. (→ 3.3. Megjegyzés a).)

3.2. Definíció: A $K \subset \mathbb{R}^2$ *pozitívan invariáns*, ha minden $t \geq 0$ és $\underline{x}_0 \in K$ esetén $\underline{x}(t, \underline{x}_0) \in K$.

3.3. Megjegyzés: **a**) Nem konstans periodikus megoldásnak létezik legkisebb periódusa.
b) Ha $t_1 < t_2$-re $\underline{x}(t_1, \underline{x}_0) = \underline{x}(t_2, \underline{x}_0)$, akkor $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ konstans, vagy $p = t_2 - t_1$ periódussal egy periodikus megoldás. ⊡

Ha K pozitívan invariáns halmaz, azaz a megoldások mindenütt befelé mennek és nincsen a K-ban egyensúlyi helyzet, akkor kell, hogy legyen benne periodikus pálya. Ez a Poincaré-Bendixson tétel:
3.4. Állítás: (Poincaré-Bendixson tétel – gyenge alak) (1901) Ha $K \subset \mathbb{R}^2$ adott kompakt, pozitívan invariáns halmaz és nincsen a K-ban egyensúlyi helyzet, akkor van a K-ban periodikus pálya.

Többféleképpen is igazolható, hogy a fázistér egy adott tartományában a rendszernek nincs periodikus pályája. A síkbeli Stokes-tétel alkalmazásával megmutatható a
3.5. Állítás: (Bendixson[11]-kritérium) Ha a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszer esetén a div $\underline{f}$ állandó előjelű egy T egyszeresen összefüggő síkbeli nyílt halmazon és legfeljebb egy nullmértékű halmazon nulla, akkor a rendszernek nincs olyan periodikus pályája, amely teljesen a T-ben fekszik.

Ha egy mennyiség szigorúan monoton csökken vagy nő, akkor a rendszer nyilván nem működhet periodikusan, azaz nem létezhet periodikus pályája. Így teljesül az alábbi
3.6. Állítás: Ha létezik olyan V:T → ℝ folytonosan differenciálható függvény, amely mentén a trajektóriák szigorú monoton nőnek vagy csökkennek, azaz $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) > 0$, illetve $V'(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) < 0$, akkor rendszernek nincs T-ben periodikus pályája.

Periodikus pálya nemlétezésének bizonyításához hasznos lehet még a Bendixson-Dulac[12] teszt is.
3.7. Állítás: Ha a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszer esetén létezik olyan g:T → ℝ folytonosan differenciálható függvény a T egyszeresen összefüggő síkbeli nyílt halmazon, amelyre div $(\underline{f} \cdot g)$ állandó előjelű és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, akkor nincs a rendszernek olyan periodikus pályája, amely teljesen a T-ben fekszik.

Periodikus pálya létezésének egyértelműségére hasznos lehet az alábbi
3.8. Állítás: (Dulac) Ha a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszer esetén létezik olyan g:A → ℝ folytonosan differenciálható függvény egy A *gyűrűszerű* síkbeli nyílt halmazon, amelyre a div $(\underline{f} \cdot g)$ állandó előjelű és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, akkor a rendszernek legfeljebb egy határciklusa van, amely teljesen a A-ben fekszik.

Kétdimenziós rendszerek globális vizsgálatának hasznos segédeszköze lehet a vektormező indexe.

[11] I. O. Bendixson (1861-1935) svéd matematikus
[12] H. Dulac (1870-1955) francia matematikus

3.9. Definíció: Tekintsük az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós rendszert, ahol $\underline{f} = f_1\underline{i} + f_2\underline{j}$, azaz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x,y) \\ \dot{y} &= f_2(x,y) \end{aligned} \qquad (3.1.)$$

rendszert, és legyen $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonos, egyszerű zárt görbe, amely nem halad át egyensúlyi helyzeten. Jelölje $\theta(x,y)$ az (x,y) pontban a $(f_1(\gamma(t);f_2(\gamma(t))$ vektor szögét, valamint legyen $\theta^*(t) = \theta(\gamma(t))$ minden $t \in [a,b]$ esetén. Ekkor $\operatorname{tg}\theta^*(t) = \frac{f_2(\gamma(t))}{f_1(\gamma(t))}$. Ezt deriválva t szerint, majd átalakítva kapjuk, hogy $\dot{\theta}^*(t) = \frac{f_1(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_2(\gamma(t)) - f_2(\gamma(t))\frac{d}{dt}f_1(\gamma(t))}{f_1^2(\gamma_1(t)) + f_2^2(\gamma_2(t))}$. A *fenti rendszer indexe a γ görbére* vonatkozóan $\operatorname{ind}(\gamma) := \frac{1}{2\pi}\int_a^b \dot{\theta}^*(t)\,dt$.

Miközben egy pont pozitív irányban körbejárja a görbét, az adott pontban a mező vektora folytonosan elcsavarodik. A görbe indexe azt adja meg, hogy a $(f_1(\gamma(t), f_2(\gamma(t))$ vektor hányszor fordul körbe, mialatt a t befutja az $[a,b]$ intervallumot. Egy pálya indexe folytonosan változik, miközben a görbe nem halad át egyensúlyi helyzeten.

3.10. Állítás: Ha a γ görbe belsejében nincs egyensúlyi helyzet, akkor $\operatorname{ind}(\gamma) = 0$.

3.11. Definíció: Legyen (x_0, y_0) izolált egyensúlyi helyzete a (3.1.) rendszernek. Az *egyensúlyi pont indexe* $\operatorname{ind}(x_0, y_0)$ legyen tetszőleges, az egyensúlyi helyzetet körülvevő, de más egyensúlyi helyzetet nem tartalmazó egyszerű, zárt görbe indexe.

3.12. Állítás: Periodikus pálya belsejében van legalább egy egyensúlyi helyzet. Ha egyetlen egyensúlyi helyzet van, úgy az vagy csomópont vagy fókuszpont vagy centrum.

3.13. Állítás: Ha γ egy periodikus megoldás pályája, akkor $\operatorname{ind}(\gamma) = 1$, sőt periodikus pálya belsejében fekvő egyensúlyi helyzetek indexének összege 1.

3.14. Állítás: Ha egy γ (zárt) görbe indexe különbözik a nullától, akkor az általa határolt tartományban van legalább egy egyensúlyi helyzete.

3.15. Állítás: A görbe belsejében lévő egyensúlyi helyzetek indexeinek az összege egyenlő a görbe indexével.

Zárt pálya lehetetlenségéről szól az alábbi

3.16. Állítás: Tekintsük az $\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x,y) \\ \dot{y} &= f_2(x,y) \end{aligned}$ kétdimenziós rendszert.

Tegyük fel, hogy az $\underline{f} = (f_1, f_2) \neq \underline{0}$, valamint a $\operatorname{rot}\underline{f} = \underline{0}$ egy egyszeresen összefüggő D tartományon. Ekkor a rendszernek nincsen D-ben fekvő zárt pályája.

Sok esetben célszerű vizsgálni egy görbe ún. pályamenti vagy orbitális stabilitását a fázistérben. Megmutatjuk, hogy periodikus megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis.

3.17. Állítás: Legyen az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer esetén $\underline{x}_0$ p-periodikus pont és $\underline{\varphi}(t)$ p-periodikus megoldása az $\underline{\varphi}(0) = \underline{x}_0$ kezdeti érték problémának. Ekkor a megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis.

A fentiek szerint periodikus megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis, mégis, mint halmazhoz, tarthatnak hozzá egy környezetből a megoldások. Ezért a fázistérben a megoldás stabilitásának a leírására célszerű bevezetni az orbitális, azaz pálya menti stabilitás fogalmát.

3.18. Definíció: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer esetén az $\underline{x}(t,\underline{p})$ *T-szerint periodikus* megoldás által definiált G (zárt) pályát a fázistérben, azaz $G := \{\underline{x}(t,\underline{p}), t \in [0,T]\} \subset \mathbb{R}^n$. A G pálya *orbitálisan stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden $\underline{q}$-ra, amelyre $d(\underline{p},\underline{q}) < \delta(\varepsilon)$, teljesül, hogy $\max_{\underline{x}\in G^+} d(\underline{x},G) < \varepsilon$, ahol $G^+ = \{\underline{x}(t,\underline{q})\ t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. A G *aszimptotikusan orbitálisan stabilis*, ha orbitálisan stabilis és $\lim_{t\to+\infty} d(\underline{x}(t,\underline{q});G) = 0$. (Ebben az esetben ezt *stabilis határciklusnak* is nevezzük.) A pálya *orbitálisan instabilis*, ha nem orbitálisan stabilis. (Itt $d(\underline{q};G) := \min_{\underline{p}\in G}|\underline{q}-\underline{p}|$, ahol a $|\cdot|$ az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi norma.)

A orbitális stabilitás fogalmát ki lehet terjeszteni nem feltétlenül periodikus pályák stabilitására.
3.19. Definíció: Az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer $G^+(\underline{x}_0) := \{\underline{x}(t,\underline{x}_0): t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ trajektóriája *orbitálisan stabilis* vagy *Poincaré-stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden olyan $\underline{y}_0$-ra, amelyre $|\underline{x}_0 - \underline{y}_0| < \delta(\varepsilon)$, az $\underline{x}(t,\underline{y}_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmes és $\max_{\underline{x}\in G^+(\underline{y}_0)} d(\underline{x},G^+(\underline{x}_0)) < \varepsilon$, ahol $G^+(\underline{y}_0) := \{\underline{x}(t,\underline{y}_0): t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Ellenkező esetben az $\underline{x}(t,\underline{x}_0)$ *Poincaré-instabilis*. Az $\underline{x}(t,\underline{x}_0)$ trajektória *lokálisan aszimptotikusan orbitálisan stabilis vagy lokálisan aszimptotikusan Poincaré-stabilis*, ha Poincaré-stabilis és létezik $\delta_0 > 0$, hogy minden $\underline{y}_0 \in U := \{\underline{y}: |\underline{y} - \underline{x}_0| < \delta_0\}$ környezetre $\lim_{t\to\infty} d(G^+(\underline{y}_0), G^+(\underline{x}_0)) = 0$.

3.20. Ekv. Definíció: Az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszer $G^+(\underline{x}_0) = \{\underline{x}(t,\underline{x}_0): t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ trajektóriája orbitálisan vagy Poincaré-stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden olyan $\underline{y}_0$-ra, amelyre $|\underline{x}_0 - \underline{y}_0| < \delta(\varepsilon)$, az $\underline{x}(t,\underline{y}_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmes és $d(\underline{x}(t,\underline{y}_0), G^+(\underline{x}_0)) < \varepsilon$ minden $t \geq 0$-ra. Ellenkező esetben az $\underline{x}(t,\underline{x}_0)$ Poincaré-instabilis. Az $\underline{x}(t,\underline{x}_0)$ trajektória (lokálisan) aszimptotikusan Poincaré-stabilis, ha Poincaré-stabilis, és létezik $\delta_0 > 0$, hogy minden $\underline{y}_0 \in U := \{\underline{y}: |\underline{y} - \underline{x}_0| < \delta_0\}$ környezetre: $\lim_{t\to\infty} d((\underline{x}(t,\underline{y}_0), G^+(\underline{x}_0)) = 0$.

3.21. Definíció: Az alábbi rendszert *gradiens rendszernek* nevezzük:

$$\dot{\underline{x}}(t) = -\underline{\nabla} \cdot \mathrm{V}(\underline{x}(t)) = -\mathrm{grad}\,\mathrm{V}(\underline{x}(t)),$$

ahol $\mathrm{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) adott folytonosan differenciálható függvény és $\underline{\nabla}$ a Nabla szimbólum.

3.22. Állítás: A gradiens rendszernek nem létezik periodikus megoldása.

3. Feladatok

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszereknek nincs periodikus megoldása!

3.1. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y + x^3$$
$$\dot{y} = x + y + y^3$$

3.2. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -y(1 + x^2 + x^4) - x$$

3.3. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2 - x^2$$

3.4. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = y(1 + x^2) + x^3$$

3.5. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x(1 - y^2)$$
$$\dot{y} = x - y(1 + e^x)$$

3.6. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y + 2xy$$
$$\dot{y} = x + x^2 - y^2$$

3. 7. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = 1 + x^2 - y(1 - x)$$

3.8. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D_1 = \{(x, y): x + y > 0\}$ és a $D_2 = \{(x, y): x + y < 0\}$ tartományokon nincs periodikus megoldása!
$$\dot{x} = x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = y^2 + x^2 e^x$$

3.9. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!
$$\dot{x} = x - y - x^3$$
$$\dot{y} = x + y - y^3$$

3.10. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!
$$\dot{x} = x + y - x^3$$
$$\dot{y} = -x + y - y^3$$

3.11. feladat: (Megoldás) Létezik-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?
$$\dot{x} = 1 - x$$
$$\dot{y} = x^2 - y^2$$

3.12. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x, y): \frac{1}{4} \leq x^4 + y^4 \leq 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!
$$\dot{x} = y^3 + x(1 - 4x^4 - y^4), \quad \dot{y} = -x^3$$

3.13. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy nem létezik periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$ halmazon!

$$\dot{x} = x - xy^2 + y^3$$
$$\dot{y} = 3y - x^2y + x^3$$

3.14. feladat: (Megoldás) Létezik-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x + 2xy^2 + y^3$$
$$\dot{y} = y + 2x^2y + 2\,x^3$$

3.15. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x, y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -x^3 + x - y$$
$$\dot{y} = x - x^2y$$

3.16. feladat: (Megoldás) Létezik-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x - 2y^2 + 2\,x^3$$
$$\dot{y} = -x^2 + 2y + x^4y$$

3.17. feladat: (Megoldás) Van-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x - 2$$
$$\dot{y} = 4x^2 - y^2$$

3.18. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x, y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + y - x^2y - 2y^3$$

3.19. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek a $D = \left\{(x, y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$ tartományon létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y - x^3 - 2xy^2$$
$$\dot{y} = x + y - x^2y - 2y^3$$

3.20. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs sem a pozitív, sem a negatív számsíkon periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -y + x^2 - xy$$
$$\dot{y} = x + xy$$

3.21. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs semmilyen pozitív a és b számok esetén periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y^2$$
$$\dot{y} = x - ay + 2x^2 - aby^3$$

3.22. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy autonóm rendszer esetén a Ljapunov stabilitásból következik a Poincaré-stabilitás! Adjunk példát arra, hogy a megfordítás nem feltétlenül teljesül!

3.23. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszer egyidejűleg Poincaré és Ljapunov értelemben stabilis!

$$\dot{x} = 1,\ \dot{y} = 0$$

3.24. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a $\dot{x} = x$ Poincaré-instabilis!
$\dot{y} = y$

3.25. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk a következő rendszer határciklusainak a Poincaré-stabilitását!

$$\dot{x} = -y + x\sin\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\dot{y} = x + y\cos\sqrt{x^2 + y^2}$$

3.26. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk a következő rendszer megoldásainak a Poincaré-stabilitását!

$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = y\ln y \quad (y > 0)$$

Számítsuk ki az alábbi rendszerek egyensúlyi helyzeteinek indexét!

3.27. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 2xy$
$\dot{y} = x^2 - y^2$

3.28. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = x$
$\dot{y} = -y$

3.29. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -x$

3.30. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = 1 + y^2$
$\dot{y} = x$

3.31*. feladat: (Megoldás) $\dot{x} = ax + by$ (a, b, c és d valós számok)
$\dot{y} = cx + dy$

3.32. feladat: (Megoldás) Számítsuk ki az origó középpontú $r = 1$ sugarú körvonalnak az alábbi rendszerre vett indexét!

$$\dot{x} = 2x^2 + 1$$
$$\dot{y} = 2xy$$

3.33. feladat: (Megoldás) Számítsuk ki az origó középpontú $r = 1$ sugarú körvonalnak az alábbi rendszerre vett indexét!

$$\dot{x} = y^3$$
$$\dot{y} = x^3$$

3.34. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy nyeregpont indexe mindig -1.

3.35. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy csomópont indexe mindig 1.

3.36. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy fókuszpont indexe mindig 1.

3.37*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az alábbi rendszert

$\dot{x} = x + f(x, y)$
$\dot{y} = y + g(x, y)$, ahol f és g az egész síkon korlátos kétváltozós függvények. Mutassuk meg, hogy a fenti rendszernek létezik legalább egy egyensúlyi helyzete!

3.38. feladat: (Megoldás) Tekintsük azt a síkmodellt, amely felülről modellezi a forgószelet, azaz minden pontban vegyük a szél fújásának irányába mutató megfelelő nagyságú síkbeli vektort. Mivel

forgószélről van szó, feltételezhetjük, hogy van egy olyan zárt görbe, amelynek peremén lévő vektorok az illető perempont érintőjével mindig hegyesszöget zárnak be. Tegyük fel, hogy ez a vektormező folytonos. Mutassuk meg, hogy a görbe belsejében van legalább egy szélcsendes pont!

3.39*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\ddot{x} + (x^2 + 2(\dot{x})^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

3.40*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek egyetlen határciklusa létezik!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x^3 - xy^2\\ \dot{y} &= x + y - y^3 - x^2y\end{aligned}$$

3.41*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x + y(1 - 3x^2 - 2y^2)\end{aligned}$$

3.42*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy egyetlen nem triviális periodikus megoldása van az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek! Adjuk is meg ezt a határciklust!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x^3 - 2xy^2\\ \dot{y} &= -x + y - 3x^2y - 2y^3\end{aligned}$$

3.43*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + 2x^2y\\ \dot{y} &= x + 2xy^2\end{aligned}$$

3.44*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van nem triviális periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x^3 - xy^2\end{aligned}$$

3.45*. feladat: (Megoldás) Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -g(x),\end{aligned}$$

ahol $g(0) = 0,\ g$ folytonos, szigorúan növekedő függvény, amelyre $\int_0^x g(t)dt \to \infty$, ha $x \to \pm\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden megoldás periodikus.

3.46*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik (nem konstans) periodikus megoldása!

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r - r^5 - r^3(1 + \sin^2\varphi)\\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$

3.47. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy nincs periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - x^5 - xy^4\\ \dot{y} &= y - y^3 - x^2y\end{aligned}$$

3.48*. feladat: (Megoldás) Van-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x\cos(x^2 + y^2) - y$$
$$\dot{y} = y\cos(x^2 + y^2) + x$$

3.49. feladat: (Megoldás) Milyen a és b-re létezik zárt trajektóriája az alábbi lineáris rendszernek?

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

3.50*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a következő differenciálegyenletnek nincsen nem konstans periodikus megoldása!

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon(\dot{x})^3 + \sin x = 0 \qquad (\varepsilon > 0)$$

3.51*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik (nem konstans) periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = y(9 - x^2 - 2y^2) - x$$

3.52. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a 3.10. Állítás megfordítása nem igaz, azaz egy görbe indexe lehet úgy 0, hogy a görbe belsejében van egyensúlyi helyzet!

3.53. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek végtelen sok határciklusa van!

$$\dot{x} = -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\dot{y} = x + y\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ,$$

ahol $(x, y) \neq (0, 0)$ és legyen a rendszer jobboldala, $\underline{f}(0, 0) = \underline{0}$.

3.54. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az $r = 1$ pálya aszimptotikusan Poincaré-stabilis, de nem aszimptotikusan Ljapunov-stabilis!

$$\dot{r} = 1 - r$$
$$\dot{\Theta} = r.$$

3.55. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az $y = 0$ pálya aszimptotikusan Poincaré-stabilis!

$$\dot{x} = 1 + x^2$$
$$\dot{y} = -2xy.$$

3.56. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek nincs periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = -x.$$

3.57. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi polárkoordinátában megadott rendszernek létezik periodikus megoldása!

$$\dot{r} = r(1 - r^3) + 0.5r\cos\varphi$$
$$\dot{\varphi} = 1.$$

3.58. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = 4x + 2y - x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -2x + y - y(x^2 + y^2).$$

3.59. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y + x^2 - 2x(x^2 + y^2)^{1/2}$$
$$\dot{y} = x + y + xy - 2y(x^2 + y^2)^{1/2}.$$

3.60. feladat: (Megoldás): Tegyük fel, hogy $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

a) Az $\{(x, y)\colon f(x, y) = 0\}$ zárt, egyszerű görbe, amely az origót belső pontként tartalmazza,

b) $g(x, y) \neq 0$.

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = -xf(x, y) + yg(x, y)$$
$$\dot{y} = -yf(x, y) - xg(x, y).$$

3.61. feladat: (Megoldás): Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek van periodikus megoldása!

$$\dot{x} = x - y + x^3 - 1.5xy^2$$
$$\dot{y} = x + y + x^2y - 0.5y^3$$

4. Lokális és globális vizsgálatok

Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ állandó együtthatós, homogén lineáris n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszert. Nemlineáris rendszerek esetén a stabilis, instabilis, illetve centrális alterek szerepét a stabilis, instabilis, illetve a centrális sokaság veszi át. Bizonyos feltételek esetén autonóm rendszereknél is biztosítható olyan halmaz, amely a fenti alterek megfelelő tulajdonságaival bír.

4.1. Állítás: (Lokális stabilis, illetve instabilis sokaságról) Legyen $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, melyre $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$. Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszert. Jelölje az $\underline{x}_0$ pontból induló megoldást $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$. Tegyük fel, hogy a $\underline{f}'(\underline{0})$ Jacobi- mátrix nem kritikus, valamint, hogy a megfelelő linearizált rendszer E_s , E_u stabilis és instabilis alterei k, illetve $n-k$ dimenziósak. Ekkor létezik az origónak olyan U környezete és léteznek olyan $\Phi: E_s \cap U \to E_u$ és $\Psi: E_u \cap U \to E_s$ folytonosan differenciálható függvények, amelyekkel a

$$W_s^{loc}(\underline{0}) := \{(\underline{q}, \Phi(\underline{q})) : \underline{q} \in E_s \cap U\} \quad \text{és} \quad W_u^{loc}(\underline{0}) := \{(\underline{r}, \Psi(\underline{r})) : \underline{r} \in E_u \cap U\}$$

k dimenziós *lokális stabilis*, illetve $n-k$ dimenziós *lokális instabilis sokaság* rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. A $W_s^{loc}(\underline{0})$ pozitívan, a $W_u^{loc}(\underline{0})$ negatívan invariáns halmaz,
2. A $W_s^{loc}(\underline{0})$ érinti az E_s alteret, a W_u^{loc} érinti az E_u alteret az origóban,
3. Ha $\underline{x}_0 \in W_s^{loc}(\underline{0})$, akkor $\lim\limits_{t\to\infty} \underline{x}(t, \underline{x}_0) = \underline{0}$,
4. Ha $\underline{x}_0 \in W_u^{loc}(\underline{0})$, akkor $\lim\limits_{t\to-\infty} \underline{x}(t, \underline{x}_0) = \underline{0}$.

4.2. Állítás: (Centrális sokasági tétel) Legyen $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, melyre $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$. Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszert. Jelölje (a szokott módon) az $\underline{x}_0$ pontból induló megoldást $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$. Tegyük fel, hogy a $\underline{f}'(\underline{0})$ Jacobi-mátrix kritikus. Ekkor létezik az origónak olyan U környezete és létezik (legalább egy) olyan $\Phi: E_c \cap U \to E_u \oplus E_s$ függvény, amelyre a

$$W_c^{loc}(\underline{0}) := \{(\underline{q}, \Phi(\underline{q})) : \underline{q} \in E_c \cap U\}$$

lokális centrális sokaság rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $\Phi(\underline{0}) = \Phi'(\underline{0}) = \underline{0}$,
2. A $W_c^{loc}(\underline{0})$ lokális centrális sokaság lokálisan invariáns, azaz $\underline{p} \in W_c^{loc}(\underline{0})$ és $\underline{x}(t, \underline{p}) \in U$ esetén $\underline{x}(t, \underline{p}) \in W_c^{loc}(\underline{0})$.

4.3. Megjegyzés: Tekintsük a továbbiakban az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \tag{4.1.}$$

n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert, amelyről tételezzük fel, hogy teljesülnek az egzisztencia és az unicitás tétel feltételei. Legyen az origó a rendszer egyensúlyi helyzete, azaz $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$ és tegyük fel, hogy az $\underline{f}'(\underline{0})$ mátrixnak létezik k darab nulla valósrészű sajátértéke, valamint létezik $n-k$ darab nem nulla valósrészű sajátértéke, ahol a $\underline{\underline{B}}$ mátrix sajátértékeinek valós része nulla, $\underline{\underline{C}}$ mátrix sajátértékei nem nulla valósrészűek. Ekkor a megfelelő transzformációval

$$\underline{f}'(\underline{0}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix} \quad \text{alakra hozható,}$$

ahol a $\underline{\underline{B}}$ mátrix sajátértékeinek valós része nulla, a $\underline{\underline{C}}$ mátrix sajátértékei nem nulla valósrészűek. Így a (4.1.) rendszer $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jelöléssel az alábbi alakra hozható

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underline{\underline{B}}x + g(x, y) \\ \dot{y} &= \underline{\underline{C}}y + h(x, y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

ahol $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. (Feltételezzük, hogy a g és a h deriváltja az origóban nulla.) ⊡

4.4. Állítás: (Centrális sokaságra vonatkozó redukció tétel). Tekintsük a (4.1.) rendszert, amely teljesíti a megadott feltételeket. Legyen Φ az origóban a centrális sokaságot meghatározó függvény. Vezessük be az alábbi rendszert:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \underline{\underline{B}}u + g(u, \Phi(u)) \\ \dot{v} &= \underline{\underline{C}}v \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Ekkor a (4.3.) rendszer és a (4.2.) rendszer *lokálisan topológikusan ekvivalens* az origóban, azaz van olyan homeomorfizmus, mely a két rendszer pályáit egymásba viszi az idő irányításának megtartásával.

4.5. Megjegyzés: Így a fenti tétel alkalmazásával az u függvényre vonatkozó rendszer fázisképének meghatározásával a teljes rendszer fázisképe meghatározható, mivel a v függvényre vonatkozó nem kritikus lineáris rendszer fázisképe egyszerűen vizsgálható. Konstruktív módon a fenti sokaságokat általában nem lehet előállítani, sok esetben meg kell elégednünk ezen sokaságok analitikus közelítésével. Míg a stabilis, instabilis sokaság egyértelműen létezik, addig a centrális sokaság nem egyértelmű. ⊡

4.6. Definíció: Tekintsük a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert.
a) Legyen $\underline{x}_0$ a rendszer nem kritikus egyensúlyi helyzete. Az $\{\underline{x}(t): t \in [a, b]\}$ pálya *homoklinikus pálya* $\underline{x}_0$-ra , ha $\underline{x}(t) \to \underline{x}_0$, ha $t \to \pm\infty$.
b) Legyen $\underline{x}_0$ és $\underline{y}_0$ a rendszer két különböző nem kritikus egyensúlyi helyzete. Az $\{\underline{x}(t): t \in [a, b]\}$ pálya *heteroklinikus pálya* $\underline{x}_0$-ra és $\underline{y}_0$-ra, ha $\underline{x}(t) \to \underline{x}_0$, ha $t \to +\infty$ és $\underline{x}(t) \to \underline{y}_0$, ha $t \to -\infty$.

4.7. Definíció: Tekintsük a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ kétdimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy az origó a rendszer nem kritikus egyensúlyi helyzete. Jelölje
$W_s(\underline{0}) = \{\underline{x}: \lim_{t\to\infty} \underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \underline{0}\}$ és $W_u(\underline{0}) = \{\underline{x}: \lim_{t\to-\infty} \underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \underline{0}\}$, ahol a $\underline{\varphi}(t, \underline{x})$ a dinamikai rendszer által indukált pálya. $W_s(\underline{0})$ és $W_u(\underline{0})$ halmazokat az *origó globális stabilis,* illetve *instabilis sokaságának* nevezzük.

4.8 Megjegyzés: Az origó globális stabilis és globális instabilis sokasága nem üres, invariáns halmaz és $W_s^{loc}(\underline{0}) \subset W_s(\underline{0})$, illetve $W_u^{loc}(\underline{0}) \subset W_u(\underline{0})$. Valamint a Γ homoklinikus pálya a $\underline{0}$-ra pontosan akkor, ha $\Gamma \subset W_s(\underline{0}) \cap W_u(\underline{0})$. ⊡

A Poincaré-Bendixson-tétel következménye az alábbi, sok esetben használható állítás.
4.9. Állítás: [4] Tekintsük a Liénard-rendszert, azaz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x, y)y - g(x), \end{aligned}$$

ahol az f és g folytonos függvények.
Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:

1. Létezik olyan $r > 0$ szám, hogy $f(x, y) > 0$, ha $x^2 + y^2 > r^2$, azaz az origó egy környezetén kívül az f szigorúan pozitív,
2. $f(0,0) < 0$. (Persze ekkor az f folytonossága miatt az origó egy környezetében: $f(x, y) < 0$.)
3. $g(0) = 0$, ha $x > 0$, akkor $g(x) > 0$ és ha $x < 0$, akkor $g(x) < 0$.
4. $G(x) = \int_0^x g(t)dt \to +\infty$, ha $x \to +\infty$

Ekkor a rendszernek létezik periodikus megoldása.

Alkalmazás szempontjából fontos lehet a fenti állítás következménye is
4.10. Állítás: [4] Tekintsük a speciális Liénard-rendszert, azaz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x)y - g(x), \end{aligned}$$

ahol az f és g az origó egy környezetében folytonos függvények.

Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:
1. f páratlan függvény és ha $x > 0$, akkor állandó előjelű,
2. g páratlan függvény és ha $x > 0$ akkor $g(x) > 0$,
3. $g(x) > af(x)F(x) > 0, x > 0$-ra, ahol $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ és $a > 1$.

Ekkor a rendszernek létezik periodikus megoldása.

A speciális Liénard-rendszer esetén teljesül az alábbi

4.11. Állítás: (Levinson-Smith)[4] Tekintsük a speciális Liénard-rendszert, azaz

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -f(x)y - g(x),$$

ahol az f és g folytonos függvények.
Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:
1. Az $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ függvény páratlan függvény,
2. g páratlan függvény és ha $x > 0$, akkor $g(x) > 0$,
3. Az $F(x)$ függvény csak az $x = 0$, $x = \pm a$-ban nulla valamilyen $a > 0$-ra.
4. $F(x) \to \infty$, ha $x \to +\infty$ és $x > a$-ra monoton növekedő függvény.

Ekkor a rendszernek létezik egyetlen periodikus megoldása.

Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{a})$ rendszert, ahol $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ paraméter. Ilyen, paramétertől függő rendszerek esetén a paraméterek változásával a rendszer fázisképei is változnak.
Alapvetően két eset fordulhat elő:
1. A rendszer fázisképe topológikusan ekvivalens lesz az eredeti rendszer fázisképével, illetve
2. A rendszer fázisképének megváltozik a topológiája.

4.12. Definíció: A paraméterek változása során keletkező nem topológikusan ekvivalens fázisképeket nevezzük a *rendszer bifurkációinak*.

4.13. Megjegyzés: Ily módon a bifurkációk egy rendszernek a topológikus változásait írják le a paramétereken keresztül. ⊡

4.14. Definíció: Az $\underline{a}_0$ *paraméter reguláris*, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|\underline{a}_0 - \underline{a}| < \delta$ esetén az $\underline{f}(\underline{x}(t), \underline{a})$ rendszer topologikusan ekvivalens az $\underline{f}(\underline{x}(t), \underline{a}_0)$ rendszerrel. Az $\underline{a}_0$ *bifurkációs paraméter*, ha nem reguláris.

4.15. Definíció: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{a})$ rendszert, ahol $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ paraméter. Az $(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ *pár lokálisan reguláris*, ha az $\underline{x}_0$ pontnak létezik olyan U környezete és $\delta > 0$, hogy $|\underline{a}_0 - \underline{a}| < \delta$ esetén az $\underline{f}_{|U}(\underline{x}(t), \underline{a})$ rendszer topologikusan ekvivalens az $\underline{f}_{|U}(\underline{x}(t), \underline{a}_0)$ rendszerrel. Az $(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ *pontban lokális bifurkáció van*, ha $(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ nem lokálisan reguláris.

Az alábbi fontos állítás szerint lokális bifurkáció csak egyensúlyi helyzetben következhet be.

4.16. Állítás: Ha $\underline{f}(\underline{x}_0, \underline{a}_0) \neq \underline{0}$, akkor $(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ pár lokálisan reguláris.

Az alábbi tétel szerint, ha az egyensúlyi helyzet nem kritikus, akkor ott nem lehet lokális bifurkáció.

4.17. Állítás: Ha $\underline{f}(\underline{x}_0, \underline{a}_0) = \underline{0}$ és $\underline{f}'(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ nem kritikus mátrix, akkor $(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ pár lokálisan reguláris. (Itt $\underline{f}'(\underline{x}_0, \underline{a}_0)$ az $\underline{f}$ függvény Jacobi-mátrixát jelöli.)

