

Miért érdekes a görög matematika?

Simonovits András

MTA KRTK KTI, BME MI, CEU ED

2016. március

Tartalom

1 Bevezetés

2 Geometria

3 Számelmélet

4 Analízis

5 Matematikai csillagászat

6 Következtetések

Bevezetés

Miért éppen a görög matematika?

- A középiskolások sok olyan matematikai témát tanulnak, amelyeket a *görögök* fedeztek föl, de a diákok nem tudják a történelmi hátteret

Miért éppen a görög matematika?

- A középiskolások sok olyan matematikai témát tanulnak, amelyeket a *görögök* fedeztek föl, de a diákok nem tudják a történelmi hátteret
- Érdekesebb, ha tudjuk, hogyan *született* valami

Miért éppen a görög matematika?

- A középiskolások sok olyan matematikai témát tanulnak, amelyeket a *görögök* fedeztek föl, de a diákok nem tudják a történelmi hátteret
- Érdekesebb, ha tudjuk, hogyan *született* valami
- Bár a görögök sokat tanultak az egyiptomiaktól és a babilóniaktól,

Miért éppen a görög matematika?

- A középiskolások sok olyan matematikai témát tanulnak, amelyeket a *görögök* fedeztek föl, de a diákok nem tudják a történelmi hátteret
- Érdekesebb, ha tudjuk, hogyan *született* valami
- Bár a görögök sokat tanultak az egyiptomiaktól és a babilóniaktól,
- történelmileg a görög matematika az első, amely a mai napig *helytálló* eredményeket bizonyított be szabatosan

Történet

i.e. 6. század: görög városállamok (Athén GR, Milétosz TU, Szirakúza: IT)

i.e. 450: Athén fénykora

i.e. 323: Alekszandrosz és hellenizmus

i.e. 212. Róma elfoglalja Szirakúzákat

Földrajz



Milétosz, Thálész, kb. i.e. 580



Croton, Püthagorász, kb. i.e. 550



Paestum, Élea, Zénon, i.e. 460



Athén, Eudoxosz, i.e. 370



Alexandria, Eukleidész, i.e. 300



Szirakúza, Arkhimédész, i.e. 240



2. Geometria

Geometriáról általában

■ Földmérés tudománya

Geometriáról általában

- Földmérés tudománya
- Az egyiptomiak már ismerték a csonkagúla térfogatát (i.e. 1850)

Geometriáról általában

- Földmérés tudománya
- Az egyiptomiak már ismerték a csonkagúla térfogatát (i.e. 1850)
- A geometria *szemléletes* és mégis szabatos

Eukleidész előtt

- Thálész tétele. (i.e. 580): egy félkör bármelyik pontjából az átmérő derékszög alatt látszik

Eukleidész előtt

- Thálész tétele. (i.e. 580): egy félkör bármelyik pontjából az átmérő derékszög alatt látszik
- Püthagorász tétele (i.e. 550). Ha a, b egy *derékszögű* háromszög befogóinak hossza, c az átfogóé, akkor
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Eukleidész előtt

- Thálész tétele. (i.e. 580): egy félkör bármelyik pontjából az átmérő derékszög alatt látszik
- Püthagorász tétele (i.e. 550). Ha a, b egy *derékszögű* háromszög befogóinak hossza, c az átfogóé, akkor
$$a^2 + b^2 = c^2$$
- Miért fontos?

Eukleidész előtt

- Thálész tétele. (i.e. 580): egy félkör bármelyik pontjából az átmérő derékszög alatt látszik
- Püthagorász tétele (i.e. 550). Ha a, b egy *derékszögű* háromszög befogóinak hossza, c az átfogóé, akkor
$$a^2 + b^2 = c^2$$
- Miért fontos?
- Mert alapvető matematikai igazságot fejez ki: független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete = a szórásnégyzetek összegével

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*
- *Axióma*: alapigazság, pl. két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*
- *Axióma*