4.18. Megjegyzés: Bifurkáció perturbált Hamilton-rendszer esetén.

Legyen adott egy tetszőleges

$$\dot{x} = f_1(x, y)$$
$$\dot{y} = f_2(x, y) \qquad (*)$$

olyan *Hamilton-rendszer*, amelynek három egyensúlyi helyzete van, $P_1(0,0)$, $P_2(-a,0)$, és $P_3(a,0)$. A P_1-ben nyeregpont, a P_2 és P_3-ban centruma van. Tegyük fel, hogy $H(0,0)=0$. Ismert, hogy ekkor $\dot{H}(x,y)=0$. A homoklinikus pálya: $H(x,y)=0$. Ez a pálya természetesen tartalmazza a két centrum pontot. Tekintsük a (*) egy perturbált rendszerét:

$$\dot{x}=f_1(x,y)-\eta H(x,y)\cdot f_2(x,y) \qquad (**)$$
$$\dot{y}=f_2(x,y)+\eta H(x,y)\cdot f_1(x,y), \text{ ahol } \eta\neq 0.$$

Ekkor

$$\dot{H}(x,y)=\eta H(x,y)\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right). \qquad (***)$$

Ebből következőleg a (**) perturbált rendszer esetén a $H(x,y)=0$ invariáns halmaz. Így a (**) perturbált rendszer esetén ez azonos az eredeti (*) rendszer homoklinikus pályájával. A (**) rendszer egyensúlyi helyzetei azonosak a (*) rendszer egyensúlyi helyzeteivel és a (**) rendszer $P_2(-a,0)$, és $P_3(a,0)$ egyensúlyi helyzetei benne vannak a $H(x,y)=0$ görbe belsejében. A $H(x,y)$ függvény a $(P_2(-a,0))$ és $(P_3(a,0))$ pontok környezetében Ljapunov-függvényszerűen viselkedik. A $P_2(-a,0)$, és $P_3(a,0)$ egyensúlyi helyzetek környezetében a $H(x,y)$ függvény szintvonalai zárt görbék. Tegyük fel például, hogy az (*) $H(x,y)$ Hamilton-függvényének a $P_2(-a,0)$ pontban lokális minimuma van, azaz $H(x,y)>H(P_2(-a,0))$ és például $H(P_2(-a,0))>0$. Ekkor a H folytonossága miatt a $P_2(-a,0)$ pont egy környezetében is, $H(x,y)>0$. Teljesen hasonlóan tárgyalható a $H(P_2(-a,0))<0$ eset. A η előjelének megválasztásával (***) következtében elérhető, hogy ebben pontozott környezetben $\dot{H}(x,y)>0$. Így a klasszikus Ljapunov-instabilitási tétel miatt ezen környezetben a pályák eltávolodnak a $P_2(-a,0)$ és $P_3(a,0)$ egyensúlyi helyzetektől, így ezen egyensúlyi helyzetek nem lehetnek a (**) rendszer centrumai. ⊡

A következőkben konkrét példát mutatunk egy ilyen rendszerre.

Tekintsük az ún. súrlódásmentes Duffing-egyenletet:

$$\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3=0 \quad (\alpha<0 \text{ és } \beta>0) \qquad (1)$$

Ekkor (1) ekvivalens az

$$\dot{x}=y$$
$$\dot{y}=-\alpha x-\beta x^3 \qquad \text{rendszerrel.}$$

A rendszer Hamilton-rendszer, például egy Hamilton-függvénye:

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{\beta}{4}x^4.$$

A rendszernek három egyensúlyi helyzete van, $P_1(0,0)$, $P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$, és a $P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$. A P_1-ben nyeregpont, a P_2 és P_2-ban centruma van. A rendszer homoklinikus pályája

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{\beta}{4}x^4=0.$$

A homoklinikus pálya belsejében vannak a centrum pontok. Tekintsük a rendszer egy perturbációját:

$$\dot{x}=y+H(x,y)\cdot(-\alpha x-\beta x^3) \qquad (\eta:=-1) \qquad (2)$$
$$\dot{y}=-\alpha x-\beta x^3-H(x,y)\cdot y$$

Fenti, általános esetben láttuk: $\dot{H}(x,y)=-H(x,y)\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)$. (3)

Így a (2) rendszer esetén a $H(x,y)=0$ invariáns halmaz. Ez az (1) rendszer homoklinikus pályája. A (2) rendszer egyensúlyi helyzetei megegyeznek az (1) rendszer egyensúlyi helyzeteivel. Ekkor

$$H(P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))=H(P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))=-\frac{\alpha^2}{4\beta}<0. \qquad (4)$$

A fenti $H(x,y)$ függvénynek a P_2 és P_3-ban szigorú lokális minimumhelye van, ugyanis $H''(x,y)=\begin{pmatrix}\alpha+3\beta x^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, így $H''(P_i)=\begin{pmatrix}\alpha+3\beta x^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ pozitív definit mátrix ($i=1,2$), mert $\alpha<0$. Következésképpen: $H(x,y)>H(P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))=H(P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))$ egy környezetben.

A H folytonossága és a (4) miatt a $P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$ és a $P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$ pont egy környezetében $H(x,y)<0$. A (3) következtében ebben a környezetben $\dot{H}(x,y)>0$, ha $(x,y)\neq(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0),(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$. Így a Ljapunov-instabilitási tétel miatt e környezetben a pályák eltávolodnak a $P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$ és a $P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$ egyensúlyi helyzetektől. Ezek a (2) instabilis fókuszpontjai. ■

A η előjelét megváltoztatva elérhető, hogy az invariáns pálya belsejében lévő egyensúlyi helyzetek stabilis fókuszponkok legyenek. Ez esetben a rendszer egy perturbációja:

$$\dot{x}=y-H(x,y)\cdot(-\alpha x-\beta x^3)\qquad(\eta:=1)\qquad(2')$$
$$\dot{y}=-\alpha x-\beta x^3+H(x,y)\cdot y$$

Fenti, általános esetben láttuk: $\dot{H}(x,y)=H(x,y)\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)$. (3')

Természetesen a (2') rendszer invariáns halmaza most is a $H(x,y)=0$, azaz ez az (1) rendszer homoklinikus pályája. A (2') rendszer egyensúlyi helyzetei megegyeznek az (1) rendszer egyensúlyi helyzeteivel. Ekkor $H(P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))=H(P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))=-\frac{\alpha^2}{4\beta}<0.$ (4')

A $H(x,y)$ függvénynek a P_2 és P_3-ban szigorú lokális minimumhelye van. Következésképpen:

$$H(x,y)>H(P_2(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))=H(P_3(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0))\text{ egy környezetben.}$$

A H folytonossága és a (4') miatt a P_2 és a P_3 pont egy környezetében $H(x,y)<0$. A (3') miatt ebben a pontozott környezetben $\dot{H}(x,y)<0$, Így e környezetben a pályák közelednek a P_2 és a P_3 egyensúlyi helyzetekhez. Ezek a (2') stabilis fókuszpontjai.

4. Feladatok

Adjuk meg az alábbi rendszer stabilis és instabilis sokaságait!

4.1*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y - 2x^2$$

4.2*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y + x^3$$

4.3*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -2x$$
$$\dot{y} = y + x^4 - x$$

4.4*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -x$$
$\dot{y} = y + g(x)$, ahol $g(0) = 0$ és $g \in C^1$

4.5*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = -y + x^2$$
$$\dot{z} = x^2 + z$$

4.6*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = -y + x^2$$
$$\dot{z} = x^2 + z$$

4.7. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzeteit, vizsgáljuk meg ezek jellegét és adjuk meg a homoklinikus pályát a fázistérben és a megoldások háromdimenziós terében is!
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^2$$

4.8*. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzeteit, vizsgáljuk meg ezek jellegét és adjuk meg a homoklinikus és heteroklinikus pályákat a fázistérben!
$$\dot{x} = y(2y^2 - 1)$$
$$\dot{y} = x(x^2 - 1)$$

4.9. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzeteit, vizsgáljuk meg ezek jellegét. Vizsgáljuk a rendszer homoklinikus pályáját! Adjuk is meg ezt a homoklinikus pályát a fázistérben!
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x(x^2 - 1) + y^2$$

4.10. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer homoklinikus pályáját!
$$\ddot{x} - x + 6x^5 = 0$$

4.11. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi rendszer összes heteroklinikus pályáját!
$$\dot{x} = y(1 - x^2)$$
$$\dot{y} = -x(1 - y^2)$$

4.12. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi rendszer heteroklinikus pályáját!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\sin x$$

4.13. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi rendszer homoklinikus pályáját!

$$\dot{x} = y(13 - x^2 - y^2)$$
$$\dot{y} = 12 - x(13 - x^2 - y^2)$$

4.14. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi rendszer heteroklinikus pályáját!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + x^3$$

4.15. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy van periodikus megoldása az alábbi rendszernek!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = e^{-2x} - e^{-x}$$

4.16*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az $\ddot{x} + \beta(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0$ differenciál-egyenletnek minden $\beta > 0$ esetén létezik legalább egy periodikus megoldása!

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszereknek létezik periodikus megoldása!

4.17. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} - x\dot{x} + x = 0$

4.18*. feladat: (Megoldás) $\ddot{x} + x\dot{x} + \sin x = 0$

4.19. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy $\ddot{x} + x^n\dot{x} + x = 0$ differenciálegyenlet esetén az origó centrum, ha *n* páratlan pozitív egész szám.

4.20*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az $\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0$ differenciálegyenletnek minden $\beta > 0$ esetén létezik pontosan egy periodikus megoldása! (Van der Pol-féle egyenlet)

4.21. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az $\ddot{x} + (k\dot{x} + 1)\sin x = 0$ differenciálegyenletnek minden $k > 0$ esetén létezik legalább egy periodikus megoldása!

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszereknek létezik határciklusa!

4.22*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = 2x + 2y - x(2x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = -2x + y - y(2x^2 + y^2)$$

4.23*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = -x - y + x(x^2 + 2y^2)$$
$$\dot{y} = x - y + y(x^2 + 2y^2)$$

4.24*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x + y - x^3 - 6xy^2$$
$$\dot{y} = -\frac{1}{2}x + 2y - 8y^3 - x^2y$$

Vizsgáljuk az alábbi rendszereket!

4.25*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^2 - y^2 + y$$
$$\dot{y} = -x - 2xy$$

4.26. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = x^2 - y$$

4.27. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -ky - \sin x \quad (k > 0 \text{ szám})$$

4.28. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = xy$$
$$\dot{y} = 1 - y^2$$

Vizsgáljuk az alábbi rendszereket a k paraméter függvényében!

4.29*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = kx - y - x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = x + ky - y(x^2 + y^2)$$

4.30*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x - ky + x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = x + ky + y(x^2 + y^2)$$

4.31*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{r} = r(k - (r - 1)^2)$$
$$\dot{\varphi} = 1 \qquad \text{(polárkoordinátás alak)}$$

4.32. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = (1 - x)x - k \qquad (k > 0 \text{ szám})$$

Adjuk meg az alábbi rendszerek stabilis, instabilis és centrális sokaságát, amennyiben ezek léteznek!

4.33. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^2$$
$$\dot{y} = -y$$

4.34*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

4.35. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^2$$
$$\dot{y} = y$$

4.36*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = -y + xz$$
$$\dot{y} = x + yz$$
$$\dot{z} = -z - x^2 - y^2 + z^2$$

4.37. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = xy$$
$$\dot{y} = -y + \alpha x^2 \qquad (\alpha \text{ valós szám})$$

4.38. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = x^2y - x^5$$
$$\dot{y} = -y + x^2$$

4.39. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x + x^2$$

4.40. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = 2y$$
$$\dot{y} = 2x - 3x^2 + x^3y - x^2y + y^3$$

4.41*. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik heteroklinikus pályája!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

4.42. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 - x^2y$$

4.43. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi rendszer heteroklinikus pályáit!

$$\dot{x} = y^2 + y$$
$$\dot{y} = -x + x^2$$

5. Globális vizsgálatok

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f: M \to \mathbb{R}^n$ olyan függvény, amelyre

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \qquad (5.1.)$$

n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszer esetén teljesülnek az egzisztencia és a unicitás tétel feltételei. Tetszőleges $t_0 \in \mathbb{R}$ és $\underline{x}_0 \in M$ esetén létezik az $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ kezdeti értéket kielégítő $\underline{x}(t) = \underline{\varphi}(t, t_0, \underline{x}_0)$ (globális) megoldás a megfelelő $I(t_0, \underline{x}_0)$ intervallumon.

5.1. Állítás: Tetszőleges $t_0 \in \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in M$ és $\tau \in \mathbb{R}$ esetén

1. $\underline{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \underline{x}_0) = \underline{\varphi}(t, t_0, \underline{x}_0)$ minden $t \in I(t_0, \underline{x}_0)$-re

2. $I(t_0 + \tau, \underline{x}_0) = \tau + I(t_0, \underline{x}_0)$

Elegendő a $t_0 = 0$ időpontban a különböző $\underline{x} \in M$ pontokból induló megoldásokat ismerni, ezért bevezetjük az alábbi jelöléseket: $I(p) := I(0, p)$ és $\underline{\varphi}(t, \underline{x}_0) := \underline{\varphi}(t, 0, \underline{x}_0)$, $\underline{x}_0 \in M$ és $t \in I(p)$.

5.2. Állítás: (Csoporttulajdonság) Legyen $\underline{x}_0 \in M$ és $t, s \in I(p)$ olyanok, hogy $t + s \in I(p)$. Ekkor $\underline{\varphi}(t + s, \underline{x}_0) = \underline{\varphi}(t, \underline{\varphi}(s, \underline{x}_0))$.

5.3. Megjegyzés: A pályák nem metszik egymást. ⊡

5.4. Definíció: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. A $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ folytonosan differenciálható függvény *dinamikai rendszer az M fázistéren*, ha teljesül az alábbi két tulajdonság:

1. $\underline{\varphi}(0, \underline{x}_0) = \underline{x}_0$,

2. $\underline{\varphi}(t + s, \underline{x}_0) = \underline{\varphi}(t, \underline{\varphi}(s, \underline{x}_0))$ minden $\underline{x}_0 \in M$ és $t, s \in I(p)$-re.

5.5. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f: M \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor

1. Létezik olyan dinamikai rendszer, amelynek pályái megegyeznek az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszer pályáival.

2. Bármely dinamikai rendszerhez létezik olyan $\underline{f}: M \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, hogy az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszer megoldásai a dinamikai rendszert adják.

5.6 Megjegyzés: Legyen $\sim \subset M \times M$ a következő reláció: $\underline{x} \sim \underline{y}$ pontosan akkor, ha van olyan $t \in \mathbb{R}$, melyre $\underline{\varphi}(t, \underline{y}) = \underline{x}$. Könnyen látható, hogy a $\sim$ ekvivalencia reláció. Ezen ekvivalencia reláció szerinti osztályait nevezzük a *rendszer pályáinak* (*trajektóriáinak*).
Az $\underline{x} \in M$ pont pályája az$\{\underline{\varphi}(t, \underline{x}): t \in \mathbb{R}\}$ görbe. Az M a rendszer állapothalmaza, a $\underline{\varphi}(t, \underline{x})$ pedig azt adja meg, hogy hová kerül a rendszer az $\underline{x}$ állapotból indulva t idő múlva. Autonóm egyenlet megoldásáról feltehető, hogy dinamikai rendszert határoz meg, Jelölje $\Phi_t(\underline{x}) = \underline{\varphi}(t, \underline{x})$. A $\Phi_t: M \to M$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén diffeomorfizmus és $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$, $\Phi_0 = id_M$, valamint$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$. Legyen $\underline{f}(\underline{x}) := \dot{\underline{\varphi}}(t, \underline{x})\big|_{t=0}$. Ekkor a csoporttulajdonság miatt: $\dot{\underline{\varphi}}(t, \underline{x}) = \underline{f}(\underline{\varphi}(t, \underline{x}))$. Az így definiált egyparaméteres transzformáció csoportot *folyamnak* is szokták nevezni. ⊡

Természetes módon lehet definiálni dinamikai rendszerek esetén a már ismert fogalmakat, így az egyensúlyi helyzet, periodikus pont, invariáns halmaz stb. fogalmát.

5.7. Definíció: **a)** Egy $\underline{x}_0 \in M$ pont *egyensúlyi helyzet*, ha $\underline{\varphi}(t, \underline{x}_0) = \underline{x}_0$ *minden* $t \in \mathbb{R}$-re.

b) Egy $\underline{x}_0 \in M$ nem egyensúlyi helyzet *periodikus pont*, ha létezik $p > 0$, hogy *minden* $t \in \mathbb{R}$ esetén $\underline{\varphi}(t, \underline{x}_0) = \underline{\varphi}(t + p, \underline{x}_0)$. (A belőle induló pálya önmagába tér vissza.)

5.8. Definíció: Legyenek $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ és $\underline{\psi}: \mathbb{R} \times N \to N$ adott dinamikai rendszerek, valamint $\underline{p} \in M$ és $\underline{q} \in N$. A $\underline{\varphi}$ dinamikai rendszer a $\underline{p}$ pontban és a $\underline{\psi}$ dinamikai rendszer a $\underline{q}$ pontban *lokálisan topológikusan ekvivalens*, ha létezik olyan $U \in \tau(\underline{p})$, $V \in \tau(\underline{q})$ környezete a $\underline{p}$, illetve a $\underline{q}$ pontnak és olyan $h: U \to V$ homeomorfizmus, amelyre $h(\underline{p}) = \underline{q}$ és a pályákat egymásba képezi az idő irányításának megtartásával. Azaz, ha létezik olyan $a: \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre a $t \to a(t, \underline{x})$ szigorú monoton növő és $h(\underline{\varphi}(t, \underline{x})) = \underline{\psi}(a(t, \underline{x}), h(\underline{x}))$ minden $\underline{x} \in U$-ra.

A fenti definíció közelíti meg a legjobban azt a kívánalmat, hogy a két differenciálegyenlet pályái „hasonlítsanak egymásra”.

5.9. Megjegyzés: Lehetne definiálni dinamikai rendszerek ún. *lokális C^k diffeomorfizmusát*. A C^k ekvivalencia túl erős fogalom lenne most. Megmutatható például, hogy két, nyeregponttal rendelkező lineáris rendszer, ha a sajátértékek aránya különböző, nem lehet lokálisan C^k ekvivalens $k > 0$ esetén, de ettől még lokálisan topológikusan ekvivalensek. ⊡

5.10. Megjegyzés: Lehetne definiálni dinamikai rendszerek ún. *lokális C^k konjugáltját*, amikor a fenti diffeomorfizmus mellett a leképezés úgy viszi át a pályákat egymásra, hogy ott nincs időátparaméterezés. A C^k konjugáltság is túl erős fogalom, ugyanis például két, centrummal rendelkező lineáris rendszer, ha a periodikus pályák periódusa különböző, nem lehet lokálisan C^k konjugált, de ettől még lokálisan topológikusan ekvivalensek. ⊡

5.11. Állítás: (Hartman-Grobman[13] (1960) Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f: M \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az (5.1.) differenciálegyenlet-rendszernek az $\underline{x}_0$ nem kritikus egyensúlyi helyzete. Ekkor a $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszer az $\underline{x}_0$-ban és az $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{f}'(\underline{x}_0) \cdot \underline{y}(t)$ linearizált rendszer a $\underline{0}$ pontban lokálisan topológikusan ekvivalensek, azaz létezik az $\underline{x}_0$ pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ környezete és az origónak olyan $V \subset \mathbb{R}^n$ környezete és olyan $h: U \to V$ homeomorfizmus, melyre $h(\underline{\varphi}(t, \underline{x})) = e^{\underline{\underline{A}}t}\, h(\underline{x})$ minden $\underline{x} \in U$-ra és minden olyan $t \in \mathbb{R}$-re, amelyre $\underline{\varphi}(t, \underline{x}) \in U$.

5.12. Megjegyzés: Ha a linearizált rendszer *minden* sajátértékének valós része pozitív vagy negatív, akkor az előző állítás élesíthető. Ekkor megadható lokális C^1 diffeomorfizmus is. Kritikus pontban a 4.4. Állítás ad jellemzést. ⊡

Nagyon fontos az alábbi nem triviális

5.13. Állítás: (Kuiper[14]) (1965) Az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ $n \times n$-es mátrixok pontosan akkor topológikusan ekvivalensek, ha stabilis, instabilis alterük dimenziója megegyezik és a centrális alterükre (ha van) megszorítva lineárisan ekvivalensek, azaz létezik $\alpha > 0$ és $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{A}} = \alpha \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$.

Tulajdonképpen egyensúlyi helyzetek környezetében „izgalmasak” a pályák, ugyanis az alábbi állítás szerint egy nem egyensúlyi helyzetben a rendszer lokális C^k konjugált azzal a rendszerrel, melynek pályái párhuzamos egyenesek.

5.14. Állítás: (Kiegyenesítési tétel) Ha $\underline{f}(\underline{p}) \neq \underline{0}$, akkor $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ egyenlet a $\underline{p}$ pontban és az

[13] P. Hartman (1915-2015) amerikai és D. M. Grobman (1959)
[14] N. H. Kuiper (1920-1994) holland matematikus

$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{f}(\underline{p})$ egyenlet az origóban lokális C^k konjugált (amennyiben $\underline{f} \in C^k$). Következésképpen, ha $\underline{f}(\underline{p}) \neq \underline{0}$, akkor a sorfejtés konstans tagja meghatározza a fázisképet.

Sőt, a következő állítás is igaz (ezt is szokták kiegyenesítési tételnek nevezni)

5.15. Állítás:Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ egyenletet és tegyük fel, hogy $\underline{f}(\underline{p}) \neq \underline{0}$. Ekkor létezik a $\underline{p}$ pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ környezete és olyan $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, valamint létezik olyan $\underline{g}: U \to V$ lokális diffeomorfizmus, amely az $\dot{\underline{y}}(t) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ és az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ rendszerek pályáit egymásba viszi, éspedig $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{g}'(\underline{g}^{-1}(\underline{y}(t))) \cdot \underline{f}(\underline{g}^{-1}(\underline{y}(t)))$.

5.16. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Legyen $\underline{x}_0$ egy adott periodikus pont p periódussal. Jelölje

$$\underline{\gamma}(t) := \underline{\varphi}(t, \underline{x}_0) \text{ és } \Gamma := \{\underline{\gamma}(t) : t \in [0, p]\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Jelölje $\mathfrak{A}$ a Γ pályát $\underline{x}_0$-ban merőlegesen metsző hipersíkot, azaz $\mathfrak{A} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{x} - \underline{x}_0, f(\underline{x}_0) \rangle = 0\}$. Ekkor $\underline{x}_0$-nak létezik olyan $\mathfrak{A}$-beli U környezete, amelyből a pályák visszatérnek $\mathfrak{A}$-ba, azaz létezik (egyetlen) olyan $\Theta: U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre $\Theta(\underline{x}_0) = p$ és $\underline{\varphi}(\Theta(\underline{x}), \underline{x}) \in \mathfrak{A}$ minden $\underline{x} \in U$-ra.

5.17. Definíció: A $P: U \to \mathfrak{A}$, $P(\underline{x}) := \underline{\varphi}(\Theta(\underline{x}), \underline{x})$ $(\underline{x} \in U)$ függvényt a $\mathfrak{A}$ (transzverzális) metszethez tartozó *Poincaré-leképezésnek* nevezzük.

5.18. Megjegyzés: A Poincaré-leképezés segítségével (elvileg) megtalálhatjuk a periodikus pályákat, ugyanis, ha $\underline{x}_0$ a leképezés fixpontja, azaz $P(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$, akkor az $\underline{x}_0$ pontból induló megoldás p idő múlva visszatér az $\underline{x}_0$-ba, azaz az $\underline{x}_0$ periodikus pont. ⊡

Így igaz az alábbi

5.19. Állítás: Az $\underline{x}_0$ pont pontosan akkor periodikus pont, ha az $\underline{x}_0$ a Poincaré-leképezés fixpontja.

5.20. Állítás: Ha $K \subset \mathbb{R}^2$ egy adott kompakt, pozitívan invariáns halmaz és nincsen a K-ban egyensúlyi helyzet, akkor van a K-ban periodikus pálya.

5.21. Megjegyzés: A feltételekből következően a P diffeomorfizmus az U-n. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Mivel $\mathfrak{A} \cong \mathbb{R}^{n-1}$, így a Poincaré-leképezésre $P: \mathbb{R}^{n-1} \cap \tau(\underline{0}) \to \mathbb{R}^{n-1}$, azaz a $P'(\underline{0})$ azonosítható egy $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixszal. ⊡

Természetesnek tűnik, de nem triviális az alábbi

5. 22. Állítás: Ha a $\underline{x}_0$ pont aszimptotikusan/stabilis/instabilis fixpontja a Poincaré-leképezésnek, akkor a Γ orbitálisan aszimptotikusan/stabilis/instabilis.

5.23. Megjegyzés: Tekintsük a $P: U \to \mathfrak{A}$ Poincaré-leképezés iteráltjait. Ez egy ún. *diszkrét dinamikai rendszert* indukál: $\psi: \mathbb{N} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $\psi(n, \underline{x}) := P^n = P(P(\dots P(\underline{x})) \dots)$ (n-szer). Ekkor

$$\psi(0, \underline{x}) = \underline{x} \text{ és } \psi(n, \psi(m, \underline{x})) = \psi(n + m, \underline{x}).$$

Ha $\lim_{n \to \infty} P^n(\underline{x}) = \underline{x}_0$, mert ekkor Γ orbitálisan aszimptotikusan stabilis, azaz stabilis határciklus. ⊡

Erről szól a következő

5.24. Állítás: (Andronov-Witt[15]) (1930) Ha a $P'(\underline{x}_0)$ mátrix minden sajátértéke, azaz a Γ pálya ún. *karakterisztikus multiplikátora* 1-nél kisebb abszolút értékű, akkor az $\underline{x}_0$ fixpont aszimptotikusan stabilis, így a Γ pálya stabilis határciklus.

[15] A. A. Andronov (1901-1952) és A. A Witt (1902-1938) szovjet fizikusok

Legyen a rendszer kétdimenziós és az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $\underline{x}_0 = \underline{0}$.

Megmutatható, hogy a $P'(0)$ meghatározza a Γ stabilitását.

5.25. Állítás: Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és a $\underline{f}: E \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható leképezés. Legyen $\underline{\gamma}(t)$ adott periodikus megoldás p periódussal. Jelölje

$$\Gamma := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{x} = \underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(0), t \in [0,p]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Legyen $\mathfrak{A}$ a Γ pályát az origóban merőlegesen metsző egyenes.
Ekkor a Poincaré-leképezés deriváltja a 0 pontban

$$P'(0) = \exp \int_0^p \operatorname{div} \underline{f}(\underline{\gamma}(t))dt.$$

5.26. Állítás: A fenti tétel feltételei mellett,
ha $P'(0) < 1$ akkor a $\underline{\gamma}(t)$ stabilis határciklus, illetve
ha $P'(0) > 1$ akkor a $\underline{\gamma}(t)$ instabilis határciklus.

A karakterisztikus multiplikátorok meghatározása az ún. Floquet-elmélet segítségével történhet.

5.27. Megjegyzés: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f: M \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény.
Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \tag{5.2}$$

n-dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszert. Legyen $\underline{x}_0$ egy adott periodikus pont p periódussal, megoldást jelölje $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ és $\underline{\gamma}(t) = \underline{\varphi}(t, \underline{x}_0)$. Linearizáljuk az (5.2.) egyenletet a $\underline{\gamma}$ (periodikus) megoldás mentén. Legyen $\underline{y}(t) := \underline{x}(t) - \underline{\gamma}(t)$.
Ekkor

$$\dot{\underline{y}}(t) := \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\underline{\gamma}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) - \underline{f}(\underline{\gamma}(t)) = \underline{f}(\underline{\gamma}(t) + \underline{y}(t)) - \underline{f}(\underline{\gamma}(t)) = \underline{f}'(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{y}(t) + \underline{\varepsilon}(t, \underline{y}(t)),$$

azaz

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{y}(t), \text{ ahol } \underline{\underline{A}}(t) = \underline{f}'(\underline{\gamma}(t)). \tag{5.3.}$$

Világos, hogy a $\underline{\gamma}$ megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis és a (5.3.) azonosan 0 megoldása sem lehet aszimptotikusan stabilis, mert van egy periodikus megoldása, éspedig a $\dot{\underline{\gamma}}(t)$. (Ez azonnal látható az (5.2.) deriválásából.) ⊡

Ismeretes, hogy tetszőleges $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ p-szerint periodikus folytonos függvény esetén az (5.3.) megoldásai kifejezhetők egy $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ alapmátrix segítségével. A továbbiakban végig legyen $\underline{\underline{\Phi}}(0) = \underline{\underline{E}}$.

5.28. Állítás: (Floquet[16]) (1883) Legyen $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ az $\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{y}$ p periodikus rendszer egy alapmátrixa. Ekkor
1. Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\underline{\underline{\Phi}}(t+p) = \underline{\underline{\Phi}}(t) \cdot \underline{\underline{\Phi}}(p).$$

2. Létezik olyan komplex $\underline{\underline{B}}$ mátrix, amelyre $e^{p\underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{\Phi}}(p)$ és olyan p-periodikus folytonos komplex $t \to \underline{\underline{P}}(t)$ mátrixfüggvény, amelyre $\underline{\underline{\Phi}}(t) = \underline{\underline{P}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{B}}t}$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.
3. Létezik olyan valós $\underline{\underline{R}}$ mátrix, amelyre $e^{p\underline{\underline{R}}} = \underline{\underline{\Phi}}(p)$ és olyan $2p$-periodikus folytonos valós $t \to \underline{\underline{Q}}(t)$ mátrixfüggvény, amelyre $\underline{\underline{\Phi}}(t) = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{R}}t}$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Tekintsük az az $\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{y}$ p-periodikus egyenletet az $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ kezdeti feltétellel és legyen $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ az egyenlet egy alapmátrixa a $\underline{\underline{\Phi}}(0) = \underline{\underline{E}}$ kezdeti feltétel mellett. Ekkor a kezdeti érték probléma

[16] A. M. G. Floquet (1847-1920) francia matematikus

megoldása: $\underline{y}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{y}_0$. Jelölje $\underline{y} \to \underline{\underline{\Phi}}(p)\underline{y}$. Ez a rendszer ún. *monodrómia operátora*. A rendszer *monodrómia mátrixa* $\underline{\underline{\Phi}}(p)$.

5.29. Megjegyzések: **a**) A monodrómia mátrix sajátértékei azonosak az $e^{p\underline{\underline{B}}}$ mátrix sajátértékeivel.
b) Tetszőleges monodrómia mátrixnak ugyanazok a nem nulla (komplex) számok a sajátértékei.
c) Legyen adott egy $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\underline{y}(t)$ p-periodikus rendszer és λ a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ monodrómia mátrix sajátértéke. Ekkor a rendszernek létezik olyan $\underline{y}(t)$ nem triviális megoldása, amelyre $\underline{y}(t+p) = \lambda\underline{y}(t)$. Továbbá, ha a rendszer egy nem triviális $\underline{y}(t)$ megoldására $\underline{y}(p) = \lambda\underline{y}(0)$, akkor a λ a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ monodrómia mátrix sajátértéke, amelyhez tartozó sajátvektor $\underline{y}(0)$.
d) Az $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\underline{y}(t)$ p-periodikus rendszernek pontosan akkor létezik p-periodikus $\underline{y}(t)$ megoldása, ha $\lambda = 1$ és pontosan akkor létezik $2p$-periodikus $\underline{y}(t)$ megoldása, ha $\lambda = -1$. ⊡

Az 5.28.Állításnál fontosabb a következménye
5.30. Következmény: **a**) Ha a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ mátrix minden sajátértéke 1-nél kisebb abszolút értékű, akkor az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t)$ azonosan nulla megoldása aszimptotikusan stabilis.
b) Ha a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ mátrix minden sajátértékének abszolút értéke 1-nél kisebb vagy egyenlő és amelyeknek abszolút értéke 1, azok a minimálpolinomban egyszeres multiplicitással rendelkeznek, akkor az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t)$ azonosan nulla megoldása stabilis.
c) Ha a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ mátrixnak van 1-nél nagyobb vagy egyenlő abszolút értékű sajátértéke és amelyeknek az abszolút értéke 1, azoknak a multiplicitása a minimálpolinomban nagyobb mint egy, akkor az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t)$ azonosan nulla megoldása instabilis.

5.31. Megjegyzés: A fenti következmény most nem alkalmazható az (5.2) rendszer $\underline{\gamma}$ periodikus megoldás orbitális stabilitásának eldöntésére, ugyanis megmutatható, hogy ekkor a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ mátrixnak a sajátvektora $\dot{\underline{\gamma}}(0)$ az 1 sajátértékkel, azaz $\underline{\underline{\Phi}}(p) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(0) = 1 \cdot \dot{\underline{\gamma}}(0)$. Mivel $\underline{\gamma}$ megoldása az (5.2.) differenciálegyenletnek, ezért $\dot{\underline{\gamma}}(t) = \underline{f}(\underline{\gamma}(t))$. Ezt deriválva kapjuk: $\ddot{\underline{\gamma}}(t) = \underline{f}'(\underline{\gamma}(t)) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t)$, azaz $\dot{\underline{\gamma}}$ megoldása a linearizált egyenletnek. Mivel a linearizált egyenlet megoldásai kifejezhetők az alapmátrixszal, ezért $\dot{\underline{\gamma}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(0)$ és $\dot{\underline{\gamma}}$ p-szerint periodikus megoldás, így $\dot{\underline{\gamma}}(0) = \dot{\underline{\gamma}}(p) = \underline{\underline{\Phi}}(p) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(0)$. Szerencsére azonban a $\underline{\gamma}$ megoldás orbitálisan stabilis megoldásához elegendő, ha a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ mátrix többi sajátértéke 1-nél kisebb. ⊡

Erről szól az alábbi
5.32. Állítás: (Andronov-Witt) (1933) Ha a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ monodrómia mátrixnak az 1 egyszeres sajátértéke és az összes többi sajátérték abszolút értéke 1-nél kisebb, akkor a $\underline{\gamma}$ megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabilis.

Megjegyezzük, hogy teljesül az alábbi nem triviális
5.33. Állítás: (Ábel[17]) A fenti feltételek mellett

$$\det \underline{\underline{\Phi}}(p) = \exp \int_0^p \operatorname{Tr} \underline{f}'(\underline{\gamma}(t))dt.$$

5.34. Megjegyzés: **a**) Ha a rendszer kétdimenziós, akkor $\det \underline{\underline{\Phi}}(p) = \lambda_2$, ahol a λ_2 a $\underline{\underline{\Phi}}(p)$ 1-től különböző sajátértéke. Így a λ_2 meghatározza a periodikus megoldás orbitális stabilitását.
b) Legyen P egy adott Poincaré-leképezés valamely $\underline{x}_0$ pontot tartalmazó transzverziális metszeten. Ekkor $\sigma(\underline{\underline{\Phi}}(p)) = \sigma(P'(\underline{x}_0)) \cup \{1\}$, ahol σ a sajátértékek halmazát jelöli. ⊡

[17] N. H. Abel (1802-1829) norvég matematikus

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Érdekes kérdés, hogy $t \to \infty$ esetén mi történik a pályákkal, milyen halmazhoz közelednek valamilyen értelemben. Csak azok a pályák az érdekesek, amelyek $t \to \infty$ esetén korlátosak maradnak. Például az aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet esetén, ennek egy környezetéből induló pályák ide fognak tartani. Egydimenziós rendszerben más típusú aszimptotikus viselkedés nem is fordulhat elő, viszont kétdimenzióban egy pálya tarthat egy periodikus megoldáshoz is (valamilyen értelemben), több dimenziós rendszerekben ennél bonyolultabb (ún. kaotikus) aszimptotikus viselkedés is előfordulhat.

5.35. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\underline{y}$ *pont az* $\underline{x}$ *pont* ω*-határpontja* (α*-határpontja*), ha van olyan $(t_k) \to +\infty$ ($(t_k) \to -\infty$) sorozat, amelyre $\lim_{k\to+\infty} \underline{\varphi}(t_k, \underline{x}) = \underline{y}$. Jelölje $\omega(\underline{x})$, illetve $\alpha(\underline{x})$ az $\underline{x}$ pont ω, illetve α-határpontjainak a halmazát.

5.36. Megjegyzés: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Ekkor $\underline{x} \in M$ esetén $\omega(\underline{x}) = \{\underline{y} \in M: \liminf_{t\to\infty} |\underline{\varphi}(t, \underline{x}) - \underline{y}| = 0\}$. Hasonló állítás igaz az α-határpont esetén is. Ha $\underline{x}_0$ egyensúlyi helyzet, akkor $\omega(\underline{x}_0) = \alpha(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$. Aszimptotikusan stabilis határciklus is ω-határhalmaz bizonyos kezdeti feltételek esetén. ⊡

5.37. Megjegyzés: A pálya minden pontjának ugyanaz az ω-határpontja, azaz $\underline{y} \in \underline{\varphi}(t, \underline{x})$ esetén $\omega(\underline{y}) = \omega(\underline{x})$. ⊡

Fontos az alábbi állítás

5.38. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Ekkor minden $\underline{x} \in M$ esetén $\omega(\underline{x}) = \bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \overline{\gamma^+(\underline{\varphi}(\tau, \underline{x}))}$, ahol $\gamma^+(\underline{x}) = \{\underline{\varphi}(t, \underline{x}): t \geq 0\}$.

Fontos az alábbi

5.39. Állítás:
1. $\omega(\underline{x})$ zárt.
2. $\omega(\underline{x})$ invariáns halmaz, azaz ha $\underline{y} \in \omega(\underline{x})$, akkor $\underline{\varphi}(t, \underline{y}) \in \omega(\underline{x})$ minden $t \geq 0$ esetén.
3. Ha $\{\underline{\varphi}(t, \underline{x}): t \geq 0\}$ korlátos, akkor $\omega(\underline{x})$ nem üres, kompakt.
4. Ha $\{\underline{\varphi}(t, \underline{x}): t \geq 0\}$ korlátos, akkor $\omega(\underline{x})$ nem üres, összefüggő.
5. Ha $\{\underline{\varphi}(t, \underline{x}): t \geq 0\}$ kompakt, akkor $\underline{\varphi}(t, \underline{x})$ tart a $\omega(\underline{x})$-hez, azaz $(d(\underline{\varphi}(t, \underline{x}), \omega(\underline{x})) \to 0$ $t \to +\infty$ esetén.
6. A $\omega(\underline{x})$ a legszűkebb olyan halmaz, amelyhez $t \to +\infty$ esetén a $\underline{\varphi}(t, \underline{x})$ tart.
7. Azt mondjuk, hogy egy $K \subset M$ *halmaz minimális*, ha nem üres, zárt, invariáns a $\underline{\varphi}(t, \underline{x})$-re és K nem tartalmaz ilyen tulajdonságú halmazt. Ekkor K minimális pontosan akkor, ha minden $\underline{x} \in K$ esetén $\omega(\underline{x}) = K$.

5.40. Megjegyzés: Üres ω-határhalmazra egyszerű példa az $\dot{x} = 1$ differenciálegyenlet.
Világos, hogy ekkor $\varphi(t, x) = t + x$. Így az $\omega(x)$ üres halmaz.
Például az $\dot{x} = -x$ differenciálegyenlet esetén, ha $x \neq 0$, akkor $\omega(x) = 0$ és $\alpha(x) = \emptyset$. ⊡

Egydimenziós rendszerben egy pont ω-határhalmaza nagyon egyszerű szerkezetű, ugyanis

5.41. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ekkor minden $a \in M$ esetén léteznek $t_n \to \infty$ és $t_n \to -\infty$ esetén a $\lim \varphi(t_n, a)$ határértékek. Így $\omega(a) = \emptyset$ vagy $\omega(a) = x_0$, ahol $x_0 \in M$ a rendszer egyensúlyi helyzete.

Kétdimenziós esetben egy „kicsit" bonyolultabb a helyzet. Erről szól az Poincaré-Bendixson tétel:

5.42. Állítás: (Poincaré-Bendixson) Legyen $M \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $K \subset M$ pozitívan invariáns kompakt halmaz, melyben véges sok egyensúlyi helyzet van. Ekkor egy $\underline{x}_0 \in K$ pont ω-határhalmaza az alábbi három típus valamelyikébe tartozik:

1. $\omega(\underline{x}_0)$ egy egyensúlyi helyzet.

2. $\omega(\underline{x}_0)$ egy periodikus pálya.
3. $\omega(\underline{x}_0)$ néhány egyensúlyi helyzet ($\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$) és olyan (homoklinikus ill. heteroklinikus) γ_i pályák uniója, melyekre $\omega(\gamma_i) = \underline{a}_i$ és $\alpha(\gamma_i) = \underline{a}_j$.

Újra megfogalmazhatjuk az ún. gyenge Poincaré-Bendixson tételt:
5.43. Állítás: (Gyenge Poincaré-Bendixson tétel) Legyen $M \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $K \subset M$ pozitívan invariáns kompakt halmaz. Legyen $\underline{x}_0 \in K$. Ha $\omega(\underline{x}_0)$ nem tartalmaz egyensúlyi helyzetet, akkor $\omega(\underline{x}_0)$ egy periodikus pálya, egyetlen Γ zárt trajektóriából áll. Ennek során két eset lehetséges:
1) $\underline{\varphi}(t) = \underline{x}(t, \underline{x}_0)$ periodikus megoldás és a megoldás által leírt trajektória periodikus.
2) A $\underline{\varphi}(t) = \underline{x}(t, \underline{x}_0)$ megoldás által leírt trajektória $t \to \infty$ esetén rácsavarodik spirálisan a Γ trajektóriára.

Megemlítjük még a témakörhöz tartozó alábbi állítást.
5.44. Állítás: Ha az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$, $\underline{f} \in C^1$ rendszer $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ megoldása aszimptotikusan Ljapunov-stabilis, akkor az $\omega(\underline{x}_0)$ egyensúlyi helyzet.

5.45. Definíció: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Azt mondjuk, hogy a $B \subset M$ *nem üres, kompakt halmaz elnyelő*, ha minden $D \subset M$ nem üres, korlátos halmaz esetén létezik olyan $t_D \geq 0$ szám, hogy $\underline{\varphi}(t, D) \subset B$ minden $t \geq t_D$.

5.46. Definíció: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Egy $K \subset M$ *kompakt halmaz vonzó vagy attraktor*, ha a következő tulajdonságokkal bír:
1. K invariáns a $\underline{\varphi}$-re, azaz $\underline{\varphi}(t, K) = K$ minden $t \geq 0$,
2. K vonz minden nem üres korlátos halmazt, azaz $d_H(\underline{\varphi}(t, D), K) \to 0$, ha $t \to \infty$ minden $D \subset M$ nem üres, korlátos halmaz esetén, ahol d_H az ún. Hausdorff-metrika.

5.47. Megjegyzés: A fenti definícióban a távolságfogalom az ún. Hausdorff-metrika. Az euklideszi metrikával ellátott $\mathbb{R}^n$ tér nem üres korlátos részhalmazain vezessük be a következő metrikát:
$d(\underline{a}, B) := \inf\{d(\underline{a}, \underline{b}) : \underline{b} \in B\}$, majd $d(A, B) := \sup\{d(\underline{a}, B) : \underline{a} \in A\}$
1. Ekkor $d(A, B) = 0$, ha $A \subset B$.
2. A fenti távolságfüggvény nem szimmetrikus.
3. Teljesül rá a háromszög egyenlőtlenség.
Egyelőre a fenti halmazfüggvény nem definiál metrikát, ezért legyen

$$d_H(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Ez a halmazfüggvény már metrika és ezen metrikával az $\mathbb{R}^n$ tér teljes metrikus tér lesz. ⊡

Az alábbiak szerint, ha a rendszernek létezik elnyelő halmaza, akkor létezik benne vonzó halmaz is.
5.48. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Tegyük fel, hogy $B \subset M$ kompakt elnyelő halmaz. Ekkor a következő halmaz vonzó B-ben

$$K = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \underline{\varphi}(s, B)}.$$

5.49. Megjegyzés: Jelölje $A_t = \overline{\bigcup_{s \geq t} \underline{\varphi}(s, B)}$.
1. Ekkor az A_t (elég nagy t-re) zárt részhalmaza a kompakt B halmaznak, ezért kompakt.
2. Látható, hogy $A_s \subset A_t$, ha $s \geq t$. Így A_t egymásba skatulyázott halmazsorozat.
Következésképpen ezek metszete nem üres, kompakt részhalmaza a B-nek. ⊡

Egy kompakt elnyelő és pozitívan invariáns halmaz esetén a vonzó halmaz egyszerűbb szerkezetű. Pontosabban, teljesül az alábbi fontos

5.50. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Tegyük fel, hogy $B \subset M$ kompakt elnyelő és pozitívan invariáns halmaz. Ekkor a következő halmaz vonzó halmaz B-ben $K = \bigcap_{t \geq 0} \underline{\varphi}(t, B)$.

5.51. Állítás: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Ha a kompakt elnyelő halmaz nem pozitívan invariáns, akkor létezik olyan legbővebb B^* halmaz, amely egyidejűleg elnyelő és pozitívan invariáns, éspedig $B^* = \bigcup_{0 \leq t \leq t_B} \underline{\varphi}(t, B) = \underline{\varphi}([0, t_B], B)$, ahol t_B a B elnyelő tulajdonsága miatt létező konstans, azaz $\underline{\varphi}(t, B) \subset B$ minden $t \geq t_B$.

Érdekes az alábbi

5.52. Definíció: Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és a $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer az M fázistéren. Az $\underline{x} \in M$ pont ún. *nem vándorló pont*, ha az $\underline{x}$ minden U környezetéhez és minden $T > 0$ esetén létezik $t > T$, hogy $\underline{\varphi}(t, U) \cap U \neq \emptyset$. Ellenkező esetben a pont *vándorló pont*.

5.53. Megjegyzés: A fenti definíció szemléletes tartalma, hogy a nem vándorló pontok közeléből indított megoldás folyamatosan visszatér. Periodikus pont nem vándorló pont. ⊡

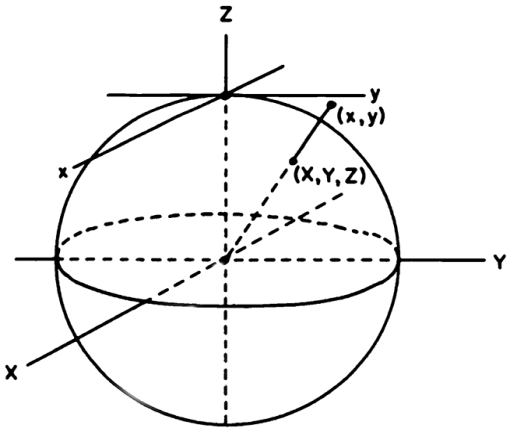
5.5.4 Állítás: A nem vándorló pontok halmaza zárt halmaz.

5.55. Állítás: A nem vándorló pontok halmaza invariáns halmaz.

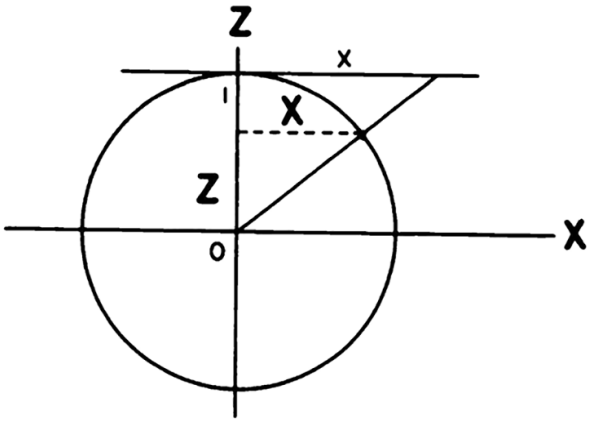
5.56. Állítás: $\omega(\underline{x})$ nem vándorló halmaz, azaz minden $\underline{x} \in M$ esetén $\underline{y} \in \omega(\underline{x})$ nem vándorló pont.

5.57. Megjegyzés: A kétdimenziós fázisgörbék *globális* vizsgálata azért is körülményes, mert a fázissík nem korlátos és így nehéz a görbék végtelenbeli viselkedését szemléltetni, illetve vizsgálni. Ezen probléma egy lehetséges megoldására, a *Poincaré-féle sztereográfikus projekciót* mutatjuk be, amely a fázissíkot egy félgömbre vetíti, a végtelenbeli pontokat pedig a félgömböt határoló körre, a gömb egyenlítőjére viszi. Ezzel a végtelenbeli viselkedés struktúrája elvileg vizsgálhatóvá válik. ⊡

Vegyünk egy egység sugarú, origó középpontú gömböt és egy olyan síkot, amely a gömböt a $(0, 0, 1)$ pontban (az északi pólusban) érinti. Ezen sík origója legyen az érintési pont, és a pontjainak koordinátáit jelölje (x, y). A gömbfelületen a koordináták legyenek (X, Y, Z). A sík pontjait vetítsük a felső félgömbre, hogy egy (x, y) pontot összekötjük az origóval, majd a síkbeli pontnak megfeleltetjük azt a pontot a félgömbön, amelynél a sugár a félgömböt metszi. (5.56a. és 5.56b. ábra.)



5. 56a. Ábra



5. 56b. Ábra

A megfelelő derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$$x = \frac{X}{Z},\ y = \frac{Y}{Z} \text{ és } X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \text{ miatt, } Z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Vezessük be az (x, y) koordináta rendszer segítségével az alábbi (X, Y, Z) koordináta rendszert:

$$X = xZ$$
$$Y = yZ$$
$$Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Nézzük meg, hogy a fenti koordináta transzformáció hogyan hat a

$$\dot{x} = P(x, y)$$
$$\dot{y} = Q(x, y)$$

rendszer fázisgörbéire.
A (X, Y, Z) koordináta rendszer koordináta függvényeit (t szerint) deriválva kapjuk:

$$\dot{X} = \dot{x}Z + x\dot{Z}$$
$$\dot{Y} = \dot{y}Z + y\dot{Z}$$
$$\dot{Z} = -Z^3(\dot{x}x + \dot{y}y)$$

Helyettesítsük be vizsgálandó differenciálegyenletből a deriváltakat, alkalmazva a transzformáció képleteit:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= ZP\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - ZX\left(XP\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + YQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\right) \\ \dot{Y} &= ZQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - ZY\left(XP\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + YQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\right) \\ \dot{Z} &= -Z^2\left(XP\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + YQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

Megmutatható, hogy ennek a rendszernek az egységgömb invariáns felülete. Ez onnan következik, hogy a mozgás a gömbön történik, azaz $\frac{d}{dt}(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$. Az ezen felületen létrejött fáziskép felel meg az eredeti síkbeli fázisképnek, a trajektóriák végtelenbeli viselkedése pedig a gömb egyenlítőjén, azaz a $Z = 0$ síkkal való metszetén látható.
Konkrét feladatokban megvizsgáljuk a (1) fázisképét az egységsugarú gömb felszínén. Feltehetjük, hogy az eredeti rendszernek az origó az egyensúlyi helyzete. A (1) végesben lévő egyensúlyi helyzetei a $(0, 0, 1)$ és $(0, 0, -1)$ pontok, ezek a pontok az origó vetítésével keletkeztek a gömb felületén. Megvizsgáljuk a (1) végtelenbeli egyensúlyi helyzeteit. Ezen egyensúlyi helyzetek harmadik koordinátája $Z = 0$, így az $X^2 + Y^2 = 1$ egyenlet által ez meghatározott. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk a (1) végtelenbeli egyensúlyi helyzeteit. Valamilyen módszerrel meghatározzuk ezek típusát. Az egész gömbfelületen az egyensúlyi helyzetek indexeinek összege a gömb Euler-karakterisztikáját adja, ami 2-vel egyenlő a Poincaré- féle indextétel szerint.

5.58. Megjegyzés: Ha a rendszer koordináta függvényei nemlineárisak, akkor a végtelenbeli egyensúlyi helyzetek vizsgálata, azaz a $Z = 0$ eset körülményes, ugyanis ez szingularitási pont. ⊡

Legyenek P és Q adott *polinomok* és tekintsük a következő rendszert

$$\dot{x} = P(x, y)$$
$$\dot{y} = Q(x, y).$$

Vezessük be az (x, y) koordináta rendszer segítségével az alábbi (X, Y, Z) koordináta rendszert:

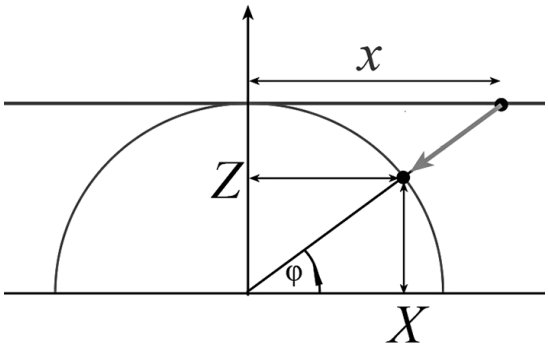
$$X = xZ$$
$$Y = yZ$$
$$Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Ekkor ezt deriválva (t-szerint)

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Z((1 - X^2)P - XYQ) \\ \dot{Y} &= Z((1 - Y^2)Q - XYP) \\ \dot{Z} &= -Z^2(XP + YQ) \end{aligned} \qquad (2)$$

(Itt a P és a Q az $(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z})$ függvénye.)

Motiváció: Tekintsük az *egydimenziós* $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenletet és a fázisegyenesnek a megfelelő körre való vetítését. (5.56c ábra)



5.56c. Ábra

Ekkor

$$Z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \cos\varphi, \quad \varphi \in [0,\pi] \text{ vagy } x = \operatorname{ctg}\varphi.$$

Így

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{dx}{dt} = -\sin^2\varphi\cdot f(\operatorname{ctg}\varphi) := g(\varphi).$$

Ha f közel van a ∞-hez $\varphi\sim 0$ esetén, akkor valamilyen m-re

$$f(x)\sim ax^m + \theta(x^{m-1}),$$

azaz

$$g(\varphi)\sim -a\sin^2\varphi\cdot\operatorname{ctg}^m\varphi = -a\sin^{2-m}\varphi\cdot\cos^m\varphi\sim -a\varphi^{2-m} + \theta(\varphi^{1-m}), \text{ ha } \varphi\to 0.$$

Így

$$\dot{\varphi} = -a\varphi^{2-m} + \theta(\varphi^{1-m}). \qquad (3)$$

Látható, hogy ha $m > 2$, akkor a $\varphi = 0$ szinguláris pont. Az idő átparaméterezésével meg lehet adni olyan topológiailag ekvivalens rendszert, amelynél ez nem fordul elő.
Legyen

$$d\lambda = \varphi^{1-m}dt.$$

Ekkor a (3) egyenlet a következő egyenletre transzformálódik:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dt}{d\lambda} = -a\varphi^{2-m}\cdot\frac{1}{\varphi^{1-m}} = -a\varphi. \qquad (4)$$

A (4) egyenletnek a $\varphi = 0$ már nem szinguláris pontja. ■

A rendszer végtelenbeli viselkedése esetén $Z = 0$ közeli. Ezért legyen m a maximális olyan fokszám, amelyre $P\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)\sim\frac{1}{Z^m} + O(z^{1-m})$ $Z = 0$-hoz közel.
Jelölje $P^*(x,y,z) := Z^m P\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)$ és $Q^*(x,y,z) := Z^m Q\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)$ és $d\lambda = Z^{1-m}dt$, azaz $\lambda = \int Z^{1-m}dt$. ($Z > 0$-ra). Ekkor a $\lambda(t)$ monoton nő, így az idő átparaméterezés az eredetivel ekvivalens rendszert hoz létre. Ekkor a (2) egyenlet miatt:

$$\frac{dX}{d\lambda} = (1-X^2)P^* - XYQ^* = (Y^2+Z^2)P^* - XYQ^*$$

$$\frac{dY}{d\lambda} = (1-Y^2)Q^* - XYP^* = (X^2+Z^2)Q^* - XYP^*$$

$$\frac{dZ}{d\lambda} = -Z(XP^* + Y\,Q^*).$$

Ez utóbbi rendszer esetén az „egyenlítő”, azaz a $Z = 0$ már nem szinguláris és

$$P^*(X,Y,0) = P_m(X,Y) \text{ és } Q^*(X,Y,0) = Q_m(X,Y),$$

ahol P_m és Q_m m-ed fokú tagok az eredeti P és Q polinomokban.

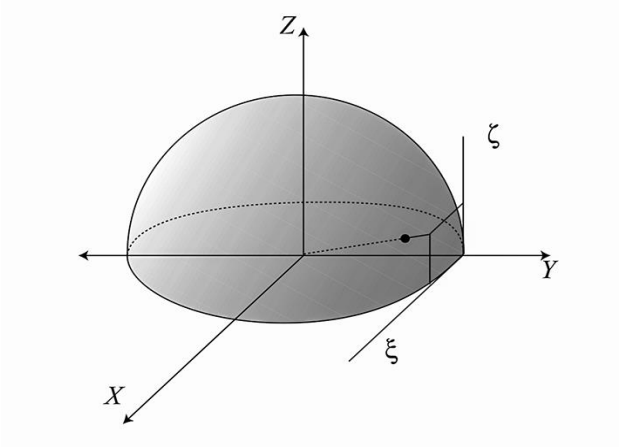
A $Z = 0$ körön a rendszert leíró egyenletek:

$$\boxed{\frac{dX}{d\lambda} = -Y(XQ_m - YP_m)}$$

$$\boxed{\frac{dY}{d\lambda} = -X(XQ_m - YP_m)}.$$

Mivel $X^2 + Y^2 = 1$, ezért az egyensúlyi helyzet ott van, ahol $XQ_m - YP_m = 0$.

Látható, hogy ha (X, Y) egyensúlyi helyzet, akkor az „átellenes" pont, a $(-X, -Y)$ is egyensúlyi helyzet, valamint, ha $XQ_m - YP_m > 0$, akkor a mozgás pozitív körüljárású. Ha m páratlan, az átlósan ellentétes pontok ugyanolyan topológiai típusokkal rendelkeznek, és ha m páros, akkor ellentétes típusúak. Alkalmazzuk a T_2, illetve T_3 Poincaré-vetítéseket:



pl. T_2 síkra vetítés

a) Tegyük fel, hogy $Y > 0$. Legyen

$$\xi = \frac{X}{Y} \text{ és } \zeta = \frac{Z}{Y} \quad (T_2 \text{ síkra vetítés})$$

Ezt (λ-szerint) differenciálva kapjuk:

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{X}}{Y} - \frac{X}{Y^2}\dot{Y} = \frac{1}{Y}((Y^2 + Z^2)P^* - XYQ^*) - \frac{X}{Y^2}(-XYP^* + (X^2 + Z^2)Q^*) = \frac{1}{Y}(P^* - \frac{X}{Y}Q^*) = \frac{1}{Y}(P^* - \xi Q^*),$$

azaz

$$\boxed{\dot{\xi} = \frac{1}{Y}(P^* - \xi Q^*)}$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\dot{Z}}{Y} - \frac{Z}{Y^2}\dot{Y} = \frac{1}{Y}(-ZXP^* - ZYQ^*) - \frac{Z}{Y^2}(-XYP^* + (X^2 + Z^2)Q^*) = -\frac{Z}{Y^2}Q^* = -\frac{1}{Y}\zeta Q^*,$$

azaz

$$\boxed{\dot{\zeta} = -\frac{1}{Y}\zeta Q^*}$$

Emlékeztetünk arra, hogy

$$P^*(x, y, z) := Z^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = Y^m \zeta^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

és

$$Q^*(x, y, z) := Z^m Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = Y^m \zeta^m Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

Mivel

$$\frac{X}{Z} = \frac{\xi}{\zeta}, \ \frac{Y}{Z} = \frac{1}{\zeta},$$

ezért

$$\boxed{\dot{\xi} = \zeta^m P\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) - \xi\zeta^m Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right)} \text{ és } \boxed{\dot{\zeta} = -\zeta^{m+1} Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right)}.$$

b) Tegyük fel, hogy $Y < 0$. Az $Y < 0$ értékű egyensúlyi helyzet esetén ugyanaz a ξ és ζ transzformációk definíciója. Ebben az esetben a ξ és ζ felel megfelel a negatív X és Z-nek, így az átlósan ellentétes pontok egyenértékűek.

c) Tegyük fel, hogy $Y = 0$. Legyen

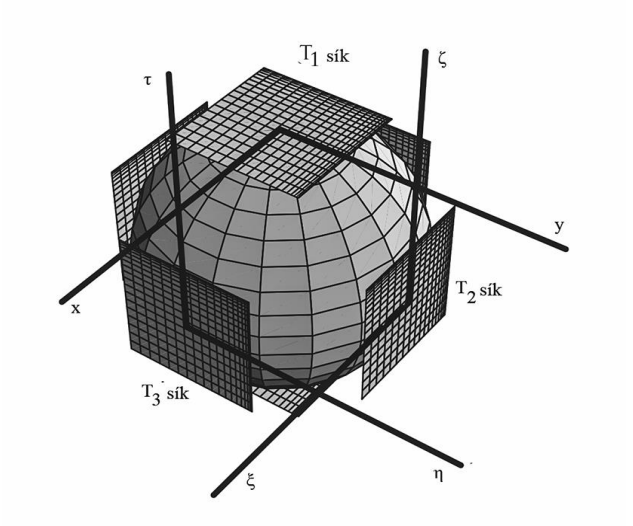
$$\eta = \frac{Y}{X} \text{ és } \tau = \frac{Z}{X}. \quad (T_3 \text{ síkra vetítés})$$

A fentiekhez hasonlóan

$$\boxed{\dot{\eta} = Q^* - \eta P^* = \tau^m Q\left(\frac{1}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}\right) - \eta \tau^m P\left(\frac{1}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}\right)}$$

$$\boxed{\dot{\tau} = -\tau P^* = -\tau^{m+1} P\left(\frac{1}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}\right)}.$$

Szemléletesen a gömbnek az alábbi síkokra való vetítéseiről van szó: (5.57b. ábra)



5.57b. Ábra

5. Feladatok

5.1. feladat: (Megoldás) Legyen $k > 0$ egész szám. Mutassuk meg, hogy az $\dot{x}(t) = -x(t)$ és az $\dot{y}(t) = -ky(t)$ differenciálegyenletek topologikusan ekvivalensek, sőt topologikusan konjugáltak!

Vizsgáljuk meg az alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz tartozó $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszerek origóbeli topologikus ekvivalenciáját!

5.2. feladat: (Megoldás) a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

5.3. feladat: (Megoldás) a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5.4. feladat: (Megoldás) a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Adjunk meg konkrét topologikus ekvivalenciát az alábbi rendszerek között!

5.5. feladat: (Megoldás)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \qquad \dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

5.6.* feladat: (Megoldás)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} \qquad \dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

5.7.* feladat: (Megoldás)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} \qquad \dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{y}$$

Alkalmas Poincaré-leképezés vagy Floquet-elmélet segítségével vizsgáljuk az alábbi rendszerek határciklusának stabilitását!

5.8. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x - y - x^2$$
$$\dot{y} = x + y - y^2$$

5.9*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = \mu x - x^3 - xy^2 - y, \text{ ahol } \mu > 0$$
$$\dot{y} = \mu y - x^2 y - y^3 + x$$

5.10. feladat: (Megoldás
$$\dot{x} = x - x^3 - xy^2 - y$$
$$\dot{y} = y - x^2 y - y^3 + x$$

5.11*. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = y + x - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = y - x - y^3 - x^2 y$$

Alkalmas Poincaré-leképezés segítségével vizsgáljuk meg, hogy létezik-e az alábbi rendszernek periodikus megoldása!

5.12. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x + y - x^3$$
$$\dot{y} = -x + y - y^3$$

5.13. feladat: (Megoldás)
$$\dot{x} = x - y - x^3$$
$$\dot{y} = x + y - y^3$$

Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszerek topológikusan ekvivalensek! (Adjunk meg konkrét ilyen leképezést!)

5.14*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x}_1 = -x_1 \qquad \dot{y}_1 = -y_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 \qquad \dot{y}_2 = y_2$$

5.15*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x}_1 = x_1 \qquad \dot{y}_1 = y_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \qquad \dot{y}_2 = -y_2$$

5.16*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x}_1 = -x_1 \qquad \dot{y}_1 = -y_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + x_1^3 \qquad \dot{y}_2 = y_2$$

5.17*. feladat: (Megoldás)

$$\dot{x}_1 = -x_1 \qquad \dot{y}_1 = y_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 \qquad \dot{y}_2 = -y_2$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 + x_3 \qquad \dot{z}_1 = z_1$$

5.18*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az ún. Lorenz egyenlet elnyelő halmazait!

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\dot{y} = -xz + rx - y \qquad (\sigma, b, r \text{ pozitív számok})$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

5.19*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszer ω-határhalmazát!

$$\dot{x} = -y + x^2 y$$
$$\dot{y} = x + y - x^2 y$$

5.20*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszer ω-határhalmazát!

$$\dot{r} = r(a - r)$$
$$\dot{\varphi} = \sin^2 \varphi + (a - r)^2$$

5.21. feladat: (Megoldás) Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet-rendszert

$$\dot{x} = 1 - x + y^3$$
$$\dot{y} = y - xy + y^2$$

Adjuk meg az $x(0) = 10$ és $y(0) = 0$ kezdeti feltételhez tartozó ω-határhalmazt!

5.22. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszer ω-határhalmazát!

$$\dot{r} = r(1 - r)$$
$$\dot{\varphi} = 1$$

5.23. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy ha az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ állandó együtthatós, n-ed rendű differenciálegyenlet-rendszer esetén teljesül, hogy $E_s(\underline{\underline{A}}) := \langle \{\underline{s}_k : \mathrm{Re}\, \lambda_k < 0\} \rangle = \mathbb{R}^n$, akkor minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\omega(\underline{x}) = \{\underline{0}\}$!

5.24. feladat: (Megoldás) Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet-rendszert

$$\dot{x} = x - x^3$$
$$\dot{y} = -y$$

Adjuk meg a rendszer elnyelő halmazait!

5.25*. feladat: (Megoldás) Legyen $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ adott paraméter.
Vizsgáljuk az alábbi rendszer ω-határhalmazát!

$$\dot{x} = y + x^2 - \lambda x(y - 1 + 2x^2)$$
$$\dot{y} = -2x(1 + y)$$

5.26*. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszer ω-határhalmazát!

$$\dot{x} = y + x(1 - y^2)$$
$$\dot{y} = (1 - y^2)(y - x)$$

5.27. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezés dinamikai rendszert határoz meg az $\mathbb{R}^2$ fázissíkon!

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 e^t \\ x_2 e^{-t} + \frac{1}{3} x_1^2 (e^{2t} - e^{-t}) \end{pmatrix} \quad \underline{\varphi}(0, \underline{x}) = \underline{x}$$

Adjunk meg olyan $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvényt, hogy az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszer megoldásai a dinamikai rendszert adják!

5.28. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezés dinamikai rendszert határoz meg az $\mathbb{R}^2$ fázissíkon!

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1 - x_1 t} \\ x_2 e^{-t} \end{pmatrix} \quad \underline{\varphi}(0, \underline{x}) = \underline{x}$$

Adjunk meg olyan $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvényt, hogy az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszer megoldásai a dinamikai rendszert adják!

5.29. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezés dinamikai rendszert határoz meg az $\mathbb{R}^2$ fázissíkon!

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} (x_1 + \frac{1}{5} x_2^3) e^t - \frac{1}{5} x_2^3 e^{-3t} \\ x_2 e^{-t} \end{pmatrix} \quad \underline{\varphi}(0, \underline{x}) = \underline{x}$$

Adjunk meg olyan $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvényt, hogy az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ differenciálegyenlet-rendszer megoldásai a dinamikai rendszert adják!

5.30. feladat: (Megoldás) Végezzünk globális vizsgálatot az alábbi rendszeren!

$$\dot{x} = x + y^2$$
$$\dot{y} = x^2 - y$$

5.31. feladat: (Megoldás) Végezzünk globális vizsgálatot az alábbi rendszeren!

$$\dot{x} = x + y^3$$
$$\dot{y} = x^3 - y$$

5.32. feladat: (Megoldás) Végezzünk globális vizsgálatot az alábbi rendszeren!

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = 2y - 5\varepsilon x^3 \quad (\varepsilon \in \mathbb{R})$$

5.33. feladat: (Megoldás) Végezzünk globális vizsgálatot az alábbi rendszeren!

$$\dot{x} = y - x$$
$$\dot{y} = y - x^2$$

5.34. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = -y$$

5.35. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = 2y$$

5.36. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = -4y + 2xy - 8$$
$$\dot{y} = 4y^2 - x^2$$

5.37. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = 2x + y$$
$$\dot{y} = x + 2y$$

5.38. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = x + y - y^3$$
$$\dot{y} = -x + y + x^3$$

5.39. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = -x - y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

5.40. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = -2x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = -x^2 + 2y^2$$

5.41. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = x^2 + 2xy$$
$$\dot{y} = -x^2 + xy + y^2$$

5.42. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = 2xy$$

5.43. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = x + x^3$$
$$\dot{y} = y + y^3$$

5.44. feladat: (Megoldás) Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer végtelenbeli viselkedését!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -4x - 5y$$

5.45. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszer pozitívan invariáns halmaza az $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ halmaz!

$$\dot{x} = -3xy$$
$$\dot{y} = -y + 3xy$$

5.46. feladat: (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik stabilis határciklusa!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2x - y + g(y), \text{ ahol } g(y) = \begin{cases} 2, & y > 0 \\ -2, & y < 0 \end{cases}.$$

5.47. feladat: (Megoldás) Adjuk meg az alábbi rendszernek a stabilis határciklusát!

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2x - 2y + g(y), \text{ ahol } g(y) = \begin{cases} 2, & y > 0 \\ -2, & y < 0 \end{cases}$$

5.48. feladat: (Megoldás) Floquet-elmélet alkalmazásával vizsgáljuk az alábbi rendszer stabilitását!

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t), \text{ ahol } \underline{\underline{A}}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.49*. feladat: (Megoldás) Legyen (X, d) metrikus tér és $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \times X \to X$ folytonos dinamikai rendszer, azaz teljesül az alábbi két tulajdonság:

1. $\underline{\varphi}(0, \underline{x}) = \underline{x}$,
2. $\underline{\varphi}(t + s, \underline{x}) = \underline{\varphi}(t, \underline{\varphi}(s, \underline{x}))$ minden $\underline{x} \in X$ és $t, s \in \mathbb{R}$-re.

Jelölje

$$\gamma(\underline{x}) := \{\underline{y} \in X : \exists t \in \mathbb{R}, \underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \underline{y}\} \text{ az } \underline{x} \in X \text{ pont pályáját.}$$

Azt mondjuk, hogy $\underline{x} \in X$ periodikus pont, ha létezik $T \neq 0$ valós szám, hogy $\underline{\varphi}(T, \underline{x}) = \underline{x}$. Mutassuk meg, hogy $\underline{x} \in X$ periodikus pont pontosan akkor, ha $\gamma(\underline{x}) \subset X$ kompakt halmaz!

5.50**. feladat: (Megoldás) Levinson-Smith-tétel alkalmazása (4.11. Állítás) nélkül, mutassuk meg, hogy az $\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ Van der Pol-egyenletnek minden $\beta > 0$ esetén létezik egyetlen stabilis határciklusa!

Megoldások

1. Fejezet-Megoldások

1.1. Megoldás: (Feladat) Az origó instabilis csomópont. $E_u = \mathbb{R}^2$, $\dim E_s = \dim E_c = 0$ ■

1.2. Megoldás: (Feladat) Az origó nyeregpont. $E_s = \{(x,y): y = 2x\}$ és $E_u = \{(x,y): y = -2x\}$, $\dim E_s = \dim E_u = 1$ és $\dim E_c = 0$ ■

1.3. Megoldás: (Feladat Az origó centrum. $E_c = \mathbb{R}^2$ és $\dim E_c = 2$ ■

1.4. Megoldás: (Feladat $E_s = \{(x,y,z): x = -\frac{y}{3} = \frac{z}{5}\}$, $E_u = \{(x,y,z): x = z\}$, $\dim E_s = 1$, $\dim E_u = 2$.■

1.5. Megoldás: (Feladat) $E_u = \{(x,y,z): \frac{y}{2} = z\}$, $E_c = \{(x,y,z): x = y\}$, $\dim E_c = 2$ és $\dim E_u = 1$.■

1.6. Megoldás: (Feladat) $E_s = \{(x,y,z): -x + y - 2z = 0\}$ és $E_u = \{(x,y,z): -x = y = \frac{z}{3}\}$, $\dim E_s = 2$ és $\dim E_u = 1$ ■

1.7. Megoldás: (Feladat) $\lambda_{12} = 0$, $\lambda_3 = 3$. $\underline{s}_1 = (1,-2,1)^T$ és a λ_{12} geometriai multiplicitása 1. Az $\underline{s}_2$ általánosított sajátvektor, pl. $\underline{s}_2 = (1,-1,0)^T$. $\underline{s}_3 = (4,4,1)^T$, $E_c = \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle$ és $E_u = \langle \underline{s}_3 \rangle$. $\dim E_c = 2$ és $\dim E_u = 1$ ■

1.8. Megoldás: (Feladat) 1. $a < -1$ esetén nyereg, 2. $-1 < a < 3$ esetén instabilis fókusz, 3. $a \geq 3$ esetén instabilis csomópont. $a = -1$ esetén a nem izolált egyensúlyi helyzet instabilis. ■

1.9. Megoldás: (Feladat) 1. $a > 1$-re nyereg, 2. $0 < a < 1$-re stabilis csomópont, 3. $a < 0$-ra nyereg. $a = 0$ és $a = 1$-ra a nem izolált egyensúlyi helyzet stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

1.10. Megoldás: (Feladat) 1. $a < 0$-ra nyereg, 2. $0 < a \leq \frac{1}{4}$ esetén instabilis csomópont, 3. $a > \frac{1}{4}$ esetén instabilis fókusz. $a = 0$ esetén a $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzet instabilis. ■

1.11. Megoldás: (Feladat) 1. $a < -1$-re nyereg, 2. $-1 < a < -\frac{1}{2}$ -re centrum, 3. $a > -\frac{1}{2}$-re nyereg. $a = -1$ esetén a $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$ és $a = -\frac{1}{2}$-re a $\{(t,2t) : t \in \mathbb{R}\}$ egyensúlyi helyzetek instabilisak. ■

1.12. Megoldás: (Feladat) 1. $a < -\frac{1}{4}$-re stabilis fókusz, 2. $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ stabilis csomó, 3. $a > 0$-re nyereg. $a = 0$ -ra a $\{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ az egyensúlyi helyzet stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

1.13. Megoldás: (Feladat) $\lambda_{12} = 1$ és $\lambda_3 = -1$. $\dim E_s = 1$ és $\dim E_u = 2$. (p-től függetlenül.) ■

1.14. Megoldás: (Feladat) Csak $p = 0$ esetén változhat. 1. $p = 0$ esetén $\dim E_c = 2$ és $\dim E_u = 1$, 2. $p > 0$ esetén $\dim E_u = 3$, 3. $p < 0$ esetén $\dim E_s = 2$ és $\dim E_u = 1$. ■

1.15. Megoldás: (Feladat) A rendszer instabilis. ■

1.16. Megoldás: (Feladat) A rendszer instabilis. ■

1.17. Megoldás: (Feladat) A rendszer instabilis. ■

1.18. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -3$. Az origó aszimptotikusan stabilis. ■

1.19. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -6 + i$ és $\lambda_2 = -6 - i$. Az origó aszimptotikusan stabilis. ■

1.20. Megoldás: (Feladat) $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_{23} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. A nulla megoldás aszimptotikusan stabilis. ■

1.21. Megoldás: (Feladat) Aszimptotikusan stabilis pontosan akkor, ha $a > 0$ és $ab - 2 > 0$. ■

1.22. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó nyeregpont. $\underline{s}_1 = \binom{1}{1}$ és $\underline{s}_2 = \binom{-1}{1}$, $E_u = \langle \underline{s}_1 \rangle$ és $E_s = \langle \underline{s}_2 \rangle$. ■

1.23. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó centrum. ■

1.24. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. $\dim E_u = 1$ és $\dim E_c = 1$. ■

1.25. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó nyeregpont.
$E_u = \langle \underline{s}_1 \rangle = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ és $E_s = \langle \underline{s}_2 \rangle = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$. ■

1.26. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó nyeregpont.
$E_s = \langle \underline{s}_1 \rangle = \{(x, y) : y = 2x,\ x \in \mathbb{R}\}$ és $E_u = \langle \underline{s}_2 \rangle = \{(x, y) : y = -2x,\ x \in \mathbb{R}\}$. ■

1.27. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó stabilis csomópont.
$E_s = \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$, így $\dim E_s = 2$. A parabolaszerű pályákat úgy kell megrajzolni, hogy érintsék az origóban az $\underline{s}_2$ irányvektorú egyenest, ugyanis ehhez tartozik a kisebb abszolút értékű sajátérték. ■

1.28. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. $\dim E_u = 1$ és $\dim E_c = 1$.
E_u az y-tengely és a $E_c = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. ■

1.29. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ 2×2-es rendszert. $\lambda_1 := \alpha + i\beta$, $\lambda_2 := \alpha - i\beta$, valamint. $\underline{s}_1 = \underline{u} + i\underline{v}$, $\underline{s}_2 = \underline{u} - i\underline{v}$. $\underline{\underline{T}} := (\underline{u}, \underline{v})$ az a mátrix, amelynek az oszlopvektorai a megfelelő sajátvektor valós és képzetes része, legyen $\underline{x} = T\underline{y}$. Ekkor $\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{T}}\underline{y}$. Az $\underline{y}$ síkon a rendszer: $\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \underline{y}$. Ekkor $\dot{r}(t) = \alpha r(t)$ és $\dot{\varphi}(t) = -\beta$.A $\det \underline{\underline{T}}$ (pozitív vagy negatív) értékétől függően az $\underline{x}$ síkon a körüljárási irány megőrződik, illetve ellentétesre változik. (→ 1.32.feladat) A konkrét feladatra rátérve: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$, valamint sajátvektorai: $\underline{s}_1 = \binom{1}{-1+i}$, illetve $\underline{s}_2 = \binom{1}{-1-i}$. Így $\underline{\underline{T}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. A rendszer az $\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$ transzformációval az $\underline{y}$ síkon: $\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \underline{y}$. $\dot{r}(t) = -2r(t)$ és $\dot{\varphi}(t) = -1$. Mivel a $\det \underline{\underline{T}}$ pozitív, ezért az $\underline{x}$ síkon is negatív rányításúak a pályagörbék.
Megjegyzés: Most a körüljárási irány meghatározására van egy nagyon egyszerű módszer: A pályagörbék spirális alakzatok. Az (1, 0) ponthoz tartozó sebességvektor a (−1,−2) vektor, ami alapján a körüljárási irány negatív. ■

1.30. Megoldás: (Feladat) $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$, valamint sajátvektorai: $\underline{s}_1 = \binom{1}{-i}$, illetve $\underline{s}_2 = \binom{1}{i}$. $\underline{\underline{T}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A differenciálegyenlet $\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$ transzformációval az $\underline{y}$ síkon: $\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \underline{y}$. $\dot{r}(t) = -2r(t)$ és $\dot{\varphi}(t) = -1$. Mivel a $\det \underline{\underline{T}}$ negatív, ezért az $\underline{x}$ síkon a pályagörbék pozitív irányításúak. (→ 1.32. feladat) ■

Megjegyzés: A pályagörbék spirális alakzatok és az $(1, 0)$ ponthoz tartozó sebességvektor a $(-2, 1)$ vektor, így a körüljárási irány pozitív.■

1.31. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet: $x = 0$ és $y = -1$. Legyen $u = x$ és $v = y + 1$. Ez esetben az inhomogén rendszer a következő homogén alakot ölt: $\dot{u} = u - v$, $\dot{v} = -4u + v$. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ és $\underline{s}_1 = \binom{1}{2}$, $\underline{s}_2 = \binom{1}{-2}$. A fáziskép a homogén rendszer fázisképének a $\vec{a}(0, -1)$ vektorral való eltolása. ■

1.32. Megoldás: (Feladat) Tekintsük egy γ síkgörbét és vezessük be az $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ és $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ polárkoordináta-rendszert. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixszal megadott nem elfajuló lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\dot{\varphi}(t) > 0$ $t > 0$-ra és $\det \underline{\underline{A}} > 0$. A $\tilde{\gamma}$, az A leképezés szerinti képe is szükségképpen pozitív irányítású. Világos, hogy

$$A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \cdot \begin{pmatrix} a\cos\varphi(t) + b\sin\varphi(t) \\ c\cos\varphi(t) + d\sin\varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Mivel $\tilde{\varphi}(t) = \operatorname{artg}\left(\frac{c\cos\varphi(t) + d\sin\varphi(t)}{a\cos\varphi(t) + b\sin\varphi(t)}\right)$, ezért $(\dot{\tilde{\varphi}})(t) = \frac{\lambda^2}{\mu^2}(ad - bc)\dot{\varphi}(t)$. Így az $\underline{\underline{A}}$ leképezés pontosan akkor lesz körüljárás-iránytartó, ha $\det \underline{\underline{A}} > 0$. ■

1.33. Megoldás: (Feladat) Ismeretes, hogy az általános megoldás

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\underline{u} - \sin(\beta t)\underline{v}) + c_2 e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\underline{u} + \cos(\beta t)\underline{v})$$

alakú, ahol az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$ és a hozzátartozó sajátvektorok $\underline{s}_{12} = \underline{u} \pm i\underline{v}$. A feltétel miatt szükségképpen $\alpha = 0$. ■

1.34. Megoldás: (Feladat) **a)** $p_2(i\omega) = (8 - \omega^2) + i\beta\omega$. A $p_2(\lambda)$ hodográfjának metszéspontjai $\omega \geq 0$ esetén a $\{\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, féltengelyekkel a következő pontok: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{8}$. A hodográf a $\{\mathrm{Re}\, z < 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$ tengelyt már nem metszi. Így a hodográf pontosan 2 síknegyeden halad át pozitív irányítással.
b) Egyszerűen kiszámolható, hogy $p_3(i\omega) = (1 - 5\omega^2) + i(6 - \omega^2)\omega$. A $p_3(\lambda)$ hodográfjának metszéspontjai $\omega \geq 0$ esetén a $\{\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, z < 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$ féltengelyekkel a következő pontok: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1/\sqrt{5}$, $\omega_3 = \sqrt{6}$. A hodográf a $\{\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z < 0\}$ tengelyt már nem metszi. Így a hodográf pontosan 3 síknegyeden halad át pozitív irányítással. ■

2. Fejezet-Megoldások

2.1. Megoldás: (Feladat) $x(t,0,x_0) = \frac{x_0}{1-tx_0}$. Ha $x_0 > 0$, akkor a megoldás nem értelmezett minden $t > 0$ -ra. Az $x = 0$ megoldás nem stabilis. ■

2.2. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $y_1 = 1$ és $y_2 = 0$. Az $y_1 = 1$ aszimptotikusan stabilis, míg az $y_2 = 0$ instabilis. A vonzási tartomány: $T = (0, \infty)$. ■

2.3. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ és a $y_3 = 0$. Az $y_3 = 0$ aszimptotikusan stabilis, míg az $y_1 = 1$ instabilis és az $y_2 = -1$ ún. félig instabilis. Az $y_3 = 0$ vonzási tartománya: $T = (-1, 1)$. ■

2.4. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ és a $y_3 = 0$. Az $y_1 = 1$ és a $y_2 = -1$ aszimptotikusan stabilis, míg az $y_3 = 0$ instabilis. Az $y_1 = 1$ vonzási tartománya: $T_1 = (0, \infty)$, az $y_2 = -1$ vonzási tartománya: $T_2 = (-\infty, 0)$. ■

2.5. Megoldás: (Feladat) A 2.4. Feladat szerint az azonosan nulla megoldás instabilis, de az ezen megoldás egy környezetéből induló megoldások korlátosak. ■

2.6. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $\{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$. A pályagörbék egyenlete: $y = kx + c$. $k > 0$ esetén instabilis, $k < 0$ esetén stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis, $k = 0$ esetén instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.7. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. A trajektóriák egyenlete: $y = x^2 + c$. Az egyensúlyi helyzet minden pontja instabilis. ■

2.8. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó instabilis. ■

2.9. Megoldás: (Feladat) Az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.10. Megoldás: (Feladat) Az origó nyeregpont. ■

2.11. Megoldás: (Feladat) Az origó nyeregpont. ■

2.12. Megoldás: (Feladat) Az origó nyeregpont. ■

2.13. Megoldás: (Feladat) Az origó stabilis fókusz. ■

2.14. Megoldás: (Feladat) Az origó elfajult instabilis csomópont. ■

2.15. Megoldás: (Feladat) Az origó nyeregpont. ■

2.16. Megoldás: (Feladat) A pályagörbék egyenlete $x^2 + y^2 = C$. Az origó centrum. ■

2.17. Megoldás: (Feladat) A pályagörbék egyenlete $\cos x + \cos y = C$. A rendszer első integrálja $F(x, y) = \cos x + \cos y$. Az origó centrum. ■

2.18. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0, 0)$ és $P_2(-1, 1)$. A P_1 és P_2 pont instabilis csomópont. ■

2.19. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,1)$ és $P_2(-1,-1)$. P_1 stabilis (elfajult) csomópont és P_2 nyeregpont. ■

2.20. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,1)$ és $P_2(-1,1)$. P_1 stabilis fókusz és P_2 nyeregpont.■

2.21. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és $P_3(-1,-1)$. P_1 nyereg, a P_2 és P_3 stabilis fókuszpont. ■

2.22. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$. P_1 stabilis csomópont, a P_2 nyeregpont van. ■

2.23. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,\frac{3}{2})$, $P_3(1,0)$ és $P_4(-1,2)$. A P_1 instabilis csomópont, a P_2 stabilis csomópont, a P_3 és P_4 nyeregpont. ■

2.24. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó nyeregpont. ■

2.25. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó nyeregpont. ■

2.26. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,1)$. P_1 nyeregpont, a P_2 és P_3 instabilis csomópont. ■

2.27. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó stabilis csomópont.■

2.28. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek a $P_k(k\pi,0)$, ahol $k \in Z$.
a), ha $k = 2n$, akkor stabilis csomópont
b), ha $k = 2n+1$, akkor nyeregpont. ■

2.29. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,-1)$ és $P_4(-1,1$. A P_1 és P_3 nyereg, a P_2 stabilis fókusz és a P_4 instabilis fókusz. ■

2.30. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(3,4)$, $P_2(-3,-4)$, $P_3(4,3)$ és $P_4(-4,-3)$. A P_1 és P_2 nyereg, a P_3 instabilis csomópont és a P_4 stabilis csomópont van. ■

2.31. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_3(-1,0)$. A P_1 nyereg, a P_2 instabilis fókuszpont és a P_3 stabilis fókuszpont. ■

2.32. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$. P_1 instabilis fókusz és a P_2 nyeregpont.■

2.33. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet: $P_1(1,1)$. P_1 stabilis fókuszpont. ■

2.34. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és a $P_3(-1,0)$. P_1 stabilis fókuszpont, a P_2 és a P_3 nyeregpont. ■

2.35. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,2)$, $P_3(1,0)$ és $P_4(-3,4)$. P_1 instabilis csomópont, a P_2 pont stabilis csomópont, a P_3 és a P_4 nyeregpont. ■

2.36. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó nem stabilis. ■

2.37. Megoldás: (Feladat) $\beta < 1$-re $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, azaz dim $E_s = 3$. $\beta = 1$-re $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, azaz dim $E_c = 1$ és dim $E_s = 2$. $\beta > 1$-re $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, azaz dim $E_u = 1$ és dim $E_s = 2$. ■

2.38. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0,0)$, $P_2(-2,2,-2)$. P_1-ben dim $E_u = 1$, dim $E_s = 2$ és a P_2-ben dim $E_s = 3$. ■

2.39. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. dim $E_c = 1$ és dim $E_u = 2$. ■

2.40. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,-1)$ és $P_2(2,-3)$. P_1-ben dim $E_u = 2$ és a P_2-ben dim $E_u = 1$, dim $E_s = 1$. ■

2.41. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,0)$. P_1-ben dim $E_s = 2$, dim $E_u = 1$ és a P_2-ben dim $E_u = 2$, dim $E_s = 1$. ■

2.42. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(1-r^2)$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint stabilis határciklusból és ezen határciklusra (kívülről és belülről) rácsavarodó pályákból áll. ■

2.43. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = -r^3$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint stabilis fókuszból és erre rácsavarodó pályákból áll. ■

2.44. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(1-r^2)$ és $\dot{\varphi} = -1$. A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint stabilis határciklusból és ezen határciklusra (kívülről és belülről) rácsavarodó pályákból áll. ■

2.45. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(1-r)^2$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint belülről stabilis kívülről instabilis határciklusból és ezen határciklusra belülről rácsavarodó és kívülről távolodó pályákból áll. ■

2.46. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = r(r-1)(r-2)$ és $\dot{\varphi} = 1$. A fáziskép az origóból, mint instabilis fókuszból, az $r = 1$ körvonalból, mint stabilis határciklusból, $r = 2$ körvonalból, mint instabilis határciklusból és ezen határciklusokra kívülről, illetve belülről rácsavarodó és kívülről távolodó pályákból áll. ■

2.47. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = rf(r)$ és $\dot{\varphi} = 1$.
Ha $f(r_0) = 0$, akkor az $r = r_0$ körvonal invariáns halmaz pozitív irányítással. A periodikus megoldások az f függvény gyökei által meghatározott sugarú körök.
Ha $r < r_0$ esetén $f(r) > 0$ és $r > r_0$ esetén $f(r) < 0$, akkor az $r = r_0$ körvonal stabilis határciklus.
Ha $r < r_0$ esetén $f(r) < 0$ és $r > r_0$ esetén $f(r) > 0$, akkor az $r = r_0$ körvonal instabilis határciklus.
Ha f nem vált előjelet az r_0-ban, akkor az $r = r_0$ körvonal félig stabilis határciklus. ■

2.48. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. A P_1 nyeregpont, $V(x,y) = x - \ln|x| + y - \ln|y|$ első integrál. A V függvény konvex, ezért a pályagörbék itt zárt görbék és a pályagörbék megkerülik a P_2 pontot. A P_2 stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. Az x-tengely instabilis, az y-tengely stabilis altér. ■

2.49. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $\{(x,0): x \in \mathbb{R}\}$. Az első integrál: $V(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2 + x$. $y > 0$ esetén a pályagörbék jobbra tartanak, $y > 0$ és $x > 1$ vagy $y < 0$ és $x < 1$ esetén a pályagörbék felfelé, $y > 0$ és $x < 1$ vagy $y < 0$ és $x > 1$ esetén a pályagörbék lefelé tartanak. Az egyensúlyi helyzet $x \geq 1$ esetén így instabilis és $x < 1$ esetén stabilis. ■

2.50. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Az első integrál: $V(x,y) = x^4 + y^4$. Az origó centrum. ■

2.51. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Az első integrál: $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{\alpha}{4}x^4$. V függvény konvex és így a $\mathrm{V}(x,y)=C$ origót megkerülő zárt görbe. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A pályák negatív irányításúak. ■

2.52. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Első integrál: $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}kx^2$. A V függvény konvex. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont. A pályagörbék negatív irányításúak. ■

2.53. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Az első integrál: $\mathrm{V}(x,y)=y^2e^{2x}+xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}$. A V függvény az origó egy (kis) környezetében konvex. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. A szeparátrix (a zárt és a nyílt pályák szétválasztója) az $y^2=-x+\frac{1}{2}$ parabola lesz. ■

2.54. Megoldás: (Feladat) Ha $k\leq 0$, akkor nincs a rendszernek egyensúlyi pontja.
Ha $k>0$. akkor a $P_k(\ln k,0)$ az egyensúlyi pont. A rendszernek megadható az első integrálja: $\mathrm{V}(x,y)=e^x-kx+\frac{1}{2}y^2$. A V konvex. A pályák megkerülik az egyensúlyi pontot. A $P_k(\ln k,0)$ stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

2.55. Megoldás: (Feladat) Ha $k\geq 0$, akkor nincs a rendszernek egyensúlyi pontja. Ha $k<0$. akkor a $P_k(\ln(-k),0)$ az egyensúlyi pont. P_k nyeregpont. A pályagörbék: $\frac{1}{2}y^2=e^x+kx+C$. ■

2.56. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_3(-1,0)$. P_2 nyeregpont. Első integrál: $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3$. V a P_3 egy (kis) környezetében konvex. P_3 stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. P_1 nem stabilis. Az origót tartalmazó zárt pálya orbitálisan stabilis. ■

2.57. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r}=-r^2$ és $\dot{\varphi}=1$. A fáziskép az origóból, mint aszimptotikusan stabilis fókuszból és erre rácsavarodó pályákból áll. ■

2.58. Megoldás: (Feladat) A rendszer egyensúlyi helyzetei: $P_1(0,1)$ és $P_2(0,-1)$. P_2 nyeregpont. A fázisportré a függőleges tengelyre szimmetrikus. P_1 centrum. ■

2.59. Megoldás: (Feladat) Az első integrál:$\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{6}y^6+\frac{1}{4}x^4$. Minden megoldás periodikus.■

2.60. Megoldás: (Feladat) Az első integrál: $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^4$. Az egyetlen egyensúlyi helyzet, az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. Minden megoldás periodikus.■

2.61. Megoldás: (Feladat) A rendszer Hamilton-típusú. $H(x,y)=-x^2y+y-\frac{1}{3}y^3$. Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,1), P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$ és $P_4(-1,0)$. A P_1 és P_2 centrumpontok, míg a P_3 és P_4 nyeregpontok. Az y tengelyre szimmetrikusak a pályagörbék. ■

2.62. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0), P_2(1,0)$, $P_3(-1,0)$. A rendszer Hamilton-típusú. P_1 nyeregpont, a P_2 és P_3 centrum. A pályagörbék szimmetrikusak az x és az y-tengelyre is. ■

2.63. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A rendszer Hamilton-típusú.
Az origó centrum. A rendszer Hamilton-függvénye: $H(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}y^2$ a teljes számsíkon konvex, minden megoldás periodikus. ■

2.64. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek a $P_1(n\pi, 0)$ és a $P_2\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi, 0\right)$, ahol n és m egész számok. A rendszer Hamilton-típusú. A P_1 nyeregpont, a P_2 centrum. ■

2.65. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + y^2$. Az origó instabilis egyensúlyi pont. ■

2.66. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + y^4$. Az origó (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.67. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = 2x^2 + y^2$. Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.68. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = ax^{\propto} + by^{\beta}$. Ha $4a - 6b = 0$ és $\alpha = 6,\ \beta = 4$, akkor $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\ (x, y) = 0$. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A koordinátatengelyek minden pontja egyensúlyi pont. A pályák az y-tengelyhez közelednek és az x-tengelytől távolodnak. ■

2.69. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = -x^4 + 2y^2$. A $(0, 0)$ pont instabilis. ■

2.70. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = 2x^2 + y^4$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\ (x, y) = -4x^4 \leq\ 0$. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.71. Megoldás: (<u>Feladat</u>) $\mathrm{V}(x, y) = x^4 + 2y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\ (x, y) = -4x^6 \leq 0$. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.72. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + y^4$. Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont. ■

2.73. Megoldás: (<u>Feladat</u>) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + y^2$. Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.74. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = 2x^2 + y^2$. Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.75. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + y^2$ Ljapunov-függvény esetén: $(L_{\underline{f}}V)\ (x, y) = -2x^4 \leq 0$. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.76. Megoldás: (<u>Feladat</u>) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Legyen $\mathrm{V}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$, ahol $G'(x) = g(x)$. A V függvénynek az origóban minimumhelye van. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\ (x, y) = -f(x)y^2 < 0$, ha $(x, y) \neq (0, 0)$. Az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.77. I. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = x^4 + y^4$. Az origó stabilis. A koordinátatengelyek minden pontja egyensúlyi pont. A pályák az y-tengelyhez közelednek és az x-tengelytől távolodnak. ■

2.78. Megoldás: (<u>Feladat</u>) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + 2y^2$. Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.79. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = x + y^2$. A 2.18. Állítás miatt az origó instabilis. ■

2.80. Megoldás: (<u>Feladat</u>) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + y^2$. Az origó (kis) környezetében $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\ (x, y) < 0$. Az origó (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.81. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}by^2$. Az origó (lokálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.82. Megoldás: (<u>Feladat</u>) A $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + y^2$ A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. A vonzási halmaz tartalmazza az $\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ halmazt. ■

2.83. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. Az origó (globálisan) aszimptotikusan stabilis. ■

2.84. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. ■

2.85. Megoldás: (Feladat $\mathrm{V}(x,y) = 20x^3 - 9y^4$. Az origó instabilis egyensúlyi pont. ■

2.86. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = xy$. A 2.18. Állítás miatt az origó instabilis. ■

2.87. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = xy$. Ekkor $\mathrm{V}(0,0) = 0$, $\mathrm{V}(k,k) > 0$ minden $k > 0$-ra és $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = x^2 + y^2 - xy\sin x$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) > 0$, az origó instabilis. ■

2.88. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 2(x^2 + y^2)^2 > 0$ minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén. A 2.16. Áll. miatt az origó instabilis ■

2.89. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = -xy^2 + x^3$ függvényre teljesülnek a 2.18. Állítás feltételei, így az origó instabilis. ■

2.90. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = -x^4 + 2y^2$. A 2.15. Állítás miatt az origó instabilis. ■

2.91. Megoldás I: (Feladat) Ha $a > 0$, akkor az origó instabilis fókusz, ha $a < 0$, akkor az origó aszimptotikusan stabilis fókusz. Ha $a = 0$, akkor az origó instabilis. ■

2.91. Megoldás II: ($a = 0$ esetben) $\dot{r} = r^3(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)$ és $\dot{\varphi} = 1 - r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi$.
$\dot{r} > 0$, a pályagörbék az origótól távolodnak, azaz nem lehet stabilis az origó. ■

2.92. Megoldás: (Feladat) A $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. Ha $k > 0$, akkor az origó instabilis és $k < 0$ esetén az origó (globálisan) aszimptotikus stabilis. $k = 0$ esetén az origó centrum. ■

2.93. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $y < \frac{1}{a}$ esetén $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 - y - \frac{1}{a}\ln(\frac{1}{a} - y)$ első integrál. Az $U = \left\{(x,y): x \in \mathbb{R}, y < \frac{1}{a}\right\}$ tartományon a pályák zártak. Ha $y > \frac{1}{a}$, akkor a trajektóriák nem zártak. Az $y = \frac{1}{a}$ a zárt és nyílt pályákat szétválasztó. ■

2.94. Megoldás: (Feladat) Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. $\dot{r} = 0$ és $\dot{\varphi} = r^2$. A pályák origó középpontú körök, amelyeken különböző szögsebességgel halad. Egyik megoldás sem lehet stabilis, de minden megoldás Poincaré-értelemben (orbitálisan) stabilis. Az origó Ljapunov-stabilis. ■

2.95. Megoldás: (Feladat) Legyen $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x f(t,0)dt$.A V függvénynek az origóban lokális minimuma van. Másrészt $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) \leq 0$. Az origó stabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.96. Megoldás: (Feladat) Alkalmazzuk a 2.95. feladatban megfogalmazott állítást!
Az origó stabilis. ■

2.97. Megoldás: (Feladat) Alkalmazzuk a 2.95. feladatban megfogalmazott állítást!
Az origó stabilis. ■

2.98. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = \frac{1}{2}Ax^2 + B\int_0^y f(t)dt$. Léteznek olyan A és B pozitív számok, hogy a V függvény ún. erős Ljapunov-függvény legyen. ■

2.99. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A rendszer Hamilton-típusú. $H(x,y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3$. Az origó instabilis. A pályák aszimptotái az $x = 0$ és $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ egyenesek. ■

2.100. Megoldás: (Feladat) A két egyensúlyi helyzet a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pont. A pályák az 1 sugarú, origó középpontú körvonalhoz közelítenek az óramutató járásával ellenkező irányban. Az $(1,0)$ pont *lokálisan* attraktív, de nem stabilis. A $(0,0)$ instabilis. ■

2.101. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r(1-r^2)$ és $\dot{\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{2}$. A rendszer két egyensúlyi helyzete a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pont. A pályák az 1 sugarú, origó középpontú körvonalhoz közelítenek az óramutató járásával ellenkező irányban. Az $(1,0)$ *lokálisan* attraktív, de nem stabilis. A $(0,0)$ instabilis. ■

2.102. Megoldás: (Feladat) Tekintsük a rendszerrel ekvivalens $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\frac{g}{l}\sin x - \frac{k}{m}y$ rendszert. Az egyensúlyi helyzetek: $(n\pi, 0)$ pontok. $k = 0$ esetén a linearizált rendszer mátrixa az origóban kritikus. $\mathrm{V}(x,y) := mgl(1-\cos x) + \frac{1}{2}ml^2y^2$ az $U = \{(x,y): |x| < \pi\}$ környezetben. $\mathrm{V}(0,0) = 0$ és $\mathrm{V}(x,y) > 0$, $(x,y) \in U$, $\frac{d}{dt}\mathrm{V}(\underline{x}(t)) = -kl^2y^2 \leq 0$. Az origó stabilis. Jelölje $S = \{(x,y) \in U: \dot{\mathrm{V}}(x,y) = 0\}$. Az S nem tartalmaz teljes pályát az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ triviális megoldáson kívül. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. Elemi módszerekkel belátható, hogy a $(\pm\pi, 0)$ pont instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.103. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és a $P_3(-1,-1)$. $\mathrm{V}(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})(x,y) = -(x^2-y^2)^2 \leq 0$ tetszőleges x és y esetén. Az origó stabilis. $N_{\dot{\mathrm{V}}} := \{(x,y) \in S_{c^*}: \dot{\mathrm{V}}(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in S_{c^*}: y = \pm x\}$ $N_{\dot{\mathrm{V}}}$-ben nincs nem triviális teljes pálya. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó lokálisan aszimptotikusan stabilis és a vonzási tartománya tartalmazza az $\{(x,y): \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 < 1\}$ halmazt. ■

2.104. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = \frac{r}{(1+r^4)(1+u^2)^2}(u^4 - 2u^3 + u - 1 + u^3r^2\sin^2\varphi)$, ahol $u = \mathrm{tg}\,\varphi$. A rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete az origó. A pályák az origóra szimmetrikusak. A nullvonalak az $y = 0$, $y = 2x$, $y^5 + x^2y - x^3 = 0$ görbék. Jelölje M és N az alábbi szektorokat: $M = \{(x,y): -y < x < \frac{1}{2}y\}$ és $N = \{(x,y): y < x < \frac{5}{4}y\}$. A pályák M és N-en balról jobbra haladnak. A $y^5 + x^2y - x^3 = 0$ görbe és az $y = \frac{4}{5}x$ egyenes az $x = \frac{25}{32}$ és az $y = \frac{5}{8}$ pontokban metszi egymást. Jelölje $P := (\frac{25}{32}, \frac{5}{8})$. Legyen S az OP és az x-tengely által meghatározott szektor. Itt a pályák csökkennek és balra haladnak és az itt haladó pályák az origóba tartanak. Az origó instabilis, ugyanis az origó (kis) környezetéből induló pályák elhagyják ezt a környezetet. Az origó globálisan attraktív. ■

2.105. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = 0$ és $\dot{\varphi} = x - k = -k + r\cos\varphi$. Tegyük fel, hogy $k \neq 0$. Az egyensúlyi helyzetek a $(0,0)$ és az (k,y) pontok, ahol y tetszőleges. Az $x = k$ egyenest nem metsző pályák origó körüli körök. Az $x = k$ egyenest érintő kör egy homoklinikus pályából és az egyenesen lévő egyensúlyi pontból áll. Az $x = k$ egyenest metsző körök egy heteroklinikus pályából és két egyensúlyi pontból állnak. Az $x > k$ félsíkban a pályák pozitív, az $x < k$ félsíkban negatív irányításúak. Az origó centrum. A (k,y) pontok stabilis, illetve instabilis egyensúlyi helyzetek aszerint, hogy y pozitív, illetve negatív. Az $(k,0)$ egyensúlyi helyzet instabilis. Az azonosan nulla megoldáson kívül minden megoldás instabilis. Az origó környezetében a pályák orbitálisan stabilisak. $k = 0$ esetben a pályák origó körüli körök, heteroklinikus pályák. Ekkor nincs periodikus megoldás. A pályák a második tengelynél véget érnek. ■

2.106. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és $\dot{\varphi} = -xy = -r^2 \sin\varphi \cos\varphi$. Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó instabilis. Az első és a harmadik negyedben a pályák negatív, míg a második és a negyedik negyedben pozitív körüljárásúak. ■

2.107. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r^3$. $r^2(t) = \frac{-1}{2(t+c)}$. A kezdeti érték feltételek miatt: $r(0) = 1$, ekkor $r(t) = \sqrt{\frac{1}{1-2t}}$. Ebből következőleg $t = \frac{1}{2}$. ■

2.108. Megoldás: (Feladat) A rendszer Hamilton-típusú. $H(x,y) = (-y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3)\frac{1}{2}$. Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0), P_2(-2,0), P_3(1,\sqrt{3})$ és $P_4(1,-\sqrt{3})$. A P_1 centrum, míg a P_2, P_3 és P_4 nyeregpont. ■

2.109. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0), P_2(-1,1)$ és $P_3(-1,-1)$ A pályák az x-tengelyre szimmetrikusak. Az origó centrum. ■

2.110. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet: $P_1(0,0)$. A fáziskép a függőleges tengelyre szimmetrikus. Az origó centrum. ■

2.111. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és $P_3(-1,-1)$. P_1 nyeregpont, a P_2 és P_3 instabilis fókusz. Az $x = 0$ és az $y = 0$ tengelyek féltengelye pálya. $x > 0$, $y > 0$ esetén $\mathrm{V}(x,y) := x - \ln x + \frac{1}{2}y^2 - \ln y$. A V függvénynek a P_2 pontban lokális minimuma van és $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = (y-1)^2(xy+x) \geq 0$, az $(1,1)$ pont instabilis. ■

<u>Megjegyzés</u>: A $\mathrm{V}(x,y) = x - \ln x + y + \frac{1}{y}$ függvény is egy alkalmas Ljapunov-függvény. ⊡

2.112.I. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. A pályagörbék egyenlete $x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$ alakú. Az x-tengely invariáns. A körsorok homoklinikus pályák és az origó nem stabilis egyensúlyi helyzet. A valós tengely pozitív részét kivéve bármely pontból induló megoldás az origóba tart (az origó vonzási halmaza), de az origó instabilis. ■

2.112.II. Megoldás: (Feladat) Vezessük be a $z(t) = x(t) + iy(t)$ komplex változós függvényt. Ekkor: $\dot{z}(t) = z^2(t)$. A $z(0) = z_0$ kezdeti értéket teljesítő megoldás $z(t) = \frac{z_0}{1-z_0 t}$. A függőleges tengelyről induló megoldásokra: $z(0) = iK$, így $C = \frac{1}{iK}$, ahol K tetszőleges valós. $z(t) = \frac{Ki - tK^2}{1+t^2K^2}$. Mivel x és y a z valós és képzetes része, ezért $x(t) = \frac{-tK^2}{1+t^2K^2}$ és $y(t) = \frac{K}{1+t^2K^2}$. Ekkor az $x^2 = (K-y)y$ összefüggést kapjuk. A felső félsíkban pozitív irányban haladnak a megoldások, az alsó félsíkban pedig negatív irányban. ■

2.113. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis fókusz. A $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$ Ljapunov függvény esetén $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = 2y^2(x^2-1)$. Így, ha $|x| < 1$, akkor az origó stabilis. Az $N_{\dot{\mathrm{V}}} = \{(x,y) \in S_{c^*} : \dot{\mathrm{V}}(x,y) = 0\}$ nem tartalmaz a triviális megoldástól különböző teljes pályát. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. $S_{c^*} := \{(x,y) \in U\colon x^2 + y^2 < 1\}$ halmaz korlátos és $\dot{\mathrm{V}}(x,y) \leq 0$, ha $(x,y) \in S_{c^*}$. Az origó egy vonzási tartománya tartalmazza a S_{c^*} halmazt. ■

2.114. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\mathrm{V}(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ esetén $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = -16x^2(2+y^2)$. Az origó stabilis. $N_{\dot{\mathrm{V}}} := \{(x,y) \in S_{c^*} : \dot{\mathrm{V}}(x,y) = 0\}$ halmaz nem tartalmaz az egyensúlyi helyzettől különböző teljes pályát. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó

aszimptotikusan stabilis. $V(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ radiálisan nem korlátos, így az origó globálisan aszimptotikusan stabilis.■

2.115. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó elfajult stabilis csomópont. A $V(x,y) = x^2 + y^2$ esetén $(L_{\underline{f}}V)(x,y) = 2(x^2(2x-1) + y^2(x-1+y))$. Ha $x < \frac{1}{2}$, $y < 1 - x$, akkor $(L_{\underline{f}}V)(x,y) < 0$, az origó aszimptotikusan stabilis. A $T = \left\{(x,y)\colon x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$ halmaz vonzó halmaz és az origó vonzási tartománya tartalmazza a T halmazt. ■

2.116. Megoldás: (Feladat) Az origó stabilis fókuszpont. $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x})$ alakú, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^3y^2 \\ x^2y^3 \end{pmatrix}$. $V(\underline{x}) := \underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$. Ekkor $\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T\underline{\underline{Q}}\,\underline{x} + 2\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{g}(\underline{x})$. (*) $\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ választással, $\underline{\underline{P}}$-re a $\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ mátrix adódik. Ez esetben $\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} = x^2y^2 < \frac{(x^2+y^2)^2}{2} = \frac{|\underline{x}|^4}{2} < \varepsilon \leftrightarrow |\underline{x}| < \sqrt[4]{2\varepsilon}$. Így (*) miatt $\dot{V}(\underline{x}) < -|\underline{x}|^2(1 - 2\varepsilon|\underline{\underline{P}}|)$. $|\underline{\underline{P}}| = \frac{1}{4}$, ezért $\dot{V}(\underline{x}) < 0$, ha $\varepsilon < \frac{1}{2|\underline{\underline{P}}|} = 2$. $T = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon V(\underline{x}) < \frac{1}{2}\}$ vonzó halmaz. Az origó egy vonzási halmaza $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 < 2\}$. ■

2.117. Megoldás: (Feladat) Az origó elfajult stabilis csomópont. A rendszer $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x})$ alakú, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \end{pmatrix}$. Legyen $V(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$. Válasszuk meg $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{E}}$-nak és oldjuk meg a Ljapunov-egyenletet. Ekkor $\underline{\underline{P}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A $\underline{\underline{P}}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_{12} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|\underline{g}(\underline{x})| \leq \varepsilon|\underline{x}|$ minden $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$ esetén. Így $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$ esetén $\dot{V}(\underline{x}) \leq -|\underline{x}|^2(\lambda_{min}(\underline{\underline{Q}}) - 2\lambda_{max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon)$. Elegendően kicsi ε-ra az $S(\underline{0},\delta)$-n a $V(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$ függvény pozitív definit és a $\dot{V}(\underline{x})$ itt negatív definit. $\dot{V}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$, ahol $\varepsilon < \frac{\lambda_{min}(\underline{\underline{Q}})}{2\lambda_{max}(\underline{\underline{P}})}$. Mivel $\lambda_{max}\underline{\underline{P}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\lambda_{min}\underline{\underline{Q}} = 1$. Így $\frac{\lambda_{min}\underline{\underline{Q}}}{2\lambda_{max}\underline{\underline{P}}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$. Válasszuk ε-t pl. $\varepsilon = \frac{1}{4}$-nek és legyen δ egy olyan pozitív szám, amelyre $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$ esetén $|\underline{g}(\underline{x})| \leq \frac{1}{4}|\underline{x}|$, azaz $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \end{pmatrix}\right| \leq \frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$. Az origó egy attraktivitási tartománya: $T = \{\underline{x}\colon \frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 < r\} \subset S(\underline{0},\delta)$. ■

2.118. Megoldás: (Feladat) Az origó stabilis csomópont. A rendszer $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x})$ alakú, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$. $V(\underline{x}) := \underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre létezik olyan $\underline{\underline{Q}}$ pozitív definit mátrix, amelyre teljesül az ún. Ljapunov egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$. Válasszuk meg $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{E}}$-nak és oldjuk meg a Ljapunov-egyenletet. $\underline{\underline{P}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. A $\underline{\underline{P}}$ mátrix sajátértékei:$\lambda_{12} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{12}$. Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|\underline{g}(\underline{x})| \leq \varepsilon|\underline{x}|$ minden $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$ esetén. Így $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$ esetén $\dot{V}(\underline{x}) \leq -|\underline{x}|^2(\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}}) - 2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\varepsilon)$. Elegendően kicsi ε-ra az $S(\underline{0},\delta)$-n a $V(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x}$ pozitív definit és a $\dot{V}(\underline{x})$ itt negatív definit. $\dot{V}(\underline{x}) < 0$, ha $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$, ahol $\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}(\underline{\underline{Q}})}{2\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})}$. Mivel $\lambda_{max}\underline{\underline{P}} = \frac{5+\sqrt{5}}{12}$ és $\lambda_{min}\underline{\underline{Q}} = 1$. Így $\frac{\lambda_{\min}\underline{\underline{Q}}}{2\lambda_{\max}\underline{\underline{P}}} = \frac{6}{5+\sqrt{5}}$. Válasszuk ε-t pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$-nek és legyen δ *egy* olyan pozitív szám, amelyre $\underline{x} \in S(\underline{0},\delta)$ esetén $|\underline{g}(\underline{x})| \leq \frac{1}{2}|\underline{x}|$, azaz $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$. Így az origó attraktivitási tartománya: $T = \{\underline{x}\colon \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y^2 < r\} \subset S(\underline{0},\delta)$.■

Megjegyzés: Eljárhattunk volna a következőképpen is: Mivel $\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{\underline{Q}}\, \underline{x} + 2\underline{x}^T \underline{\underline{P}}\, \underline{g}(\underline{x})$. (*)

$$\frac{|\underline{g}(\underline{x})|}{|\underline{x}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \sqrt{x^2+y^2} = \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad |\underline{x}| < \varepsilon$$

Így (*) miatt $\dot{V}(\underline{x}) = -|\underline{x}|^2(1 - 2\varepsilon|\underline{\underline{P}}|)$. A $\underline{\underline{P}}$ választása miatt $|\underline{\underline{P}}| = \frac{5+\sqrt{5}}{12}$ (A maximális sajátérték), ezért $\dot{V}(\underline{x}) < 0$, ha $\varepsilon < \frac{1}{2|\underline{\underline{P}}|} = \frac{6}{5+\sqrt{5}}$. (**). Ha a $\underline{\underline{P}}$ szimmetrikus és pozitív definit mátrix, akkor

$$\lambda_{\min}(\underline{\underline{P}})|\underline{x}|^2 \le \underline{x}^T \underline{\underline{P}}\, \underline{x} = V(\underline{x}) \le \lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})|\underline{x}|^2. \ (\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}}) = |\underline{\underline{P}}|).$$

(**) miatt $|\underline{x}| < \varepsilon < \frac{1}{2|\underline{\underline{P}}|} = \frac{6}{5+\sqrt{5}}$, így $\lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})|\underline{x}|^2 < \lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\left(\frac{6}{5+\sqrt{5}}\right)^2$.

Következésképpen $\lambda_{\min}(\underline{\underline{P}})|\underline{x}|^2 \le \underline{x}^T \underline{\underline{P}}\, \underline{x} = V(\underline{x}) < \lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\left(\frac{6}{5+\sqrt{5}}\right)^2$, azaz a

$T = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\underline{x}) < \lambda_{\max}(\underline{\underline{P}})\left(\frac{6}{5+\sqrt{5}}\right)^2\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\underline{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y^2 < \frac{3}{5+\sqrt{5}}\}$ vonzó halmaz. ■

2.119. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet stabilis. $V(x,y) := x^2 + 3y^2$. Ha $1 - 2y^2 > 0$, azaz $|y| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $\dot{V}(\underline{x}) \le 0$. Legyen $U = \left\{(x,y) : x^2 + 3y^2 < \frac{3}{2}\right\}$. Nincs az U-ban olyan teljes, nem triviális pálya, amely mentén a V Ljapunov-függvény állandó. Így az origó aszimptotikusan stabilis is és az U halmaz az origó (egy) vonzási halmaza. ■

2.120. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_{23}(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$. Az origó stabilis fókusz. $V(x,y) := 2x^2 + y^2$. Ha $y^2 - 1 < 0$, azaz $|y| < 1$, akkor $\dot{V}(\underline{x}) < 0$. Az origó aszimptotikusan stabilis. Legyen $U = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 < 1\}$. Az U halmaz az origó (egy) vonzási halmaza. ■

2.121. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) := x^2 - y^2$. Ekkor $\dot{V}(\underline{x}) = 2(x^4 - y^4)$.
Legyen $U_1 = \{(x,y) : |y| < |x|\}$ és U az origó tetszőleges környezete. Ekkor

1. $(0,0) \in \partial U_1$
2. $V(x,y) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
3. $\dot{V}(\underline{x}) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
4. $V(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in U \cap \partial U_1$

A Csetajev-tétel miatt az origó instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.122. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = xy$. Ekkor $\dot{V}(\underline{x}) = y^2 + x^2 + x^2y^2$.
Legyen $U_1 = \{(x,y) : xy > 0\}$ és U az origó tetszőleges környezete. Ekkor

1. $(0,0) \in \partial U_1$
2. $V(x,y) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
3. $\dot{V}(\underline{x}) > 0$, ha $(x,y) \in U \cap U_1$
4. $V(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in U \cap \partial U_1$

A Csetajev-tétel miatt az origó instabilis egyensúlyi helyzet. ■

2.123. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}.y^2$. $\dot{V}(\underline{x}) = -x^2(1 - \frac{3}{2}y) - y^2(1 - x)$. Látható, hogy ha $x < 1$ és $y < \frac{2}{3}$, akkor $\dot{V}(\underline{x}) < 0$. Az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. Az origó vonzási halmaza az $U = \left\{(x,y) : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 < \frac{1}{9}\right\}$. ■

2.124. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_{2345}(\pm 1, \pm 1)$. Az origó nyeregpont. A pályák szimmetrikusak az origóra. $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + \frac{1}{2}y^2 - \ln y$. $(L_{\underline{f}}V)(x,y) = 0$. A $V(x,y)$ a pozitív síknegyedben konvex, ezért a pályagörbék itt zárt görbék és a pályagörbék megkerülik a P_2 pontot. Az (1,1) pont stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. A P_{2345} pontokban a rendszernek centruma van. Az x-tengely stabilis, az y-tengely instabilis altér. ■

2.125. Megoldás: (Feladat) Csomópont esetén a pályák az origóban egy adott egyenest érintenek, ezért $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0$, illetve $\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t)| < \infty$, aszerint, hogy az origó stabilis vagy instabilis. Fókuszpont esetén a pályák az origót végtelen sokszor megkerülik, így $\lim_{t\to\pm\infty} r(t) = 0$ és $\lim_{t\to\pm\infty} |\varphi(t)| = \infty$, aszerint, hogy az origó stabilis vagy instabilis. Nyeregpont esetén a stabilis és instabilis alterek lesznek az állításban szereplő pályák. Az ezektől különböző többi pálya pedig $t \to +\infty$ esetén és $t \to -\infty$ esetén elhagyja az origó tetszőleges környezetét. Centrum pont esetén létezik periodikus pálya. ■

2.126. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. P_1 stabilis csomópont, P_2 nyeregpont. $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. A V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -2\{x^2(1-y) + y^2(1-x)\}$. Ha $1 - x > 0$ és $1 - y > 0$, akkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) < 0$. Az origó vonzási halmaza: $U = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$. A pályák egyenlete $x - \ln|x| - y + \ln|y| = C$. A P_2 nyeregpont lokális instabilis sokasága az $y = x$ egyenes és a lokális stabilis sokasága $x - \ln|x| - y + \ln|y| = 0$. Az origó globális stabilis sokasága a $T = \{(x,y): x = 0, y = 0, x - \ln|x| - y + \ln|y| < 0\}$ ■

2.127. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$. V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -2(x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz)$. Az origó egy vonzási halmaza az a környezete az origónak, amelyre $\mathrm{V}(x,y,z) \le K$ és $\dot{\mathrm{V}}(x,y,z)$ negatív definit. Az origó egy vonzási halmaza az $U = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$. ■

2.128. I. Megoldás: (Feladat) Legyen ez $\mathrm{V}(x,y) := \alpha\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$. A V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -\beta y^2$. $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) \le 0$. Az origó stabilis. Legyen $S = \{(x,y): \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$. A triviális megoldáson kívül nincs más teljes pálya az S-ben, így a Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

II. Megoldás:

Legyen $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + \frac{2}{\beta}xy + \frac{(\alpha+1)}{\beta^2}y^2 + \frac{\alpha+1}{2\beta^2}x^4$. A V pozitív definit. $\dot{\mathrm{V}}(x,y) = -\frac{2}{\beta}\alpha x^4 - \frac{2}{\beta}\alpha y^2 < 0$, ha $(x,y) \ne (0,0)$. A V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.129. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(-4,4)$. A P_2 nyeregpont. Az invariáns pálya megkonstruálható: $y(x) = x - 4$. Tekintsük az $A(x,y) := (x + y, x - y)$ lineáris transzformációt. Jelölje $u = x + y, v = x - y$. Ekkor a transzformált rendszer: $\dot{u} = 4v + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = f(u,v)$ $\dot{v} = u(v - 4) = g(u,v)$. Ez utóbbi rendszer pályái szimmetrikusak az idő megfordításával a v tengelyre és az origó ez utóbbi rendszernek is egyensúlyi helyzete. Az origó az (u,v) síkon centrum. Az eredeti rendszer esetén is centrum az origó. ■

<u>Megjegyzés</u>: Megmutatható, hogy a $\mathrm{V}(x,y) = \frac{xy+16}{x-y-4} - 4\ln|x - y - 4|$ a rendszer első integrálja. Így a nyeregponton áthaladó homoklinikus pálya: $\frac{xy+16}{x-y-4} - 4\ln|x - y - 4| = -4\ln 12$. ⊡

2.130. Megoldás: (Feladat) Legyen például $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x^3$. Az origó centrum. Viszont az origóban linearizált rendszer instabilis. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$ ■

2.131. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + y^2$. A V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -2x^2y^2(1 + x^2) \le 0$. Az origó stabilis egyensúlyi helyzet. $S := \{(x,y): \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$ A triviális megoldáson kívül nincs más teljes pálya az S-ben, így a Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis, sőt globálisan aszimptotikusan stabilis is. ■

2.132. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet elfajult stabilis csomópont. A Kraszovszkij-módszert fogjuk alkalmazni. $\underline{f}'(x,y) =: \underline{\underline{A}}(x,y)$ deriválttenzor mátrixára teljesül, hogy $\underline{\underline{A}}(x,y) + \underline{\underline{A}}^T(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ negatív definit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. $\mathrm{V}(x,y) := \underline{f}^T(x,y) \cdot \underline{f}(x,y)$ a rendszer egy Ljapunov-függvénye lesz. Egy Ljapunov-függvény: $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + (x - y)^2$. ■

2.133. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az $\dot{x} = f_1(x,y)$, $\dot{y} = f_2(x,y)$ (*) Hamilton-rendszert. Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egyensúlyi helyzet. Ekkor $\det \underline{\underline{J}} = \det H''(x,y)$. Tekintsük a (*) rendszer linearizáltját: $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}(x_0,y_0)\underline{x}$. (**) Tegyük fel, hogy $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. A karakterisztikus polinom: $(\partial_1 f_1 - \lambda)(\partial_2 f_2 - \lambda) - (\partial_1 f_2)(\partial_2 f_1) = 0$. Ebből következően: $\lambda^2 + \det \underline{\underline{J}}(x_0,y_0) = 0$, $\det H''(x_0,y_0) > 0$. Ha az origó a (**) centruma, akkor az (x_0,y_0) a (*) rendszer centruma. ■

2.134. I. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis. ■

2.134. II. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := x^4 + x^2 + y^2$. $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -4(x^3 - y)^2 - 2x^4 \leq 0$, azaz az origó stabilis. Legyen $S = \{(x,y): \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$ A triviális megoldáson kívül nincs más teljes pálya az S-ben, így a Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. Mivel a V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis . ■

2.135. I. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x) = \frac{1}{2}x^2$. Az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.135. II. Megoldás: (Feladat) Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. Ha $x > 0$, akkor $\dot{x} < 0$, így a megoldások szigorú monoton csökkenőek és ha $x < 0$, akkor $\dot{x} > 0$, így a megoldások szigorú monoton nőnek.A fentiekből következően az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.136. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet elfajult stabilis csomópont. A Kraszovszkij-módszert fogjuk alkalmazni. Az $\underline{f}'(x,y) =: \underline{\underline{A}}(x,y)$ deriválttenzor mátrixára teljesül, hogy $\underline{\underline{A}}(x,y) + \underline{\underline{A}}^T(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 10y^4 \end{pmatrix}$ negatív definit minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. Egy Ljapunov-függvény: $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + (x - y - y^5)^2$. V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.137. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$ (*) rendszert és tegyük fel, hogy $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T$negatív definit, azaz $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T < 0$. Legyen $\mathrm{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{x}$. Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T) \cdot \underline{x} < 0$, azaz az origó a (*) aszimptotikusan stabilis. Így az $\underline{\underline{A}}$ összes sajátértékének a valós része negatív. ■

2.138. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + \frac{1}{2}y^2$. A V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -(2x^2 - y^4)^2 \leq 0$, azaz az origó stabilis. $S := \{(x,y): \dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = 0\}$ A triviális megoldáson kívül nincs más teljes pálya az S-ben. így a Barbasin-Kraszovszkij-tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis is. V radiálisan nem korlátos, ezért az origó globálisan aszimptotikusan stabilis. ■

2.139. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + y^2$. V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = -2x^2y^2(x^2 + 2y^2)) \leq 0$, azaz az origó stabilis. A rendszer pályái az origóra szimmetrikusak. A pályák egyenlete: $y(x) = Cx^2$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $(\varepsilon, 0)$ egyensúlyi helyzet, így az origó nem lehet lokálisan vonzó. ■

2.140. Megoldás: (Feladat) $\dot{x} = x\frac{3x^2y^2-1}{x^2y^2+1}$, $\dot{y} = -y$. Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. $\mathrm{V}(x,y) := \frac{x^2}{x^2+1} + y^2$. V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(\underline{x}) = \frac{-2}{(x^2+1)(x^2y^2+1)}\left(x^2(1 - x^2y^2)^2 + y^2\left(1 + 2x^2\right)(1 + x^2y^2)\right) < 0$, az origó aszimptotikusan stabilis. Az $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ hiperbola a pályákat szétválasztó szeparátrix. Bármely kezdeti állapot, amely a hiperbola fölött kezdődik, nem tud konvergálni az origóhoz. ■

2.141. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet a $P_1(0, \frac{1}{a})$. $\mathrm{V}(x) := \frac{1}{2}x^2$. V pozitív definit és $\dot{\mathrm{V}}(x) = -(y(0)e^{-a\omega t} + \frac{1}{a})x^2$. Minden $y(0)$ esetén $\lim_{t\to\infty} y(0)e^{-a\omega t} = 0$, nagy t-re $\dot{\mathrm{V}}(x) \leq -\frac{1}{a}x^2 < 0$, ha $x \neq 0$. A $P_1(0, \frac{1}{a})$ globálisan stabilis egyensúlyi helyzet.

2.142. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. $\mathrm{V}(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + g(y)$, ahol g „alkalmas” differenciálható függvény. $\dot{\mathrm{V}}(x,y) = xy + g'(y)\frac{-x}{1+y^2}$. Legyen $g'(y) = y(1+y^2)$. $g(y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1+y^2)^2$. V első integrál és az origó stabilis. Az origó centrum. ■

3. Fejezet-Megoldások

3.1. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = 3x^2 + 1 + 3y^2 \geq 1 > 0$. Nincs periodikus megoldás. ■

3.2. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = -1 - x^2 - x^4 \leq -1 < 0$. Nincs periodikus megoldás. ■

3.3. Megoldás: (Feladat) Nincs egyensúlyi helyzet, így nincs periodikus megoldás sem a 3.12. Állítás értelmében. ■

3.4. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$. Nincs periodikus megoldás. ■

3.5. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = -y^2 - e^x < 0$. Nincs periodikus megoldás. ■

3.6. Megoldás: (Feladat) rot $\underline{f}(x,y) = (1+2x)\underline{i} - (1+2x)\underline{i} = \underline{0}$, ezért a 3.15. Állítás miatt a rendszernek nincs periodikus megoldása. ■

3.7. Megoldás: (Feladat) Nincs egyensúlyi helyzet, így nem lehet periodikus megoldás sem a 3.12. Állítás értelmében. ■

3.8. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = 2x + 2y$, ezért ez a $D_1 = \{(x,y): x + y > 0\}$ és a $D_1 = \{(x,y): x + y < 0\}$ tartományon állandó előjelű. Nincs periodikus megoldás. ■

3.9. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. A $D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.10. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.11. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi ponok: $P_1(1,1)$ és $P_2(1,-1)$. Az $x = 1$ egyenes is pályát alkot. Nincs zárt pálya, amely megkerüli az egyik vagy mindkettő egyensúlyi helyzetet. ■

3.12. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^4 + y^4$. $D = \left\{(x,y): \frac{1}{4} \leq x^4 + y^4 \leq 1\right\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.13. Megoldás: (Feladat) $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ $(x,y) \in D$ esetén div $\underline{f}(x,y) < 0$, így a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldása. ■

3.14. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = 2 + 2x^2 + 2y^2$. Nincs periodikus megoldás. ■

3.15. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.16. Megoldás: (Feladat) div $\underline{f}(x,y) = 1 + 6x^2 + 2 + x^2 = 3 + 7x^2 > 0$. A 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldása. ■

3.17. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi pontok: $P_1(2,4)$ és $P_2(2,-4)$. Az $x = 2$ egyenes is pályát alkot. Nincs zárt pálya, amely megkerüli az egyik vagy mindkettő egyensúlyi helyzetet. ■

3.18. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.19. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $D = \{(x,y): \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.20. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y) = x(x^2 - xy + y^2)$. Az $x^2 - xy + y^2$ kifejezés értéke minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén pozitív, a 3.7 Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.21. Megoldás:$(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re div $\underline{f}(x,y) = -a - 3aby^2 < 0$. Nincs periodikus megoldás. ■

3.22. Megoldás: (Feladat) Ha az $\underline{x}^*(t)$ Ljapunov-értelemben stabilis, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|\underline{x}^*(0) - \underline{x}(0)| < \delta$ esetén $|\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$-ra, ahol $\underline{x}(t)$ egy környezetből induló megoldás. Tekintsük az $\underline{x}(0) = \underline{a}$ és $\underline{x}^*(0) = \underline{a}^*$-ból induló a fázistérben lévő H, illetve H^* félgörbéket. Ekkor $|\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)| \leq \max\limits_{\underline{x} \in H} d(\underline{x}, H^*) < \varepsilon$. A következő rendszer Poincaré-stabilis, de nem Ljapunov-stabilis. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$. ■

3.23. Megoldás: (Feladat) $x(t) = t + x(0)$, $y(t) = y(0)$. A rendszer minden megoldása nyilvánvalóan Poincaré-stabilis. A megoldások Ljapunov-stabilisak is. ■

3.24. Megoldás: (Feladat) A pályagörbék $y = Cx$ egyenletű, origón átmenő egyenesek a megfelelő irányítással. Egyetlen megoldás sem lehet Poincaré-stabilis.■

3.25. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r\sin r$ és $\dot{\varphi} = 1$. Az $r = (2n+1)\pi$ $(n \in N)$ körök mindegyike stabilis határciklus, így Poincaré-féle értelemben (orbitálisan) stabilisak. $r = 2n\pi$ $(n \in N)$ körök mindegyike instabilis határciklus. Ezek a pályák Poincaré-féle értelemben (orbitálisan) instabilisak. ■

3.26. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi pontok: $P_1(0,0)$ és $P_2(0,1)$. A pályák egyenlete: $y(x) = e^{Cx}$. Ha $C < 0$, akkor a pályák Poincaré értelemben stabilisak és ha $C > 0$, akkor a pályák Poincaré értelemben instabilisak. ■

3.27. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi pont az origó. A 3.9. Definíció szerint eljárva, tekintsük a $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j}$, $t \in [0,2\pi]$ az origót megkerülő görbét. Ezek szerint $f_1(\gamma(t)) = \sin 2t$ és $f_2(\gamma(t)) = \cos 2t$. Így ind $\gamma = -2$.■

3.28. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi pont az origó nyeregpont. Így az egyensúlyi helyzet indexe -1. Természetesen ez definíció szerint is kiszámolható. ■

3.29. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó centrum. Az index 1. ■

3.30. Megoldás: (Feladat) Nincs egyensúlyi helyzet, ezért tetszőleges görbe indexe 0. ■

3.31. Megoldás: (Feladat) A origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Vegyünk egy tetszőleges zárt, origót megkerülő görbét. Legyen ez az $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$ ellipszis. Paraméterezzük az ellipszist a következőképpen: $f_1(x,y)=ax+by=\cos t$ és $f_2(x,y)=cx+dy=\sin t$ $(0\le t<2\pi)$ Ekkor $x=\frac{d\cos t-b\sin t}{ad-bc}$, illetve $y=\frac{-c\cos t+a\sin t}{ad-bc}$. Az ellipszis irányítása negatív vagy pozitív irányítású, hogy az $ad-bc>0$, illetve $ad-bc<0$. Így $\operatorname{ind}\gamma=\operatorname{sign}(ad-bc)$. ■

3.32. Megoldás: (Feladat) Tekintsük a $\gamma(t)=\cos t\underline{i}+\sin t\underline{j}$, $t\in[0,2\pi]$ origót megkerülő görbét. Ezek szerint $f_1(\gamma(t))=2\cos^2 t-1=\cos 2t$ és $f_2(\gamma(t))=\sin 2t$. Így $\operatorname{ind}\gamma=2$. ■

3.33. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A pályagörbék $y^4-x^4=C$ alakúak. $\mathrm{V}(x,y):=xy$. Ekkor $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})(x,y)=x^4+y^4$. Alkalmazva a 2.15 tételt, az origó nyeregpont. Az egyensúlyi helyzet indexe -1. ■

3.34. Megoldás: (Feladat) Mivel a körüljárási szám topológiailag invariáns, ezért a megoldás közvetlen következménye a 3.31. feladatnak. ■

3.35. Megoldás: (Feladat) Mivel a körüljárási szám topológiailag invariáns, ezért a megoldás közvetlen következménye a 3.31. feladatnak. ■

3.36. Megoldás: (Feladat) Mivel a körüljárási szám topológiailag invariáns, ezért a megoldás közvetlen következménye a 3.31. feladatnak. ■

3.37. Megoldás: (Feladat) Van olyan zárt görbe, amelynek a rendszerre tekintett indexe különbözik a 0-tól. Ekkor a 3.14. Állítás miatt kell lennie egyensúlyi pontjnak.

3.38. Megoldás: (Feladat) Egyenes következménye a 3.12. Állításnak ■

3.39. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$. $(L_{\underline{f}}\mathrm{V})(x,y)=-y^2(x^2+2y^2-1)$
$D=\{(x,y):\frac{1}{4}\le x^2+y^2\le 4\}$. kompakt pozitívan invariáns halmaz. Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. ■

3.40. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\mathrm{V}(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$.
$D=\{(x,y):\frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 2\}$ kompakt pozitívan invariáns halmaz. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt létezik D-ben haladó periodikus pálya. A periodikus megoldás az $r=1$ körvonal, $\dot r=r(1-r^2)$ és $\dot\varphi=1$. ■

3.41. Megoldás: (Feladat) $\dot r=r\sin^2\varphi(1-3r^2\cos^2\varphi-2r^2\sin^2\varphi)$ és
$\dot\varphi=1-\frac{1}{2}\sin 2\,\varphi\left(1-3r^2\cos^2\varphi-2r^2\sin^2\varphi\right)$. $T=\{(r,\varphi):\frac{1}{2}\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ pozitívan invariáns és nem tartalmazza a rendszer (egyetlen) egyensúlyi helyzetét, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Így létezik T-ben haladó periodikus pálya.■

3.42. Megoldás: (Feladat) $\dot r=r(1-r^3(\cos^4\varphi+5\sin^2\varphi\cos^2\varphi+2\sin^4\varphi))$ és
$\dot\varphi=-1-2r^2\cos^3\varphi\sin\varphi$. $T=\{(r,\varphi):\frac{1}{4}\le r\le 1\}$ pozitív invariáns és nem tartalmazza a rendszer egyensúlyi helyzetét, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Létezik T-ben haladó periodikus pálya, $3x^2+4y^2=1$. ■

3.43. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Ha $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor a pályák egyenlete: $Cx^2 - y^2 = \frac{1}{2}(1 + C)$ hiperbolák, (alkalmas C-re) Ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor a pályák egyenlete: $Cx^2 + y^2 = \frac{1}{2}(C - 1)$ origót megkerülő ellipszisek. (alkalmas C-re). Így az $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ sávban van periodikus megoldás, sőt mindegyik megoldás ilyen. A nyílt és zárt pályák szétválasztója az $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ egyenes. A pályák irányítása jól látható.■

3.44. Megoldás: (Feladat) A fázistérben a pályák egyenlete: $e^{-x^2}(x^2 + y^2 - 1) = C$. Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényt: $\mathrm{V}(x, y) = e^{-x^2}(x^2 + y^2 - 1)$. A V függvénynek a $(0, 0)$ pontban lokális minimuma van és lokálisan konvex, ezért ezen környezetben a pályagörbék zárt görbék és a pályagörbék megkerülik a $(0, 0)$ pontot. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. ■

3.45. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A pályagörbék egyenlete a fázissíkon: $\frac{y^2}{2} + G(x) = C$, ahol $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Így két pálya létezik:

$y(x) = \sqrt{2}\sqrt{(C - G(x))}$, ha $G(x) < C$, (i) illetve $y(x) = -\sqrt{2}\sqrt{(C - G(x))}$, ha $G(x) < C$. (ii)

A feltételek miatt a $G(x) \to \infty$, ha $x \to \pm\infty$. G folytonos és $G(0) = 0$. Tetszőleges $C > 0$ esetén pontosan két x érték van, amelyre $G(x) = C$, egy pozitív és egy negatív. Tekintsük a (i) megoldásokat. Ekkor ezen két pontban az $y(x) = 0$. Ezen két pont között $y(x) > 0$ és a pálya két pont közötti darabját az x-tengely merőlegesen metszi. Mivel a (ii) az (i)-nek az x-tengelyre való tükrözésével keletkezik, ezért, az origó centrum. ■

3.46. Megoldás: (Feladat) $T = \{(r, \varphi): \frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$ pozitívan invariáns és nem tartalmazza a rendszer egyensúlyi helyzetét, az origót, így teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Így létezik T-ben haladó periodikus pálya. ■

3.47. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0, 0)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(0, -1)$ $P_4(\sqrt[4]{2}, 0)$ $P_4(-\sqrt[4]{2}, 0)$. Az $x = 0$ és az $y = 0$ egyenesek pályák. Ha a rendszernek lenne periodikus megoldása, akkor ebben lenne egyensúlyi helyzet, viszont a rendszer összes egyensúlyi helyzete a tengelyeken van és autonóm rendszer lévén a pályák nem metszik egymást.■

3.48. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\dot{r} = r\cos r^2$ és $\dot{\varphi} = 1$.
A rendszer határciklusai: $r = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ $k \in \mathbb{N}$. Ha k páros, akkor ez stabilis, ha k páratlan, akkor instabilis határciklus. Így végtelen sok periodikus megoldás van. ■

3.49. Megoldás: (Feladat) A Bendixon-kritérium alapján, ha $a + b \neq 0$, akkor nem létezhet zárt pálya. Vizsgáljuk meg az $a + b = 0$ esetet. Írjuk fel a lineáris rendszer karakterisztikus függvényét: $\lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - bc) = 0$. Így $\lambda^2 + (ad - bc) = 0$. Ha $ad - bc < 0$, akkor rendszernek nyeregpontja van és ha $ad - bc > 0$, akkor centruma az origóban. Ez utóbbi esetben lehetséges zárt trajektória. Így létezik zárt trajektóriája pontosan akkor, ha $a + b = 0$ és $ad - bc > 0$.■

3.50. Megoldás: (Feladat) Tegyük fel, hogy létezik $x(t)$ periodikus megoldása $T > 0$ periódussal. Az egyenletet szorozva $\dot{x}$-tal és integrálva 0-tól T-ig:
$0 = \int_0^T \ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)dt + \int_0^T \big(\dot{x}(t)\big)^2 dt + \varepsilon \int_0^T \big(\dot{x}(t)\big)^4 dt + \int_0^T \dot{x}(t)\sin x(t)dt$. Mivel $\int_0^T \ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)dt = 0$ és $\int_0^T \dot{x}(t)\sin x(t)dt = 0$, ezért $0 = \int_0^T \big(\big(\dot{x}(t)\big)^2(1 + \varepsilon\big(\dot{x}(t)\big)^2\big)dt$. Így $\dot{x}(t) = 0 \to x(t) = C$. ■

3.51. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r\sin^2\varphi(9 - r^2(1 + \sin^2\varphi))$. $T = \{(r,\varphi): \frac{3}{\sqrt{2}} \le r \le 3\}$ pozitívan invariáns halmaz, teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei. Létezik a rendszernek T-ben haladó periodikus pályája. Ez stabilis határciklus. ■

3.52. Megoldás: (Feladat) Tekintsük az következő rendszert: $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = y^2$ és $\gamma(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j}$, $t \in [0,2\pi]$ az origót megkerülő görbe. Ezek szerint $f_1(\gamma(t)) = \cos^2 t$ és $f_2(\gamma(t)) = \sin^2 t$. $\operatorname{ind}\gamma = 0$. (Az origó instabilis egyensúlyi helyzet.) ■

3.53. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r^2 \sin\frac{1}{r}$ $r > 0$-ra és $\dot{r}(0) = 0$, valamint $\dot{\varphi} = 1$. $\dot{r} = 0 \leftrightarrow r = \frac{1}{n\pi}$, azaz az $r = \frac{1}{n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ körök a rendszer pályái. Ha $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi$ esetén $\dot{r} < 0$, ha n páratlan és $\dot{r} > 0$, ha n páros. A pályák az $r = \frac{1}{n\pi}$ körsorok és ezen körök közötti növekedő vagy csökkenő spirális alakzatok. Az origó ún. *centrum-fókusz*. (Az *origó centrum-fókusz*, ha létezik a rendszernek $\{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ zárt egymásba skatulyázott pályája, hogy $\Gamma_n \to 0$, ha $n \to \infty$ úgy, hogy Γ_n és Γ_{n+1} között minden trajektória tart Γ_n vagy Γ_{n+1}-hez, ha $t \to \pm\infty$. ■

3.54. Megoldás: (Feladat) Tekintsük a rendszer $\underline{\varphi}(t) = (r(t), \Theta(t))$ azon megoldását, amelyre $r(t_0) = 1$, $\Theta(t_0) = \Theta_0$. A kezdeti érték probléma megoldása $r(t) = 1$ és $\Theta(t) = t + \Theta_0 - t_0$.
Vegyük a rendszer azon $\underline{\tilde{\varphi}}(t) = (\tilde{r}(t), \tilde{\Theta}(t))$ megoldását, amelyre $\tilde{r}(t_0) = \tilde{r}_0$, $\tilde{\Theta}(t_0) = \tilde{\Theta}_0$ és $\tilde{r}_0 \ne 1$.
A kezdeti érték probléma megoldása: $\tilde{r}(t) = (\tilde{r}_0 - 1)e^{t_0 - t} + 1$ és $\tilde{\Theta}(t) = (\tilde{\Theta}_0 - t_0)e^{t_0 - t} + t$.
Ekkor $|\underline{\varphi}(t) - \underline{\tilde{\varphi}}(t)| = \left(1 + \left((\tilde{r}_0 - 1)e^{t_0 - t} + 1\right)^2 - 2\left((\tilde{r}_0 - 1)e^{t_0 - t} + 1\right)\cos\left(\Theta(t) - \tilde{\Theta}(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$,
ami nagy t-re a folytonosság miatt: $|\underline{\varphi}(t) - \underline{\tilde{\varphi}}(t)| \sim (4 - 2\cos(\Theta_0 - t_0))^{\frac{1}{2}}$. A $\underline{\varphi}(t)$ nem lehet Ljapunov-stabilis. A $\underline{\varphi}(t)$ Poincaré-stabilis, sőt Poincaré-aszimptotikusan is stabilis. ■

3.55. Megoldás: (Feladat) A pályák egyenlete: $y(x) = \frac{C}{1+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Tekintsük az $y(x) = 0$ pályát. Az $y(x) = 0$ görbe Poincaré-stabilis, sőt aszimptotikus Poincaré stabilis is. ■

3.56. Megoldás: (Feladat) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re $\operatorname{div} \underline{f}(x,y) = -3x^2$. $\operatorname{div} \underline{f}(x,y) = 0$ csak az $\{(x,y): x = 0\}$-n, azaz az y-tengelyen teljesül és ez nullmértékű $\mathbb{R}^2$-ben. Mivel ezen kívül negatív, ezért a 3.6. Állítás miatt nincs periodikus megoldás. ■

3.57. Megoldás: (Feladat) $r = 2$-re $\dot{r} - 6 + \cos\varphi \le -5 < 0$, és $r = \frac{1}{2}$-re $\dot{r} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos\varphi > \frac{1}{4} > 0$
Az $r = 2$ körön a pályák közelednek, az $r = \frac{1}{2}$ körön távolodnak a rendszer egyensúlyi helyzetétől, az origótól, így kell lennie a két kör között periodikus pályának. ■
<u>Megjegyzés</u>: A megoldásban adott Bendixson-zsák élesíthető. Mivel $\cos\varphi \ge -1$, ezért $\dot{r} \ge r(1/2 - r^2)$. Így, ha $r < \sqrt{1/2}$, akkor $\dot{r} > 0$. Mivel $\cos\varphi \le 1$, ezért $\dot{r} \le r(3/2 - r^2)$. Így, ha $r > \sqrt{3/2}$, akkor $\dot{r} < 0$. Így a $T := \{r: \sqrt{1/2} \le r \le \sqrt{3/2}\}$ is egy Bendixson-zsák. ⊡

3.58. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = 2.5r - r^3 + 1.5r\cos 2\varphi$, $\dot{\varphi} = -2r - 3r\cos\varphi\sin\varphi$
Mivel $\cos 2\varphi \ge -1$, ezért $\dot{r} \ge r(1 - r^2)$. Következésképpen, ha $r < 1$, akkor $\dot{r} > 0$.
Mivel $\cos 2\varphi \le 1$, ezért $\dot{r} \le r(4 - r^2)$. Következésképpen, ha $r > 2$, akkor $\dot{r} < 0$.
A $T := \{r: 1 \le r \le 2\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a rendszernek létezik T-ben fekvő periodikus pályája. ■

3.59. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r - 2r^2 + r^2\cos\varphi$ és $\dot{\varphi} = 1$.
Mivel $\cos 2\varphi \ge -1$, ezért $\dot{r} \ge r(1 - 3r)$. Következésképpen, ha $r < 1/3$, akkor $\dot{r} > 0$.

Mivel $\cos 2\varphi \leq 1$, ezért $\dot{r} \leq r(1-r)$. Következésképpen, ha $r > 1$, akkor $\dot{r} < 0$.
A $T := \{r: 1/3 \leq r \leq 1\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a rendszernek létezik T-ben fekvő periodikus pályája. ■

<u>Megjegyzés</u>: Meg tudjuk oldani az $\dot{r} = r + r^2(-2 + \cos\varphi), \dot{\varphi} = 1$ rendszert, lévén ez egy Bernoulli-típusú differenciálegyenlet. Ezt megoldva, kapjuk $r(t) = \frac{2}{4-\cos(t+\varphi_0)-\sin(t+\varphi_0)+2Ce^{-t}}$, $\varphi(t) = t + \varphi_0$.
Nagy t-re $r(t) \sim \frac{2}{4-\cos(t+\varphi_0)-\sin(t+\varphi_0)}$. Ekkor nagy t-re $r(t+2\pi) = r(t)$ és kiszámolható, hogy $x(t) \sim \frac{2\cos(t+\varphi_0)}{4-\cos(t+\varphi_0)-\sin(t+\varphi_0)}$, $y(t) \sim \frac{2\sin(t+\varphi_0)}{4-\cos(t+\varphi_0)-\sin(t+\varphi_0)}$. A fenti paraméteres rendszerből kiküszöbölhető a t: $x = \frac{2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{4-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$. Így a határciklus egyenlete: $15(x^2+y^2) - 2xy - 4(x+y) = 4$. ■

3.60. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Tekintsük az alábbi halmazokat: $R_c := \{(x,y): f(x,y) = 0$, $R_I := \{(x,y): f(x,y) > 0, R_E := \{(x,y): f(x,y) < 0\}$.
$\dot{r} = -rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ és $\dot{\varphi} = -g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Világos, hogy R_I-n $\dot{r} < 0$ és R_E-n $\dot{r} > 0$.
A $T := \{(x,y): -\varepsilon \leq f(x,y) \leq \varepsilon,\ \varepsilon > 0, \varepsilon \ll 1\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a rendszernek létezik T-ben fekvő periodikus pályája. ■

3.61. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r - r^3(1 + 0.5\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)$ és $\dot{\varphi} = 1$.
Az $f(\varphi) = 1 + 0.5\sin^2\varphi - \sin^4\varphi$ π periodikus függvény esetén $\max f(\varphi) = \frac{17}{16}$ és $\min f(\varphi) = \frac{1}{2}$.
Így $\frac{1}{2} \leq 1 + 0.5\sin^2\varphi - \sin^4\varphi \leq \frac{17}{16}$. (*)
(*) miatt $\dot{r} \leq r(1 - \frac{1}{2}r^2)$, így ha $r > \sqrt{2}$, akkor $\dot{r} < 0$.
(*) miatt $\dot{r} \geq r(1 - \frac{17}{16}r^2)$, így ha $r < \frac{4}{\sqrt{17}}$, akkor $\dot{r} > 0$.
A $T := \{r: \frac{4}{\sqrt{17}} \leq r \leq \sqrt{2}\}$ olyan Bendixson-zsák, amely nem tartalmazza a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzetét, az origót. A Poincaré-Bendixson-tétel miatt a rendszernek létezik T-ben fekvő periodikus pályája. ■

4. Fejezet-Megoldások

4.1. Megoldás: (Feladat) Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. A lokális instabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1): c_0 = 0\}$, a lokális stabilis sokaság a $W_s^{loc} = \left\{(c_0, c_1): c_1 - \frac{2{c_0}^2}{3} = 0\right\}$. ■

4.2. Megoldás: (Feladat) Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. A lokális instabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1): c_0 = 0\}$, a lokális stabilis sokaság a $W_s^{loc} = \left\{(c_0, c_1): c_1 + \frac{{c_0}^3}{4} = 0\right\}$. ■

4.3. Megoldás: (Feladat) Az origó egyetlen egyensúlyi helyzet. A lokális instabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1): c_0 = 0\}$, a lokális stabilis sokaság a $W_s^{loc} = \left\{(c_0, c_1): c_1 + \frac{{c_0}^4}{9} - \frac{c_0}{3} = 0\right\}$. ■

4.4. Megoldás: (Feladat) Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. A lokális instabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1): c_0 = 0\}$, a lokális stabilis sokaság $y(x) = -\int_0^1 g(xu)du$. .■

4.5. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A lokális instabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1, c_2): c_0 = 0,\ c_1 = 0\}$, a lokális stabilis sokaság a $W_s^{loc} = \{(c_0, c_1, c_2): c_2 + \frac{{c_0}^2}{3} = 0\}$. ■

4.6. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A lokális instabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1, c_2): c_1 - \frac{{c_0}^2}{3} = 0\}$, a lokális stabilis sokaság a $W_s^{loc} = \{(c_0, c_1, c_2): c_0 = 0, c_2 = 0\}$, ■

4.7. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$ és $P_2(1,0)$. A differenciálegyenlet speciális Hamilton-rendszer, ahol $U(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. A trajektóriák egyenlete: $\frac{1}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = C$. A homoklinikus pálya egyenlete: $3y^2 = 3x^2 - 2x^3$ görbe lesz $x > 0$ félsíkon. ■

4.8. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_{23}(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_{45}(\pm 1,0)$ és $P_{67}(\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. P_1 nyeregpont, a P_{2345} centrum, és a P_{67} nyeregpont. A rendszer Hamilton-rendszer: $H(x,y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{2}y^2$. A homoklinikus görbe $-x^4 + 2x^2 + 2y^4 - 2y^2 = 0$, a heteroklinikus pálya $-x^4 + 2x^2 + 2y^4 - 2y^2 = \frac{1}{2}$ alakú. Ez a görbe egy ellipszis és egy hiperbola ugyanis $-x^4 + 2x^2 + 2y^4 - 2y^2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2}y^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}+2))(x^2 - \sqrt{2}y^2 - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$. ■

4.9. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_3(-1,0)$. P_1 nyeregpont, a P_2 és P_3 centrum. $y^2(x) = Ce^{2x} + \frac{1+2x+6x^2+4x^3}{2}$. A homoklinikus pálya egyenlete: $y^2(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1+2x+6x^2+4x^3}{2}$, ha $x > 0$.■

4.10. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, 0)$ és $P_3(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, 0)$. P_1 nyeregpont és mivel a rendszer speciális Hamilton-rendszer, a P_2 és a P_3 centrum. A trajektóriák egyenlete: $y^2 + 2x^6 - x^2 = C$. A homoklinikus pálya egyenlete: $y^2 + 2x^6 - x^2 = 0$. ■

4.11. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(\pm 1, \pm 1)$. A rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$. P_1 centrum és a P_2 nyeregpont. A heteroklinikus pályák: $x = \pm 1$ és $y = \pm 1$ egyenesek $-1 \leq x \leq 1$ és $-1 \leq y \leq 1$ darabjai lesznek. ■

4.12. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P(n\pi, 0)$, ahol n egész szám. A $P_1((2n+1)\pi, 0)$ nyeregpont és mivel a rendszer speciális Hamilton- rendszer, ezért a $P_1(2n\pi, 0)$ centrum. A trajektóriák egyenlete: $\frac{1}{2}y^2 = \cos x + C$. A heteroklinikus pálya egyenlete

$$y(x) = \pm\sqrt{2}\sqrt{1+\cos x}\text{ , ha } (2n-1)\pi \le x \le (2n+1)\pi. \blacksquare$$

4.13. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(1,0)$, $P_2(3,0)$ és $P_3(-4,0)$. A rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = \frac{13}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2x^2 - \frac{1}{4}y^4 - 12x + \frac{13}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$. A P_1és a P_3 centrum, a P_2 nyeregpont. A rendszer homoklinikus pályája a $\frac{13}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2x^2 - \frac{1}{4}y^4 - 12x + \frac{13}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = \frac{9}{4}$ görbe.■

4.14. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_3(-1,0)$. A differenciálegyenlet-rendszer Hamilton-típusú. $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$. A P_1-ben centruma, P_2 és P_3-ban nyeregpontja van a rendszernek. A pályagörbék egyenlete a fázissíkon $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = C$. A heteroklinikus pálya egyenlete $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x^2)$, $|x| \le 1$. ■

4.15. I. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet: $P_1(0,0)$. A rendszer Hamilton-típusú. $\mathrm{V}x,y) = y^2 + e^{-2x} - e^{-x}$. Az origó egy (kis) környezetében a pályagörbék zártak. ■

4.16. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet: $P_1(0,0)$.
A 4.9. Állítás alkalmazzuk, legyen $f(x,y) = \beta(x^2 - y^2 - 1)$ és $g(x) = x^3$. ■

4.17. I. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. $\mathrm{V}(x,y) = y + \ln|y-1| - \frac{1}{2}x^2$ első integrál. A V az origó egy környezetében lokálisan konkáv. Az origó egy környezetében a pályagörbék zártak. ■

4.17. II. Megoldás: (Feladat) A feladat megoldására alkalmazzuk a 4.10. Állítást.
1. $f(x) = -x$ páratlan és $x > 0$-ra negatív
2. $g(x) = \ x$ páratlan és $x > 0$-ra pozitív. ■

4.18. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet a $P_1(n\pi, 0)$.
A feladat megoldására alkalmazzuk a 4.10. Állítást.
1. $f(x) = x$ páratlan és $x > 0$-ra pozitív,
2. $g(x) = \sin x > 0$, ha $0 < x < \pi$, páratlan. ■

4.19. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet a $P_1(0,0)$.
A feladat megoldására alkalmazzuk a 4.10. Állítást.
1. $f(x) = x^n$ páratlan és $x > 0$-ra pozitív,
2. $g(x) = x$ páratlan. ■

4.20. Megoldás: (Feladat) A feladat megoldására a 4.11. Állítást fogjuk felhasználni.
1. $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \beta(t^2-1)dt = \beta(\frac{1}{3}x^3 - x)$ páratlan függvény,
2. $g(x) = x^3$ páratlan függvény és ha $x > 0$, akkor $g(x) > 0$. ■

4.21. Megoldás: (Feladat) A feladat megoldására alkalmazzuk a 4.10. Állítást.
1. $f(x) = k\sin x$ páratlan és a $0 < x < \pi$ intervallumban állandó előjelű (pozitív),
2. $g(x) = \sin x > 0$, ha $0 < x < \pi$, páratlan. ■

4.22. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + y^2$. $(L_f\mathrm{V})\ (x,y) = 2(2x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$.
Ha $x^2 + y^2 < 1$, akkor a pályák az egységkör belsejéből kifelé tartanak és ha $x^2 + y^2 > 1$, akkor a pályák az egységkör külsejéből kifelé tartanak. A $D = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$ stabilis határciklus. ■

4.23. Megoldás: (Feladat) $V(x,y) = x^2 + y^2$. $(L_f\mathrm{V})\ (x,y) = 2(x^2 + 2y^2 - 1)(x^2 + y^2)$.
Ha $x^2 + 2y^2 < 1$, akkor a pályák az $D = \{(x,y): x^2 + 2y^2 = 1\}$ ellipszis belsejéből befelé tartanak, ha $x^2 + 2y^2 > 1$, akkor a pályák az $D = \{(x,y): x^2 + 2y^2 = 1\}$ ellipszis külsejéből kifelé tartanak. A $D = \{(x,y): x^2 + 2y^2 = 1\}$ ellipszis az instabilis határciklus. ■

4.24. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) = x^2 + 2y^2$. $(L_f\mathrm{V})\ (x,y) = 2(x^2 + 4y^2)(1 - x^2 - 4y^2)$.
Ha $x^2 + 4y^2 < 1$, akkor a pályák az $D = \{(x,y): x^2 + 4y^2 = 1\}$ ellipszis belsejéből kifelé tartanak és ha $x^2 + 4y^2 > 1$, akkor a pályák az $D = \{(x,y): x^2 + 4y^2 = 1\}$ ellipszis külsejéből kifelé tartanak. A $D_1 = \left\{(x,y): \frac{1}{2} \le x^2 + 2y^2 \le 1\right\}$ ellipszisgyűrű olyan pozitívan invariáns kompakt halmaz, amely tartalmazza a D ellipszist, ezért a D_1-ben van a rendszernek periodikus megoldása. A $D = \{(x,y): x^2 + 4y^2 = 1\}$ stabilis határciklusa a rendszernek. ■

4.25. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ és $P_4(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
A differenciálegyenlet-rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$. P_2, P_3 és P_4 nyeregpont, a P_1 centrum. A pályagörbék egyenlete a fázissíkon $x^2y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C$.
A heteroklinikus pálya egyenlete: $x^2y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{6}$. A heteroklinikus pályák egy egyenlő szárú háromszög oldalai: $y_1(x) = -\frac{1}{2}, y_2(x) = 1 - \sqrt{3}x$ és $y_3(x) = 1 + \sqrt{3}x$, ha $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

4.26. I. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3$. Az origó nyeregpont. A lokális stabilis sokaság a $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1): c_0 = 0\}$, a lokális instabilis sokaság a $W_s^{loc} = \{(c_0, c_1): c_1 - \frac{{c_0}^2}{3} = 0\}$ ■

4.26. II. Megoldás: (Feladat) Megadjuk azt az instabilis sokaságot. amely az origóban érinti az instabilis alteret, azaz az x-tengelyt. Tegyük fel, hogy ez $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú.
Ezek szerint $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x} = \frac{x^2-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)}{x} = -\frac{a_0}{x} - a_1 + (1 - a_2)x - a_3x^2$.... Másrészt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

$a_0 = a_1 = 0$. $1 - a_2 = 2a_2$, azaz $a_2 = \frac{1}{3}$ és ha $n > 2$, akkor $na_n = -a_n$, azaz $a_n = 0$. Az x-tengelyt érintő instabilis sokaságot leíró függvény: $y(x) = \frac{1}{3}x^2$.■

4.27. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(n\pi, 0)$ $(n \in Z)$. Ha $|k| < 2$, $k \ne 0$, akkor a gyökök tiszta képzetesek és a valós részük $(-\frac{k}{2})$ negatív. Az origó aszimptotikusan stabilis fókusz. Ha $k \ge 2$, akkor az origó aszimptotikusan stabilis csomópont. $k = 0$ esetén az origó centrum. ■

4.28. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$. P_1 és a P_2 pontban nyeregpont van. A differenciálegyenlet-rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = xy^2 - x$. A heteroklinikus pálya az $x = 0$ görbe $-1 \le y \le 1$ szakasza. ■

4.29. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = kr - r^3$ és $\dot{\varphi} = 1$. Ha $k < 0$, akkor stabilis fókuszpontja van a rendszernek. Ha $k > 0$, akkor létezik egy $r = \sqrt{k}$ sugarú kör stabilis határciklus. $k = 0$ esetén ún. *szuperkritikus Andronov-Hopf bifurkáció* van az origóban. ■

4.30. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = kr + r^3$ és $\dot{\varphi} = 1$.
Ha $k < 0$, akkor origó stabilis fókuszpont és létezik egy $r = \sqrt{-k}$ sugarú kör instabilis határciklus.
Ha $k > 0$, akkor $\dot{r} > 0$ miatt az origó instabilis fókuszpont és nincs határciklus.
$k = 0$ paraméter esetén ún. *szuperkritikus Andronov-Hopf bifurkáció* van az origóban. ■

4.31. Megoldás: (Feladat) Két határciklusa létezik, ha $0 < k < 1$. $r = 1 \pm \sqrt{k}$. Az $r = 1 \pm \sqrt{k}$ köröknél a belső instabilis, míg a külső kör stabilis határciklus pozitív irányítással. ($k = 1$ esetén eltűnik a kisebbik periodikus pálya.) Ez a két határciklus $k = 0$ esetben egyetlen határciklusra vált, az $r = 1$ körre. $k < 0$ esetben nincs periodikus pálya. Ez esetben az origó stabilis fókuszpont. ■

4.32. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$. $x_1 < x_2$

1. eset: $0 < k < \frac{1}{4}$. Az x_1 instabilis, míg az x_2 aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

2. eset. $k = \frac{1}{4}$. Az $x = \frac{1}{2}$ egyensúlyi helyzet instabilis.

3. eset: $k > \frac{1}{4}$. Nincs egyensúlyi helyzet. Látható, hogy ez esetben a megoldások monoton csökkenő módon tartanak az azonosan nulla függvényhez. A $k = \frac{1}{4}$ a rendszer bifurkációs pontja. ■

4.33. Megoldás: (Feladat) A pályagörbék egyenlete: $y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$. A centrális sokaság $W_c^{loc}(0,0) = \left\{(x,y): y = \begin{bmatrix} Ce^{\frac{1}{x}}, \text{ha } x < 0 \\ 0, \quad \text{ha } x \geq 0 \end{bmatrix}\right\}$ tetszőleges C-re. A lokális stabilis sokaság: $W_s^{loc}(0,0) = \{(c_1, c_2): c_1 = 0\}$, ún. *globális stabilis sokaság* $W_s(0,0) = \{(x,y): x \leq 0\}$ félsík és a rendszer ún. *globális instabilis sokasága* $W_u(0,0) = \{(x,0): x > 0\}$ félegyenes. ■

4.34. Megoldás: (Feladat) Az origó a rendszer kritikus pontja, $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1$ sajátértékkel. Keressük a centrális sokaságot meghatározó függvény közelítését a $y(x) = h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots +$ alakban. Az invariancia miatt: $y(t) = h(x(t))$. Így $\dot{y}(t) = h'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$. A $h(x)$ függvényre kapjuk: $h(x) + x^2 = h'(x)(x^2 - h^2(x))$, azaz a centrális sokaság harmadrendű approximácója: $h(x) = -x^2 - 2x^3$. Tovább approximálva: $h(x) = -x^2 - 2x^3 - 6x^4 - 22x^5 - 96x^6 + O(x^7)$. Az invariancia miatt: $x(t) = g(y(t))$. Így $\dot{x}(t) = g'(y(t)) \cdot \dot{y}(t)$. Az instabilis sokaság negyedrendű approximációja: $x = g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}y^4$. Tovább approximálva: $x = g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{20}y^5 - \frac{1}{96}y^6 + O(y^7)$. ■

4.35. Megoldás: (Feladat) A pályagörbék egyenlete $y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$. A centrális sokaság $W_c^{loc}(0,0) = \left\{(x,y): y = \begin{bmatrix} Ce^{-\frac{1}{x}}, \text{ha } x > 0 \\ 0 \quad , \text{ha } x \leq 0 \end{bmatrix}\right\}$ tetszőleges C-re. Mivel a differenciálegyenlet-rendszert külön-külön meg tudjuk oldani, ezért kapjuk $x(t) = \frac{c_1}{1-tc_1}$ és $y(t) = c_2e^t$. A rendszer lokális instabilis sokasága $W_s^{loc}(0,0) = \{(c_1, c_2): c_1 = 0\}$, A rendszer ún. *globális stabilis sokasága* $W_s(0,0) = \{(x,0): x < 0\}$. A rendszer ún. *globális instabilis sokasága* $W_u(0,0) = \{(x,y): x \geq 0\}$. ■

4.36. Megoldás: (Feladat) Először megadjuk azt a $W_s^{loc}(0,0,0) = \{(x,y,h(x,y))\}$ centrális sokaságot. Keressük a h függvényt $h(x,y) = a_2x^2 + a_3xy + a_4y^2 + \cdots +$ alakban. Az invariancia miatt a $z = h(x,y)$-ből következően: $\dot{z}(t) = h'\big(x(t), y(t)\big) \cdot (\dot{x(t)}, \dot{y(t)})$. $a_2 = a_4 = -1$ és $a_3 = 0$. Így a centrális kétdimenziós sokaságot leíró függvény másodrendű közelítése: $h(x,y) = -x^2 - y^2 + O(|\underline{x}|^3)$. A centrális sokaság dinamikáját az (origó környezetében) leíró differenciálegyenlet:

$$\dot{x} = -y - x^3 - xy^2 + O\left(|\underline{x}|^4\right), \ \dot{y} = x - yx^2 - y^3 - O\left(|\underline{x}|^4\right).$$

Polárkoordináta- rendszerre való áttéréssel: $\dot{r} = -r^3 + O(|r|^4)$. Ez utóbbi differenciálegyenlet egyensúlyi helyzete, az origó stabilis fókusz, így centrális sokaság redukciós tétele miatt az eredeti differenciálegyenlet origója is aszimptotikusan stabilis. A rendszer stabilis sokasága a z tengely. ■

4.37. Megoldás: (Feladat) Keressük a centrális sokaságot meghatározó függvény közelítését a $y(x) = h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots +$ alakban. Ekkor az invariancia miatt: $y(t) = h(x(t))$. Ezen összefüggést deriválva, $\dot{y}(t) = h'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$. Helyettesítsük be ebbe az egyenletbe az x és y deriváltját a

differenciálegyenletből. Az együtthatók összehasonlításából adódóan: $a_2 = \alpha$ és $a_3 = 0$. A centrális sokaság negyedrendű approximációja: $h(x) = \alpha x^2 + O(x^4)$. Így a centrális sokaság dinamikáját az (origó környezetében) leíró differenciálegyenlet: $\dot{x} = \alpha x^3 + O(x^5)$. A centrális sokaság redukciós tétele miatt az eredeti differenciálegyenlet origója aszimptotikusan stabilis, ha $\alpha < 0$ és instabilis, ha $\alpha > 0$. Megmutatható, hogy a rendszer stabilis sokasága az y tengely.■

4.38. Megoldás: (Feladat) Keressük a centrális sokaságot meghatározó függvény közelítését a $y(x) = h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots +$ alakban. Ekkor az invariancia miatt: $y(t) = h(x(t))$.
Ezen összefüggést deriválva, $\dot{y}(t) = h'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$ A centrális sokaság másodrendű approximációja: $h(x) = x^2 + O(x^4)$. Így a centrális sokaság dinamikáját az (origó környezetében) leíró differenciálegyenlet: $\dot{x} = x^4 + O(x^5)$. Mivel ez utóbbi egyenletnél az $x = 0$ megoldás instabilis, ezért a centrális sokaság redukciós tétele miatt az eredeti differenciálegyenlet origója is instabilis.■

4.39. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(0,0)$ és $P_2(-1,0)$. P_1 nyeregpont, a P_2 centrum. A rendszer Hamilton-típusú, $H(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$. A homoklinikus pálya $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 0$, $x < 0$ esetén. A lokális stabilis és instabilis sokaság unicitása miatt az origó környezetében ezen görbe alkotja a rendszer stabilis, illetve instabilis sokaságát. ■

4.40. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(0,0)$ és $P_2(\frac{2}{3},0)$. P_1 nyeregpont, a P_2 stabilis fókusz. Megpróbálkozunk a következő (perturbálatlan) $\dot{x} = 2y$, $\dot{y} = 2x - 3x^2$ $(*)$ Hamilton-rendszer Hamilton-függvényének segítségével globális vizsgálatot folytatni az eredeti rendszeren. A $(*)$ Hamilton-függvénye $H(x,y) = x^3 - x^2 + y^2$. $\dot{H}(x,y) = 2y^2(x^3 - x^2 + y^2)$. A $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ görbe invariáns halmaz és tartalmazza az eredeti rendszer $P_2(\frac{2}{3},0)$ stabilis fókuszpontját. Ez lesz az eredeti rendszer homoklinikus pályája is. ■

4.41. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(-1,0)$ és $P_2(1,0)$. P_1 stabilis fókusz, a P_2 nyeregpont. Megpróbálkozunk a következő (perturbálatlan) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $(*)$ Hamilton-rendszer Hamilton-függvényének segítségével vizsgálatot folytatni az eredeti rendszeren. A $(*)$ Hamilton-függvénye: $H(x,y) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2$. Az eredeti rendszeren: $\dot{H}(x,y) = -y^2$. $(**)$ A $K = \{(x,y): -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 \leq 0\}$ pozitívan invariáns. A K tartalmazza az eredeti rendszer 2 egyensúlyi helyzetét, ezért alkalmazható az 5.42. Poincaré-Bendixson-tétel. E szerint egy $\underline{p} \in K$ pont ω-határhalmaza az alábbi három típus valamelyikébe tartozik: 1. $\omega(\underline{p})$ egy egyensúlyi pont. 2. $\omega(\underline{p})$ egy periodikus pálya. 3. $\omega(\underline{p})$ néhány egyensúlyi pont ($\underline{p}_1, \cdots, \underline{p}_n$) és olyan (homoklinikus ill. heteroklinikus) γ_i pályák uniója, melyekre $\omega(\gamma_i) = \underline{p}_i$ és $\alpha(\gamma_i) = \underline{p}_j$. Mivel div $\underline{f} = -1$, így a Bendixson-kritérium miatt a rendszernek nem lehet K-ban fekvő periodikus pályája. Következésképpen a rendszernek létezik heteroklinikus pályája. ■

4.42. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(-1,0)$, $P_2(0,0)$ és $P_3(1,0)$. P_1 és P_3 stabilis fókusz, a P_2 nyeregpont. Megpróbálkozunk a következő (perturbálatlan) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^3$ $(*)$ Hamilton-rendszer Hamilton-függvényének segítségével vizsgálatot folytatni az eredeti rendszeren. A $(*)$ Hamilton-függvénye: $H(x,y) = -2x^2 + x^4 + 2y^2$. Az eredeti rendszeren: $\dot{H}(x,y) = -4x^2y^2$. $(**)$ A $H(x,y) = -2x^2 + x^4 + 2y^2$ függvénynek a P_1 és P_3 pontban szigorú lokális minimumhelye van, így a P_1 és P_3 pont egy-egy környezetében $H(x,y) > H(P_1)$, ha $(x,y) \neq (-1,0)$, illetve $H(x,y) > H(P_3)$, ha $(x,y) \neq (1,0)$ és a P_2 pontban nyeregpont van. Az origó stabilis sokasága az eredeti rendszerben a $h(x) = -x$. Az origó instabilis sokaságának egy hetedrendű approximációja az eredeti rendszerben a $g(x) = -\frac{1}{64}x^7 - \frac{1}{24}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + x\,O(x^8)$ függvény. A $K = \{(x,y): -2x^2 + x^4 + 2y^2 \leq 0\}$ pozitívan invariáns. A K tartalmazza az eredeti rendszer 3 egyensúlyi helyzetét, ezért alkalmazható az 5.42.

Poincaré-Bendixson-tétel. E szerint egy $\underline{p} \in K$ pont ω-határhalmaza az alábbi három típus valamelyikébe tartozik: 1. $\omega(\underline{p})$ egy egyensúlyi pont. 2. $\omega(\underline{p})$ egy periodikus pálya. 3. $\omega(\underline{p})$ néhány egyensúlyi pont ($\underline{p}_1, \cdots, \underline{p}_n$) és olyan (homoklinikus ill. heteroklinikus) γ_i pályák uniója, melyekre $\omega(\gamma_i) = \underline{p}_i$ és $\alpha(\gamma_i) = \underline{p}_j$. A rendszernek a stabilis fókuszpontok miatt nem lehet K-ban fekvő periodikus pályája. Nem lehetséges a homoklinikus pálya létezése sem. A rendszernek létezik heteroklinikus pályája. ■

4.43. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet $P_1(1,0)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(0,0)$ és a $P_4(0,-1)$
A rendszer Hamilton-rendszer. A P_1 és P_4 stabilis fókusz, a P_2 és P_3 nyeregpont. A Hamilton-függvény: $H(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$. A heteroklinikus pálya a $\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{6}$ görbe.
A heteroklinikus pályák egy-egy heteroklinikus hurkot alkotnak, ugyanis,

$$\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6} = (y - x + 1)\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}\right),$$

ami egy egyenes és egy ellipszist takar. ■

5. Fejezet-Megoldások

5.1. I. Megoldás: (Feladat) $x(t) = x_0 e^{-t}$ és $y(t) = y_0 e^{-kt}$. A feltétel szerint $h(xe^{-t}) = h(x)e^{-kt}$. Látható, ha k páros, akkor $h(x) = \begin{cases} x^k & \text{, ha } x \geq 0 \\ -x^k & \text{, ha } x < 0 \end{cases}$, ha k páratlan, akkor $h(x) = x^k$ a megfelelő homeomorfizmus a két rendszer pályagörbéi között. ■

5.1. II. Megoldás: (Feladat) Tekintsük általában az adott $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ n-dimenziós rendszert és tegyük létezik $\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t))$ diffeomorfizmus. Ekkor $\dot{\underline{y}} = \underline{g}'(\underline{g}^{-1}(\underline{y})) \cdot \underline{f}(\underline{g}^{-1}(\underline{y}))$. Ekkor $-ky = g'\big(g^{-1}(y)\big) \cdot (-g^{-1}(y))$. A megfelelő diffeomorfizmus a $g(x) = x^k$ leképezés lesz. ■

5.2. Megoldás: (Feladat) Az 5.13. Állítás értelmében a két rendszer topologikusan ekvivalens. ■

5.3. Megoldás: (Feladat) Az 5.13. Állítás értelmében a két rendszer topologikusan ekvivalens. ■

5.4. Megoldás: (Feladat) A két rendszer esetén a $\dim E_s(\underline{\underline{A}}) = \dim E_s(\underline{\underline{B}})$ és $\dim E_u(\underline{\underline{A}}) = \dim E_u(\underline{\underline{B}})$. Így az 5.13. Állítás értelmében a két rendszer topologikusan ekvivalens. ■

5.5. Megoldás: (<u>Feladat</u>) Az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok hasonlók. A rendszerek közötti homeomorfizmust, sőt diffeomorfizmust a $\underline{y} = h(\underline{x}) := \underline{\underline{H}}\underline{x}$ leképezés valósítja meg. Kiszámolható, hogy a $\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, azaz $h(x, y) = (x, -y)$. ■

5.6. Megoldás: (Feladat) $\underline{\varphi}_t(x_1, x_2) := (e^{-t}x_1, e^{-t}x_2)$ és $\underline{\psi}_t(y_1, y_2) := (e^{-t}(y_1 + 2ty_2), e^{-t}y_2)$. A rendszerek közötti homeomorfizmus a $\underline{h}(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2 \ln x_2, x_2)$. ■

5.7. Megoldás: (Feladat) $\underline{\varphi}_t(x_1, x_2) := (e^{-2t}x_1, e^{-2t}x_2)$ és $\underline{\psi}_t(y_1, y_2) := (e^{-2t}(y_1 + ty_2), e^{-2t}y_2)$. A rendszerek közötti homeomorfizmus a $\underline{h}(x_1, x_2) = (\, x_1 - \frac{1}{2}x_2 \ln x_2,\ x_2)$. ■

5.8. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r(1 - r)$ és $\dot{\varphi} = 1$. Az $r(0) = x$ egyenletet megoldva $r(t) = \frac{xe^t}{1 - x + xe^t}$. Definiáljuk a megfelelő Poincaré-leképezést: $P: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, a pályagörbét az $(1, 0)$ pontban metsző egyenes, a megfelelő transzverziális metszet legyen az x-tengely pozitív félegyenese és $P(x) = r(2\pi)$. Így $P(x) = \frac{xe^{2\pi}}{1 - x + xe^{2\pi}}$. A rendszer határciklusa az $r = 1$ görbe és az $r = 1$ görbe a rendszer stabilis határciklusa. ■

5.9. I. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r(\mu - r^2)$ és $\dot{\varphi} = 1$. (*) Az $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ kezdeti feltétellel számolva, kapjuk a (*) rendszer megoldására: $\underline{\phi}_t(r_0, \varphi_0) = ((\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{{r_0}^2} - \frac{1}{\mu}\right) e^{-2\mu t})^{-1/2}, t + \varphi_0)$. Legyen $\mathfrak{A} = \{(r, \varphi): r > 0,\ \varphi = \varphi_0\}$. Látszik, hogy a (*) megoldása $t = 2\pi$-re visszatér $\mathfrak{A}$-ra. Legyen $P: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ definiálva: $(r_0, \varphi_0) \to \underline{\phi}_{2\pi}(r_0, \varphi_0) := ((\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{{r_0}^2} - \frac{1}{\mu}\right) e^{-4\pi\mu})^{-1/2}, 2\pi + \varphi_0)$. Az $r \to (\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\mu}\right) e^{-4\pi\mu})^{-1/2}$ leképezés (egyetlen) fixpontja $r = \sqrt{\mu}$. Az $r = \sqrt{\mu}$ periodikus pálya. A leképezés deriváltja a $\sqrt{\mu}$ helyen $e^{-4\pi\mu} < 1$, így az 5.24. Állítás miatt az $r = \sqrt{\mu}$ a rendszer stabilis határciklusa. ■

5.9. II. Megoldás: (Feladat) A feladatot megoldhatjuk Floquet-elmélet segítségével is.

Tegyük fel, hogy $\mu = 1$. Tekintsük a $\underline{\gamma} = \{(x,y) = (\cos t, \sin t): t \in \mathbb{R}\}$ görbét. Ekkor a rendszer linearizált mátrixa a γ görbén $\underline{f}'(\underline{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1-2\sin t\cos t \\ 1-2\sin t\cos t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}$. „Kis szerencsével" meg tudjuk oldani a linearizált egyenletet: $\dot{\underline{z}}(t) = \underline{f}'(\underline{\gamma}(t))\,\underline{z}(t)$, éspedig ezen rendszer alapmátrixa $\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & -\sin t \\ e^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Ebből következőleg a monodrómia mátrix $\underline{\underline{\Phi}}(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Az 1 mellett a másik sajátértéke, az ún. Floquet-multiplikátor: $e^{-4\pi}$. Az 5.32. Állítás miatt az $r = 1$ periodikus pálya orbitálisan aszimptotikusan stabilis. ■

5.10. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + y^2$. Az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú körben a pályák távolodnak az origótól, a 1 sugarú körön kívül viszont közelednek hozzá. Tekintsük $P: [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \to [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ Poincaré-leképezést a következőképpen: Tetszőleges $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ esetén legyen $P(x) \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ az a pont, ahová az x pontból induló pálya először visszaérkezik. A Brouwer-féle fixpont-tétel miatt van a leképezésnek fixpontja. Ez a pont periodikus pont. A pályák kívülről és belülről rácsavarodnak erre, így a rendszernek ez stabilis határciklusa. ■

5.11. Megoldás: (Feladat) $\dot{r} = r(1-r^2)$ és $\dot{\varphi} = -1$. (*) A szétválasztható differenciálegyenletet megoldva, az $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ kezdeti feltétellel számolva, kapjuk a (*) rendszer megoldására: $\underline{\phi}_t(r_0, \varphi_0) = ((1 + (\frac{1}{{r_0}^2} - 1)e^{-2t})^{-1/2}, -t + \varphi_0)$. Legyen $\mathfrak{A} = \{(r,\varphi): r > 0,\ \varphi = \varphi_0\}$. A (*) megoldása $t = 2\pi$-re visszatér $\mathfrak{A}$-ra. Legyen $P: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ a következőképpen definiálva:

$$(r_0, \varphi_0) \to \underline{\phi}_{2\pi}(r_0, \varphi_0) := ((1 + (\tfrac{1}{{r_0}^2} - 1)e^{-4\pi})^{-1/2}, -2\pi + \varphi_0), \text{ azaz } r \to (1 + (\tfrac{1}{r^2} - 1)e^{-4\pi})^{-1/2}$$

A fenti leképezés (egyetlen) fixpontja $r = 1$. Így az $r = 1$ periodikus pálya. A leképezés deriváltja az 1 helyen $e^{-4\pi} < 1$, azaz az 5.24. Állítás miatt az $r = 1$ stabilis határciklus. ■

5.12. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y) := x^2 + y^2$. Az egységsugarú körben a pályák távolodnak az origótól, a $\sqrt{2}$ sugarú körön kívül viszont közelednek hozzá. (→ 3.10. Feladat) Így a megfelelő körgyűrű pozitívan invariáns halmaz. Értelmezzük a $P: [1, \sqrt{2}] \to [1, \sqrt{2}]$ Poincaré-leképezést a következőképpen: Tetszőleges $x \in [1, \sqrt{2}]$ esetén legyen $P(x) \in [1, \sqrt{2}]$ az a pont, ahová az x pontból induló pálya először visszaérkezik. A Brouwer-féle fixpont-tétel miatt van a leképezésnek fixpontja. Ez a pont periodikus pont. A rendszernek ez stabilis határciklusa. ■

5.13. Megoldás: (Feladat) Az origó körüli egységsugarú körben a pályák távolodnak az origótól, a $\sqrt{2}$ sugarú körön kívül viszont közelednek hozzá.. (→ 3.9. Feladat) Így a megfelelő körgyűrű pozitívan invariáns halmaz. Értelmezzük a $P: [1, \sqrt{2}] \to [1, \sqrt{2}]$ Poincaré-leképezést a következőképpen: Tetszőleges $x \in [1, \sqrt{2}]$ esetén legyen $P(x) \in [1, \sqrt{2}]$ az a pont, ahová az x pontból induló pálya először visszaérkezik. A Brouwer-féle fixpont-tétel miatt van a leképezésnek fixpontja. Ez a pont periodikus pont. A rendszernek ez stabilis határciklusa. ■

5.14. I. Megoldás: (<u>Feladat</u>): $x_1(t) = x_{10}e^{-t}$, $x_2(t) = x_{20}e^{t} + \frac{1}{3}x_{10}^2(e^t - e^{-2t})$.

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^t + \frac{1}{3}x_1^2(e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\psi}(t, \underline{y}) = \begin{pmatrix} y_1 e^{-t} \\ y_2 e^t \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{h}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2. \end{pmatrix}. \ ■$$

5.14. II. Megoldás: (Feladat) A lokális instabilis sokaság egyenlete: $W_u^{loc} = \{(c_0, c_1): c_0 = 0\}$, ugyanakkor a lokális stabilis sokasága a $W_s^{loc} = \left\{(c_0, c_1): c_1 + \frac{{c_0}^2}{3} = 0\right\}$. Az eredeti instabilis és stabilis altér y tengely irányú transzformációval képződik le a homeomorfizmus által a megfelelő instabilis és stabilis sokaságra. $\underline{h}(x,y) = (x, y + \frac{1}{3}x^2)$. ■

5.15. Megoldás: (Feladat) $x_1(t) = x_1 e^{t}$, $x_2(t) = x_2 e^{-t} + \frac{1}{3}x_1^2(e^{2t} - e^{-t})$.

$$\underline{\varphi}(t,\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 e^t \\ x_2 e^{-t} + \frac{1}{3}x_1^2(e^{2t} - e^{-t}) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\psi}(t,\underline{y}) = \begin{pmatrix} y_1 e^t \\ y_2 e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{h}(x_1,\, x_2) = (x_1,\, x_2 - \frac{1}{3}x_1^2)$. ■

5.16. Megoldás: (Feladat) $x_1(t) = x_{10}e^{-t}$, $x_2(t) = x_{20}e^t + \frac{1}{4}x_{10}^3(e^t - e^{-3t})$.

$$\underline{\varphi}(t,\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^{t} + \frac{1}{4}x_1^3(e^{t} - e^{-3t}) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\psi}(t,\underline{y}) = \begin{pmatrix} y_1 e^{-t} \\ y_2 e^{t}) \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{h}(x_1,\, x_2) = (x_1,\, x_2 + \frac{1}{4}x_1^3)$. ■

5.17. Megoldás: (Feladat) $x_1(t) = c_0e^t$, $x_2(t) = c_1e^t + \frac{1}{3}c_0^2(e^{2t} - e^{-t})$ és $x_3(t) = c_2e^t + c_0^2(e^{2t} - e^t)$

$$\underline{\varphi}(t,\underline{x}) = (c_0e^t,\, c_1e^t + \tfrac{1}{3}c_0^2(e^{2t} - e^{-t}),\; c_2e^t + c_0^2(e^{2t} - e^t)) \text{ és } \underline{\psi}(t,\underline{y}) = (d_0e^t,\, d_1e^{-t}, d_2e^t)$$

A megfelelő homeomorfizmus: $\underline{h}(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2 - \frac{1}{3}x_1^2, x_3 - x_1^2)$. ■

5.18. Megoldás: (Feladat) $\mathrm{V}(x,y,z) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2)$. Ekkor
$(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y,z) = -\sigma x^2 - y^2 - \frac{1}{2}b(z - \sigma - r)^2 + \frac{1}{2}b(\sigma + r)^2$. Jelölje $\lambda = \min\{\sigma, 1, \frac{1}{2}b\}$. Ekkor

$$(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y,z) \le -2\lambda \mathrm{V}(x,y,z) + \tfrac{1}{2}b(\sigma + r)^2$$

Az egyenlőtlenséget oldalát integrálva: $\mathrm{V}(x,y,z) \le \mathrm{V}(x_0,y_0,z_0)e^{-2\lambda t} + \frac{b}{4\lambda}(\sigma + r)^2(1 - e^{-2\lambda t})$
Így $\mathrm{V}(x,y,z) \le 1 + \frac{b}{4\lambda}(\sigma + r)^2 = R^*$, ha $t \ge t_D = \frac{1}{2\lambda}\ln V_D$-re, ahol $V_D = \max\{\mathrm{V}(x,y,z) : (x,y,z) \in D\}$
Így a $\mathrm{V}(x,y,z)$ $t \ge t_D$ esetén felülről korlátos, a felső korlátja R^*. ■
<u>Megjegyzés</u>: Az origó pontosan akkor lesz aszimptotikusan stabilis, ha $r < 1$. $\mathrm{V}(x,y,z) := \frac{1}{2}(x^2 + \sigma(y^2 + z^2)$. Ekkor $\mathrm{V}(0,0,0) = 0$, $\mathrm{V}(x,y,z) \ge 0$ és $\mathrm{V}(x,y,z) = 0$ esetén $(x,y,z) = (0,0,0)$.
$(L_{\underline{f}}\mathrm{V})\,(x,y,z) = -\sigma(x^2 - (1 + r)xy + y^2) - \sigma b z^2$. $x^2 - (1 + r)xy + y^2 > 0$ pontosan akkor, ha $r < 1$.

5.19. Megoldás: (Feladat) Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó instabilis fókusz. Az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\; x^2 + y^2 > 0\}$-ból indított pályák az $x = 1$, illetve az $x = -1$ egyenesekhez tartanak. Így az ilyen tartományból indított (x,y) esetén $\omega(((x,y))) = \{(-1,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,y) : y \in \mathbb{R}\}$. ■

5.20. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzete az (r,φ) rendszerben:
$(r,\varphi) = (a,0), (r,\varphi) = (a,\pi)$ és $r = 0$. Mind a három egyensúlyi helyzet instabilis. Az $r = a$ stabilis határciklus, pozitív körüljárási iránnyal. A rendszer ω-határhalmaza az $(a,0)$ és a $(-a,0)$ pontokat összekötő heteroklinikus körpálya. ■

5.21. Megoldás: (Feladat) Az $y = 0$ egyenes egy pálya. Ezen pályán $\dot{x} = 1 - x$, azaz $x < 1$ esetén x monoton nő, azaz jobbra mutat, $x > 1$ esetén x monoton csökken, azaz balra mutat. Egyébként a $(1,0)$ egyensúlyi helyzet. A kezdeti értékhez tartozó ω-határhalmaza az $(1,0)$ pont. ■

5.22. Megoldás: (Feladat) (r_0,φ_0) kezdeti érték esetén, ha $0 < r_0 < 1$, vagy $r_0 > 1$, akkor az ω-határhalmaz az $r = 1$ (stabilis) határciklus és $r_0 = 0$ esetén az ω-határhalmaz természetesen a $\{\underline{0}\}$. ■
5.23. Megoldás: (Feladat) Ekkor az origó a rendszer (egyetlen) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete, így természetesen minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\omega(\underline{x}) = \{\underline{0}\}$. ■

5.24. Megoldás: (Feladat) A következő halmaz elnyelő halmaz lesz:

$$B_\delta = \{(x,y) : [-1 - \delta, 1 + \delta] \times [-\delta, \delta],\; \delta > 0\}$$

Tekintsük az $x(t_0) = x_0$ és $y(t_0) = y_0$ kezdeti feltételt. Ekkor

$|x| < 1$-re $x(t) = \frac{x_0 e^t}{\sqrt{x_0^2 e^{2t} - x_0^2 e^{2t_0} + e^{2t_0}}}$, $|x| > 1$-re $x(t) = \frac{x_0 e^t}{\sqrt{x_0^2 e^{2t} + x_0^2 e^{2t_0} - e^{2t_0}}}$, és $y(t) = y_0 e^{-t}$.

$(x(t), y(t)) \in B_\delta$ elegendően nagy t-re. Az aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontok a $P_1(1,0)$ és a $P_2(-1,0)$ pontok. ■

5.25. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(-1,-1)$ és $P_3(1,-1)$. A megadott tulajdonságú λ esetén P_1 instabilis fókusza, a P_2 és a P_3 nyeregpont. Az $y = -1$ egyenes pályát alkot. Az invariáns pályák $h(x) = -1$ és $h(x) = 1 - 2x^2$. Ezen görbék egyidejűleg a rendszer heteroklinikus pályái is lesznek, ugyanis a két nyeregpontot kötik össze egymással. Mivel az origóban instabilis fókusza van, ezért a fenti két görbe uniója lesz a rendszer ω-határhalmaza. ■

5.26. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(\sqrt{2},\sqrt{2})$ és a $P_3(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. P_1 instabilis, a P_2 és P_3 stabilis fókusz. Az $y = 1$ és az $y = 1$ egyenesek is pályát alkotnak. Az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1,\ x^2 + y^2 > 0\}$ tartományból indított pályák az $y = 1$, illetve az $y = -1$ egyenesekhez tartanak. Az ilyen tartományból indított (x,y) esetén $\omega\big((x,y)\big) = \{(x,y) : y = 1 \cup y = -1\}$.

5.27. Megoldás: (Feladat) Egyszerűen belátható a csoporttulajdonság. Könnyen megmutatható. hogy a rendszer jobboldala: $f(x,y) = (x, -y + x^2)$.■

5.28. Megoldás: (Feladat) Egyszerűen belátható a csoporttulajdonság. Könnyen megmutatható. hogy a rendszer jobboldala: $f(x,y) = (x^2, -y)$.■

5.29. Megoldás: (Feladat) Egyszerűen belátható a csoporttulajdonság. Könnyen megmutatható. hogy a rendszer jobboldala: $f(x,y) = (2x + y^3, -y)$.■

5.30. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(-1,1)$. A rendszer Hamilton-rendszer, P_1 nyeregpont, a P_2 centrum. $H(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$. A homoklinikus pálya: $H(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 = 0,\ x < 0$. Keressük az instabilis sokaságot meghatározó függvény közelítését a $y(x) = h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots +$ alakban. A lokális instabilis sokaság ötödrendű approximációja: $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{81}x^5$. Keressük a stabilis sokaságot meghatározó függvény közelítését $x = g(y) = b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots +$ alakban. A lokális stabilis sokaság ötödrendű approximációja: $x = \frac{1}{3}y^2 + \frac{3}{8}y^5$. ■

5.31. Megoldás: (Feladat) Egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A rendszer Hamilton-rendszer. $H(x,y) = xy - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4$. A szeparátrix: $H(x,y) = xy - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 = 0$. ■

5.32. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzet, a $P(0,0)$ instabilis. $x_1(t) = c_1e^{-t}$.

$x_2(t) = c_2e^{2t} + c_1^3\varepsilon(e^{-3t} - e^{2t}) = (c_2 - \varepsilon c_1^3)e^{2t} + \varepsilon c_1^3 e^{-3t}$. Így a megoldásokra kapjuk: $\underline{\varphi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} \\ (c_2 - \varepsilon c_1^3)e^{2t} + \varepsilon c_1^3 e^{-3t} \end{pmatrix}$. A lokális stabilis sokasága: $W_s^{loc} = \{(c_1,c_2) : c_2 - \varepsilon {c_1}^3 = 0\}$, a rendszer lokális instabilis sokasága: $W_u^{loc} = \{(c_1,c_2) : c_1 = 0\}$). ■

5.33. Megoldás: (Feladat) Az egyensúlyi helyzetek: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. A rendszer Hamilton-rendszer a P_1 nyeregpont, a P_2 centrum. $H(x,y) = -xy + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2$. A H függvénynek a $P_2(1,1)$-ban lokális minimumhelye van. A homoklinikus pálya: $H(x,y) = -xy + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2,\ x > 0$. Keressük a stabilis sokaságot meghatározó függvény közelítését a $y(x) = h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots +$ alakban. Ekkor az invariancia miatt: $y(t) = h(x(t))$. Ezen összefüggést deriválva, $\dot{y}(t) = h'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$.

Helyettesítsük be ebbe az egyenletbe az x és y deriváltját a differenciálegyenletből. Ekkor a $h(x)$ függvényre kapjuk: $h(x) - x^2 = h'(x)(h(x) - x)$, azaz

$$(a_2 - 1)x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots = (2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \ldots)(-x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$$

Az együtthatók összehasonlításából adódóan: $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{18}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{30}$ stb.
Így a lokális stabilis sokaság negyedrendű approximációja: $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{30}x^4$. ■

5.34. Megoldás: (Feladat) Az 5.56. és 5.57. Megjegyzésben mondottak szerint

$$P(x, y) = x \text{ és } Q(x, y) = -y.$$

$m = 1$. A $Z = 0$ körön 4 darab egyensúlyi pont van: $P_1(1, 0), P_2(-1, 0), P_3(0, 1), P_4(0, -1)$.

a) A $P_1(1, 0), P_2(-1, 0)$ pontokban $Y = 0$, ezért $\eta = \frac{Y}{X}$ és $\tau = \frac{Z}{X}$.

$$\dot{\eta} = -2\eta \quad \text{illetve} \quad \dot{\tau} = -\tau \ (*).$$

Az (*) egyensúlyi helyzete a $(\eta, \tau) = (0, 0)$. Ez tartozik a $P_1(1, 0), P_2(-1, 0)$ pontokhoz.
Ezen pontok stabilis csomópontok.

b) A $P_3(0, 1), P_4(0, -1)$ pontokban $Y \neq 0$, ezért $\xi = \frac{X}{Y}$ és $\zeta = \frac{Z}{Y}$

$$\dot{\xi} = 2\xi \quad \text{és} \quad \dot{\zeta} = \zeta \ (**)$$

Az (**) egyensúlyi helyzete a $(\xi, \zeta) = (0, 0)$. Ez tartozik a $P_3(0, 1), P_4(0, -1)$ pontokhoz.
Ezen pontok instabilis csomópontok. A *teljes gömbfelületen* összesen 6 egyensúlyi helyzet van, 4 csomó és 2 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.35. Megoldás: (Feladat) Az 5.56. és 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x, y) = x \text{ és } Q(x, y) = 2y.$$

$m = 1$. A $Z = 0$ körön 4 darab egyensúlyi pont van: $P_1(0, 1), P_2(0, -1), P_3(1, 0), P_4(-1, 0)$.

a) A $P_1(0, 1), P_2(0, -1)$ esetén $Y \neq 0$, ezért $\xi = \frac{X}{Y}$ és $\zeta = \frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi} = -\xi \quad \text{és} \quad \dot{\zeta} = -2\zeta \ (*)$$

Az (*) egyensúlyi helyzete a $(\xi, \zeta) = (0, 0)$.
Ezen pontok stabilis csomópontok. Ez tartozik a $P_1(0, 1), P_2(0, -1)$ pontokhoz.

b) A $P_3(1, 0), P_4(-1, 0)$ pontokban $Y = 0$, ezért $\eta = \frac{Y}{X}$ és $\tau = \frac{Z}{X}$.

$$\dot{\eta} = \eta \quad \text{illetve} \quad \dot{\tau} = -\tau \ (*)$$

Az (*) egyensúlyi helyzete a $(\eta, \tau) = (0, 0)$. Ez tartozik a $P_1(1, 0), P_2(-1, 0)$ pontokhoz. Ezen pontok nyeregpontok. A *teljes gömbfelületen* összesen 6 egyensúlyi helyzet van, 4 csomópont és 2 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.36. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$\dot{x} = P(x, y) = -4y + 2xy - 8$$
$$\dot{y} = Q(x, y) = 4y^2 - x^2.$$

A rendszer egyensúlyi helyzetei: $P_1(4, 2)$, $P_2(-2, -1)$. A linearizált rendszernek a P_1 pont instabilis csomópontja, míg a P_2 pont stabilis fókuszpontja. $m = 2$. A a $Z = 0$ körön 6 darab egyensúlyi pont van: $P_3\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_4\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_5\left(\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_6\left(\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_7(0, 1)$ és $P_8(0, -1)$.

Mivel $Y \neq 0$, ezért $\xi = \frac{X}{Y}$ és $\zeta = \frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi} = -2\xi - 4\zeta - 8\zeta^2 + \xi^3 \quad \text{és} \quad \dot{\zeta} = -\zeta(4 - \xi^2) \ (*)$$

A (*) egyensúlyi helyzetei: $\{(0,0),(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)\}$. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(0,0)$ stabilis csomópont, míg a $(\pm\sqrt{2},0)$ nyeregpont.
Így látható (a gömbfelületet vetítve a megfelelő síkokra) a végtelenben lévő megadott 6 egyensúlyi helyzet jellege. A $P_3\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_4\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_5\left(\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right), P_6\left(\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)$ pontokban nyeregpont, a $P_7(0,1)$ és $P_8(0,-1)$ pontokban csomópont.
Mivel $m=2$ páros, így az átlós pontok irányítása ellentétes jellegűek. A $P_7(0,1)$ stabilis, míg a $P_8(0,-1)$ instabilis csomópont. Szemléltethető a fázissík vetülete a gömb egyenlítői síkjára. A *teljes gömbfelületen* összesen 10 egyensúlyi helyzet van, 4 csomópont, 4 nyeregpont és 2 fókuszpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $4\cdot 1+4\cdot(-1)+2\cdot 1=2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.37. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y)=2x+y \text{ és } Q(x,y)=x+2y.$$

$m=1$. A $Z=0$ körön 4 darab egyensúlyi pont van:

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Mivel $Y\neq 0$, ezért $\xi=\frac{X}{Y}$ és $\zeta=\frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi}=1-\xi^2 \quad \text{és} \quad \dot{\zeta}=-\zeta(\xi+2) \quad (*)$$

(*) egyensúlyi helyzetei: $\{(1,0),(-1,0),\}$. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(1,0)$ stabilis csomópont, míg a $(-1,0)$ nyeregpont. Így látható (a gömbfelületet vetítve a megfelelő síkokra) a végtelenben lévő megadott 4 egyensúlyi helyzet jellege. A rendszernek a $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokban stabilis csomópontja, míg a $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokban nyeregpont van. Így szemléltethető a fázissík vetülete a gömb egyenlítői síkjára. A *teljes gömbfelületen* összesen 6 egyensúlyi helyzet van, 4 csomó és 2 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $4\cdot 1+2\cdot(-1)=2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.38. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y)=x-y-y^3 \text{ és } Q(x,y)=x+y+x^3.$$

Látható, hogy $m=3$. A $Z=0$ körön nincs egyensúlyi pont. Így csak végesben van egyensúlyi pont, az origó. ami instabilis fókusz. A *teljes gömbfelületen* összesen így 2 egyensúlyi helyzet van, 2 fókuszpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $2\cdot 1=2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.39. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y)=-x-y^2 \text{ és } Q(x,y)=y+x^2.$$

Látható, hogy $m=2$. A $Z=0$ körön 2 darab egyensúlyi pont van: $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Mivel $Y\neq 0$, ezért $\xi=\frac{X}{Y}$ és $\zeta=\frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi}=-2\xi\zeta-1-\xi^3 \quad \text{és} \quad \dot{\zeta}=-\zeta(\xi^2+\zeta) \quad (*)$$

(*) egyetlen egyensúlyi helyzete: $(\xi,\ \zeta)=\ (-1,0)$. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(-1,0)$ stabilis csomópont. (Ez tartozik a $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ponthoz.) Így látható (a gömbfelületet vetítve a megfelelő síkokra) a végtelenben lévő megadott 2 egyensúlyi helyzet jellege. A $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontban stabilis csomópont, míg a $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontban instabilis csomópont. Így szemléltethető a fázissík vetülete a gömb egyenlítői síkjára. A rendszer Hamilton típusú, így egyszerűen meggondolható, hogy a $(0,0)$ pontban nyereg, míg a $(-1,-1)$ pontban centruma van. A *teljes gömbfelületen* összesen 6 egyensúlyi helyzet van, 2 (végtelenbeli) csomó, 2 centrum és 2 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege 2 a gömb Euler-féle karakterisztikája miatt. ■

5.40. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y) = -2x^2 + y^2 \text{ és } Q(x,y) = -x^2 + 2y^2.$$

$m = 2$. A $Z = 0$ körön 2 darab egyensúlyi pont van: $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Mivel $Y \neq 0$, ezért $\xi = \frac{X}{Y}$ és $\zeta = \frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi} = -2\xi^2 + 1 + \xi^3 - 2\xi \quad \text{és} \quad \dot{\zeta} = \zeta(\xi^2 - 2) \quad (*)$$

Könnyen megmutatható, hogy (*) egyetlen egyensúlyi helyzete: $(\xi, \zeta) = (-1, 0)$. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(-1, 0)$ nyeregpont. (Ez tartozik a $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ponthoz.) Így látható (a gömbfelületet vetítve a megfelelő síkokra) a végtelenben lévő megadott 2 egyensúlyi helyzet jellege. A $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és a $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontban nyeregpont. Így szemléltethető a fázissík vetülete a gömb egyenlítői síkjára. A *teljes gömbfelületen* összesen 4 egyensúlyi helyzet van, 2 instabilis (az origónak megfelelő) egyensúlyi helyzet és végtelenbeli 2 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege 2 a gömb Euler-féle karakterisztikája miatt, ezért ennek az indexe 2 kell, hogy legyen. ■

5.41. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y) = x^2 + 2xy \text{ és } Q(x,y) = -x^2 + xy + y^2.$$

$m = 2$. A $Z = 0$ körön 2 darab egyensúlyi pont van: $P_1(0,1), P_2(0,-1)$.
Mivel $Y \neq 0$, ezért $\xi = \frac{X}{Y}$ és $\zeta = \frac{Z}{Y}$. Így $\dot{\xi} = \xi^3 + \xi$ és $\dot{\zeta} = \zeta(\xi^2 - \zeta - 1)$ (*)

A (*) egyetlen egyensúlyi helyzete: $(\xi, \zeta) = (0, 0)$. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(0, 0)$ nyeregpont. (Ez tartozik a $P_1(0,1)$ ponthoz.) Így a rendszernek (a végtelenben lévő) $P_1(0,1)$ és a $P_2(0,-1)$ pontban nyeregpontja van. A *teljes gömbfelületen* összesen 4 egyensúlyi helyzet van, 2 instabilis (az origónak megfelelő) egyensúlyi helyzet és végtelenbeli 2 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege 2 a gömb Euler-féle karakterisztikája miatt, ezért ennek az indexe 2 kell, hogy legyen.■

5.42. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y) = x^2 + y^2 \text{ és } Q(x,y) = 2xy.$$

$m = 2$. A $Z = 0$ körön 6 darab egyensúlyi pont van:

$$P_1(1,0), P_2(-1,0), P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

a) $P_1(1,0), P_2(-1,0)$ esetén $Y = 0$, ezért legyen $\eta = \frac{Y}{X}$ és $\tau = \frac{Z}{X}$.

$$\dot{\eta} = -\eta^3 + \eta \quad \text{illetve} \quad \dot{\tau} = -\tau - \tau\eta^2 \quad (*)$$

Az (*) egyensúlyi helyzete a $(\eta, \tau) = \{(0,0), (1,0), (-1,0)\}$. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(0, 0)$ nyeregpont, míg a $(1, 0), (-1, 0)$ pont stabilis csomópont.

b) $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ esetén $Y \neq 0$, ezért $\xi = \frac{X}{Y}$ és $\zeta = \frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi} = 1 - \xi^2 \quad \text{és} \quad \dot{\zeta} = -2\zeta\xi \quad (**)$$

A (**) egyensúlyi helyzetei: $(\xi, \zeta) = \{(1,0), (-1,0)\}$. A (**) linearizálásával megmutatható, hogy a $(1, 0)$ stabilis csomópont, míg a $(-1, 0)$ instabilis csomópont. Így a $P_1(0,1)$ a $P_2(0,-1)$ pontokban nyeregpont, míg a $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokban csomópont van. A *teljes gömbfelületen* összesen 8 egyensúlyi helyzet van, 2 instabilis (az origónak megfelelő) egyensúlyi helyzet és 6 végtelenbeli egyensúlyi helyzet. ■

5.43. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y) = x + x^3 \text{ és } Q(x,y) = y + y^3.$$

$m = 3$. A $Z = 0$ körön 8 darab egyensúlyi pont van:

$$P_1(1,0), P_2(-1,0), P_3(0,1), P_4(0,-1), P_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

a) $P_1(1,0), P_2(-1,0)$ esetén $Y=0$, ezért $\eta=\frac{Y}{X}$ és $\tau=\frac{Z}{X}$.

$$\dot{\eta}=\eta^3-\eta \quad \text{illetve} \quad \dot{\tau}=-\tau-\tau^3 \qquad (*)$$

A (*) egyensúlyi helyzete a $(\eta,\tau)=\{(0,0),(1,0),(-1,0)\}$. A $(0,0)$ ponthoz tartozik a $P_1(1,0), P_2(-1,0)$ végtelenben vett egyensúlyi helyzet. A (*) linearizálásával megmutatható, hogy a $(0,0)$ stabilis csomópont, azaz a $P_1(1,0), P_2(-1,0)$ stabilis csomópont.

b) $P_3(0,1), P_4(0,-1) P_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ esetén $Y\neq 0$, ezért legyen $\xi=\frac{X}{Y}$ és $\zeta=\frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi}=\xi^3-\xi \quad \text{és} \quad \dot{\zeta}=-\zeta(\xi^2+1) \qquad (**)$$

(**) egyensúlyi helyzetei: $(\xi,\zeta)=\{(0,0),(1,0),(-1,0)\}$. A (**) rendszer linearizálásával megmutatható, hogy a $(0,0)$ stabilis csomópont (ehhez tartozik a végtelenbeli $P_3(0,1), P_4(0,-1)$ egyensúlyi helyzet), az $(1,0)$ nyeregpont (ehhez tartozik a végtelenbeli $P_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ egyensúlyi helyzet), míg a $(-1,0)$ szintén nyeregpont (ehhez tartozik a végtelenbeli $P_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ egyensúlyi helyzet). A rendszernek a végtelenben a $P_1(1,0), P_2(-1,0), P_3(0,1), P_4(0,-1)$ pontokban stabilis csomópontja, míg nyeregpontja $P_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a pontokban van. A *teljes gömbfelületen* 10 egyensúlyi helyzet van, 4 stabilis csomópont, 2 instabilis csomópont (az origónak megfelelő) egyensúlyi helyzet és 4 nyeregpont. Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $6\cdot 1+4\cdot(-1)=2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.44. Megoldás: (Feladat) Az 5.57. Megjegyzés és az 5.34. Feladat megoldása szerint haladva

$$P(x,y)=y \text{ és } Q(x,y)=-4x-5y.$$

$m=1$. A $Z=0$ körön 4 darab egyensúlyi pont van:

$$P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right), P_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\Big).$$

$P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right), P_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ esetén $Y\neq 0$, ezért $\xi=\frac{X}{Y}$ és $\zeta=\frac{Z}{Y}$.

$$\dot{\xi}=4\xi^2+5\xi+1 \quad \text{és} \quad \dot{\zeta}=\zeta(4\xi+5) \qquad (**)$$

(**) egyensúlyi helyzetei: $(\xi,\zeta)=\left\{(-1,0),(-\frac{1}{4},0)\right\}$. A (**) rendszer linearizálásával megmutatható, hogy a $(-1,0)$ nyeregpont (ehhez tartozik a végtelenbeli $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ egyensúlyi helyzet), az $(-\frac{1}{4},0)$ instabilis csomópont (ehhez tartozik a végtelenbeli $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ egyensúlyi helyzet). Így a rendszernek a végtelenben a $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokban nyeregpontja, míg a $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right), P_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ instabilis csomópontja van. A teljes gömbfelületen összesen 6 egyensúlyi helyzet van, 2 instabilis csomópont, 2 nyeregpont és 2 stabilis csomópont (az origónak megfelelő). Az egyensúlyi pontok indexeinek az összege $4\cdot 1+2\cdot(-1)=2$, ami megegyezik a gömb Euler-féle karakterisztikájával. ■

5.45. Megoldás: (Feladat) A rendszernek az egyensúlyi helyzetei az $\{x: 0\leq x\leq 1\}$ szakaszon. Az első integrál $y(x)=\frac{1}{3}\ln x-x+C$. ■

5.46. Megoldás: (Feladat) A felső félsíkban ($y>0$)

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-2x-y+2,\end{aligned} \qquad (1)$$

alsó félsíkban ($y<0$)

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-2x-y-2\end{aligned} \qquad (2)$$

rendszert jelenti. Tekintsük az (1), illetve a (2) rendszer kiterjesztését a teljes síkra. A kiterjesztett rendszerek egyensúlyi helyzete az $(1,0)$, illetve a $(-1,0)$ pont. Ezen pontok az (1), illetve a (2) teljes síkra kiterjesztett rendszer stabilis fókuszpontjai. Az eredeti rendszerben a felső és az alsó félsíkon a megfelelő (1) és (2) rendszer spirális trajektóriának félfordulatai vannak, és az $y = 0$ egyenesen való átmenetnél a trajektóriák folytonosan átmennek egyikből a másikba. Vizsgáljuk meg az eredeti rendszer azon trajektóriáját, amely az x-tengely $\xi > 0$ koordinátájú pontjában kezdődik. Az alsó félsíkon ismét eléri az x-tengelyt a $-(1 + \lambda(1 + \xi))$ koordinátájú pontban. A fázispont ezek után a felső félsíkon fog mozogni és egy félfordulat után az x-tengelyt a

$$1 + \lambda(2 + \lambda(1 + \xi)) \qquad (*)$$

koordinátájú pontban fogja metszeni. Az x-tengely $\xi > 0$ koordinátájú pontjában kezdődő pálya egy teljes fordulat megtétele után a (*) koordinátájú pontba kerül. Így kapjuk a rendszer Poincaré-függvényét: $P(\xi) = 1 + \lambda(2 + \lambda(1 + \xi))$. A $P(\xi) = \xi$ egyenletnek egyetlen megoldása van, ez a ξ érték megfelel a rendszer határciklusának. Ez a határciklus stabilis, ugyanis $P'(\xi) = \lambda^2 < 1$, így az 5.24. Állítás miatt a rendszernek a $\xi = \frac{(1+\lambda)^2}{1-\lambda^2}$ értékhez tartozó trajektóriája a rendszer egyetlen stabilis határciklusa. ■

5.47. Megoldás: (Feladat) A a felső félsíkban ($y > 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2x - 2y + 2, \end{aligned} \qquad (1)$$

alsó félsíkban ($y < 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2x - 2y - 2 \end{aligned} \qquad (2)$$

rendszert jelenti. Tekintsük az (1), illetve a (2) rendszer kiterjesztését a teljes síkra. A kiterjesztett rendszerek egyensúlyi helyzete az $(1,0)$, illetve a $(-1,0)$ pont. Ezen pontok az (1), illetve a (2) teljes síkra kiterjesztett rendszer stabilis fókuszpontjai. A homogén rendszer általános megoldása:

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t) \text{ és } y(t) = e^{-t}((c_2 - c_1)\sin t - (c_1 + c_2)\cos t).$$

Így például az $(1,0)$ ponton áthaladó megoldás:

$$x(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) \text{ és } y(t) = -2e^{-t}\sin t.$$

A spirális alakzatok negatív körüljárásúak, így $t = -\pi$-re $x(-\pi) = -e^{-\pi} \sim -0{,}04321$. Következésképpen $\lambda = 0{,}04321$. Vizsgáljuk meg a rendszer azon trajektóriáját, amely az x-tengely $\xi > 0$ koordinátájú pontjában kezdődik. a kezdőpontból az alsó félsíkba megy át. A rendszer Poincaré -függvénye: $P(\xi) = 1 + \lambda(2 + \lambda(1 + \xi))$. A $P(\xi) = \xi$ egyenletnek egyetlen megoldása van, ez a ξ érték megfelel a rendszer határciklusának. Ez a stabilis, ugyanis $P'(\xi) = \lambda^2 < 0{,}04321^2 < 1$, így az 5.24. Állítás miatt a rendszernek a $\xi = \frac{(1+\lambda)^2}{1-\lambda^2} \sim 1{,}09$ értékhez tartozó trajektóriája a rendszer egyetlen stabilis határciklusa. ■

5.48. Megoldás: (Feladat) $x(t) = c_1 e^{t-\cos t}$, $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{\underline{\underline{B}}t}\begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t & e^{5t} - e^t \\ \frac{1}{4}(e^{5t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$,

ahol $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Így $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-\cos t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t & e^{5t} - e^t \\ 0 & \frac{1}{4}(e^{5t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$. A rendszer alapmátrixa

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} e^{t-\cos t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t & e^{5t} - e^t \\ 0 & \frac{1}{4}(e^{5t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t \end{pmatrix}.$$

A Floquet-tétel szerint az alapmátrix előállítható $\underline{\underline{\Phi}}(t) = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{R}}t}$ alakban. A fenti esetben

$$\underline{\underline{Q}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\cos t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ } 2\pi \text{ periodikus mátrix és } e^{\underline{\underline{R}}t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t & e^{5t} - e^t \\ 0 & \frac{1}{4}(e^{5t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^t \end{pmatrix},$$

Így $\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Az $\underline{\underline{R}}$ mátrix sajátértékei 1, 1, 5. A karakterisztikus multiplikátorok az $e^{2\pi \underline{\underline{R}}}$ mátrix sajátértékei, azaz $e^{2\pi}, e^{2\pi}$ és $e^{10\pi}$. A rendszer instabilis. ■

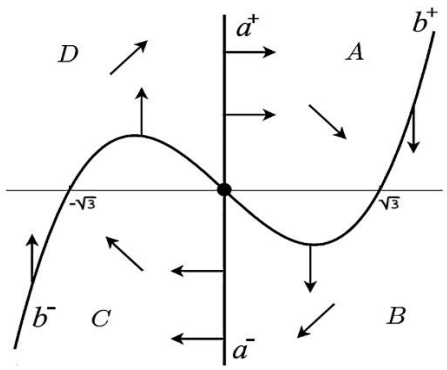
5.49. Megoldás: (Feladat)
I. Tegyük fel, hogy $\underline{x}$ T-szerint periodikus pont. Ekkor $\gamma(\underline{x}) = \underline{\varphi}(\{\underline{x}\} \times [0, T])$. Mivel kompakt halmaz folytonos képe kompakt, ezért a $\gamma(\underline{x})$ pálya kompakt.
II. Megmutatjuk, hogy ha a $\gamma(\underline{x})$ pálya kompakt, akkor az $\underline{x}$ periodikus pont.
Ezt az állítást lemmákra bontjuk.
1. Lemma: Tegyük fel, hogy $\underline{x}$ nem periodikus pont és $\gamma(\underline{x})$ pálya kompakt. Ekkor minden $\underline{x}' \in \gamma(\underline{x})$ esetén létezik $(t_n) \subset \mathbb{R}$, $t_n \to \infty$ sorozat, hogy $\underline{\varphi}(t_n, \underline{x}) \to \underline{x}'$.
1. Lemma bizonyítása: Tekintsük a $\{\underline{\varphi}(n, \underline{x})\}$ $(n \in \mathbb{N})$ korlátos sorozatot. Létezik $\{\underline{\varphi}(n_k, \underline{x})\} \subset \{\underline{\varphi}(n, \underline{x})\}$ konvergens részsorozat, amelyre $\underline{\varphi}(n_k, \underline{x}) \to \underline{x}''$, ha $k \to \infty$. A kompaktság miatt $\underline{x}'' \in \gamma(\underline{x})$. Létezik $t \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{x}' = \underline{\varphi}(t, \underline{x}'')$. $t_k := t + n_k$. $\underline{\varphi}(t_k, \underline{x}) \to \underline{x}'$, ha $k \to \infty$.
2. Lemma: Tegyük fel, hogy $\underline{x}$ nem periodikus pont és $\gamma(\underline{x})$ pálya kompakt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re a $\underline{\varphi}([n, n+1], \underline{x}) = \{\underline{\varphi}(m, \underline{x}) : m \in [n, n+1]\}$ halmaz zárt halmaz és a belseje üres $\gamma(\underline{x})$-ben.
2. Lemma bizonyítása: Az 1. Lemma miatt.
Rátérünk a II. bizonyítására. Világos, hogy $\gamma(\underline{x}) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \underline{\varphi}([n, n+1], \underline{x})$. $\gamma(\underline{x})$ a feltétel szerint kompakt, így mint metrikus tér altere teljes. A fenti egyenlőség, valamint a Lemmák miatt a $\gamma(\underline{x})$ előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Ez a Baire-kategoria-tétel szerint lehetetlen. Az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását. ■

5.50*. Megoldás: (Feladat) Egyszerűbb lesz vizsgálni a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \qquad (*) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

rendszert, ahol $F(x) = \beta(\frac{1}{3}x^3 - x)$.
Ekkor $\ddot{x} = -x - \beta(x^2 - 1)\dot{x}$. A fenti rendszer esetében a nullklínák az $y = F(x)$ és $x = 0$ egyenletek. Ezen görbéken és az általuk határolt síkrészeken meghatározható a vektormező iránya. Jelölje

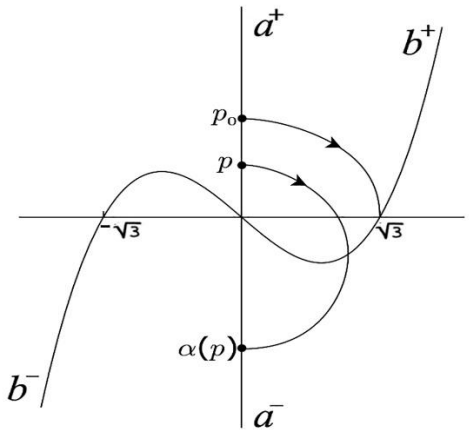
$$\begin{aligned} a^+ &:= \{(x, y) : x = 0, y > 0\} \\ a^- &:= \{(x, y) : x = 0, y < 0\} \\ b^+ &:= \{(x, y) : x > 0, y = \beta(\tfrac{1}{3}x^3 - x)\} \\ b^- &:= \{(x, y) : x < 0, y = \beta(\tfrac{1}{3}x^3 - x)\} \end{aligned}$$



5.50a. Ábra

Az fenti ábrának megfelelően, a pályák negatív körüljárási iránnyal köröznek az egyetlen egyensúlyi helyzet, az origó körül. Világos, hogy az a^+-ról induló minden trajektória belép az A tartományba, és az A tartománybeli trajektóriák bele ütköznek a b^+ görbébe még azelőtt, hogy bármelyik másik görbét metszenék. A trajektóriák ebben a sorrendben metszik az a^+, b^+, a^- és a b^- görbéket,

és közben bejárják az A, B, C és D tartományokat. Az a^+ félegyenes transzverzális, sőt merőleges a rendszer által meghatározott vektormezőre. Tekinthető így az azon értelmezett P Poincaré-leképezés. A P az egész a^+-on értelmezve van, és invertálható is. A P leképezés monoton, így a P iterációjával kapott pontok y koordinátái monoton növekvő vagy csökkenő sorozatot alkotnak.
Tekintsük azt az α: $a^+ \to a^-$ leképezést, amely szerint minden $(0, y)$ a^+-beli elemhez azt az a^--beli elemet rendeljük, amelyik először fordul elő a $(0, y)$-ból induló pályán. Ez is folytonos és invertálható leképezés lesz. Az $(\sqrt{3}, 0)$ pontot tartalmazó pálya $(\sqrt{3}, 0)$ előtti első metszéspontja legyen p_0. (lsd. az 5.50b. ábrát)



5.50b. Ábra

Legyen $W(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Ekkor a W-nek a (*) rendszer szerinti deriváltja $\dot{W}(x, y) = -xF(x)$.
Jelölje $\delta(p) := \frac{1}{2}(\alpha^2(p)_2 - p_2^2)$, ahol a 2-es index a pont második koordinátáját jelöli.
Világos, hogy ekkor $\delta(p) = W(\alpha(p)) - W(p)$.

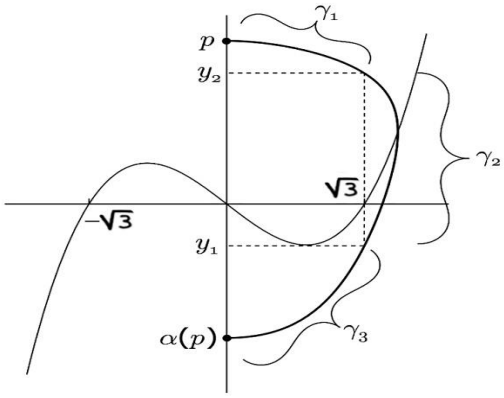
<u>Lemma</u>:

1. Ha $0 < p < p_0$, akkor $\delta(p) > 0$.

2. Ha $p > p_0$, akkor $\lim\limits_{p \to \infty} \delta(p) = -\infty$ monoton csökkenő módon.

<u>Lemma bizonyítása</u>: **1.** → Legyen $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ az α leképezésnél használt trajektória, amely egy $p \in a^+$-beli pontot összeköt egy a^--beli ponttal, tehát $(x(0), y(0)) = p$, $(x(t_1), y(t_1)) \in a^-$ és $x(t) > 0$. $t \in (0, t_1)$. Ekkor $\delta(p) = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} W\big(x(t), y(t)\big) dt = \int_0^{t_1} x^2(t)(\beta(1 - \frac{1}{3}x^2(t))\, dt$.
Mivel $0 < p < p_0$ esetén a pályák irányítása miatt (lsd. 5.50a. Ábra) $x(t) \in (0, \sqrt{3})$. $t \in (0, t_1)$, ezért az integrandusz pozitív, így $\delta(p) > 0$.

2. → Az $x = \sqrt{3}$ egyenessel osszuk három részre a p és $\alpha(p)$ közti pályát. (5.50c. ábra)



5.50c. Ábra.

A $\delta(p)$-t a három részgörbe mentén külön-külön integrálva megkaphatjuk. Legyenek ezek az integrálok rendre $\delta_1(p)$, $\delta_2(p)$ és $\delta_3(p)$.

A $\delta_1(p)$-en $x(t)$ szigorúan növő vagy csökkenő függvény, így a γ_1 görbe függvény. Helyettesítéssel való integrálással ($dt = \frac{dx}{y-\beta(\frac{1}{3}x^3-x)}$) kapjuk, hogy $\delta_1(p) = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} W(x(t), y(t))dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-x(\beta(\frac{1}{3}x^3-x)}{y_p-\beta(\frac{1}{3}x^3-x)} dx$.
A p pontot felfelé mozgatva az y tengelyen, az $y - \beta(\frac{1}{3}x^3 - x)$ növekszik γ_1-en, tehát a $\delta_1(p)$ csökken. Teljesen hasonlóan belátható ez a $\delta_3(p)$-re is. Mivel $y - \beta(\frac{1}{3}x^3 - x) < 0$ a γ_3-on, ezért

$$\delta_3(p) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} W\big(x(t), y(t)\big)dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\left|\beta(\frac{1}{3}x^3-x\right|}{\left|y_p-\beta(\frac{1}{3}x^3-x)\right|} dx.$$

A p pontot felfelé mozgatva az y tengelyen, az $\left|y_p - \beta(\frac{1}{3}x^3 - x)\right|$ növekszik γ_3-en, így a $\delta_3(p)$ csökken. A $\delta_2(p)$-en az $x(t)$ írható fel, mint az $y(t)$ függvénye, ($x = x_p(y)$), így helyettesítéssel való integrálással ($dt = -\frac{dy}{x}$) kapjuk, hogy $\delta_2(p) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} W\big(x(t), y(t)\big)dt = -\int_{y_1}^{y_2} \beta(\frac{1}{3}x_p^3(y) - x_p(y))\, dy$.
A p növekedésével az $[y_1, y_2]$ intervallum is növekszik, $F(x) = \beta\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)$, $x > \sqrt{3}$ esetén monoton nő, az integrál értéke így negatív, és egyre negatívabbá válik, ahogy a p növekszik. A b^+ görbe minden pontján is át kell menjen trajektória, így $\lim_{p\to\infty} \delta(p) = -\infty$ monoton csökkenő módon.
Így a Lemma bizonyítását befejeztük.
Folytatva a feladat megoldását, vegyük észre, hogy a Van der Pol-egyenlet által megadott vektormező az origó körüli 180°-os elforgatásra invariáns, azaz ha $(x(t), y(t))$ megoldás, akkor a $(-x(t), -y(t))$ is megoldás. A Lemma miatt létezik pontosan egy $q_0 \in a^+$pont, amelyre $\delta(q_0) = 0$. Erre a pontra teljesül, hogy $\|\alpha(q_0)\| = \|q_0\|$, azaz $\alpha(q_0) = -q_0 = (x(t_1, q_0), y(t_1, q_0))$.
A szimmetria miatt $\alpha(-q_0) = (x(t_1, -q_0), y(t_1, -q_0) = q_0$. Így $q_0 = (x(2t_1, q_0), y(2t_1, q_0))$ a rendszer *egyetlen* periodikus pályájának egy pontja. A P Poincaré-leképezés az a^+-t az a^+-ra képezi. A a^+-ban van egy természetes rendezés az y koordináta szerint. Ekkor, ha $p \in a^+$ és $p > q_0$, akkor $\alpha(p) < -q_0$, így $P(p) > q_0$. Másrészt tudjuk, hogy $\delta(p) < 0$, tehát $\alpha(p) > -p$ és így $P(p) < p$ lesz. A monotonitás miatt a fentiek miatt $P^n(p)$ monoton csökkenő lesz. Ennek határértéke a P egy fixpontja, amiből csak egy van, a q_0, azaz $p > q_0$ esetén a p-ből induló pálya spirálisan rácsavarodik a q_0 periodikus pont pályájára. Hasonlóképpen igazolható, hogy $0 < p < q_0$ esetén is teljesül ez. ■

<u>5.50. Megjegyzés</u>: Egy kicsit más megvilágításba helyezi a fenti problémát a következő eljárás. (1) Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \varepsilon f_1(x, y) \qquad (*) \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon f_2(x, y) \end{aligned}$$

rendszert. Ha $f_1(x, y) = 0$ és $f_2(x, y) = y(1 - x^2)$, akkor ez a rendszer éppen a Van der Pol-rendszer. $\varepsilon = 0$ esetén a rendszer pályagörbéi az $x^2 + y^2 = C$ alakú görbék. A paraméter szerinti differenciálhatóságról szóló tétel miatt kis $\varepsilon > 0$ esetén véges intervallumon a (*) rendszer pályája ε nagyságrendben tér el az $x(t) = R\cos t$, $y(t) = -R\sin t$ harmonikus rezgőmozgás S pályájától. Így kis $\varepsilon > 0$ esetén a (*) rendszer pályája az R sugarú kör közelében marad. Legyen $\mathrm{V}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
Ekkor $\dot{\mathrm{V}}(x, y) = \varepsilon(xf_1(x, y) + yf_2(x, y))$. A (*) rendszernek egy fordulatra jutó energia változásának kiszámításához integrálni kellene a fenti függvényt a pályagörbe egy fordulata mentén. Ezt persze nem ismerjük, de ez a pálya a fentiek miatt közel van az R sugarú körhöz. Így $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pontossággal ez $\Delta\mathrm{V}(x, y) = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{\mathrm{V}}(R\cos t, -R\sin t)\, dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Jelölje $F(A) = \oint_S f_2(x, y)\underline{i} - f_1(x, y)\underline{j}$.
Következésképpen, $F(R) = \int_0^{2\pi}(-R(\sin t)f_2(R\cos t, -R\sin t) + R(\cos t)f_1(R\cos t, -R\sin t))\, dt$.
Világos, hogy $F(R) = \int_0^{2\pi} \dot{\mathrm{V}}(R\cos t, -R\sin t)\, dt$.
Ha az F függvény pozitív, akkor a $\Delta\mathrm{V}(x, y)$ energiaváltozás kis $\varepsilon > 0$ esetén szintén pozitív. Ekkor a (*) pályái táguló spirális alakzatot írnak le. Ekkor a rezgések erősödnek.
Ha az F függvény negatív, akkor a $\Delta\mathrm{V}(x, y)$ energiaváltozás kis $\varepsilon > 0$ esetén szintén negatív. Ekkor a (*) pályái összehúzodó spirális alakzatot írnak le. Ekkor a rezgések csillapodnak.
Ha az F függvény előjelet vált, akkor van zérushelye, legyen ez R_0. Ekkor $F(R_0) = 0$. Ekkor a $\Delta\mathrm{V}(x, y) = 0$ kis $\varepsilon > 0$ esetén. A $\Delta\mathrm{V}(x, y) = 0$ zárt, R_0 sugarú körhöz közeli görbe a fázissíkban. Le-

gyen ez Γ. Világos, hogy Γ a (*) rendszer határciklusa. Megvizsgálhatjuk az $F'(R_0) = \frac{dF}{dR}_{|R=R_0}$ derivált előjelét azt vizsgálva, hogy a Γ közeli pályák miként viselkednek. A fentiek alapján, ha $F'(R_0) > 0$, akkor a Γ határciklus instabilis, ha $F'(R_0) < 0$, akkor a Γ határciklus stabilis.
A konkrét rendszerre, a Van der Pol-egyenletre rátérve, kiszámítható, hogy

$F(R) = \pi R^2(1 - \frac{R^2}{4})$. Világos, hogy $R = 2$, $F'(R) = \pi(2R - R^3)$, és $F'(2) < 0$.

Így a (*) rendszernek stabilis határciklusa van az $x^2 + y^2 = 4$ kör közelében. ⊡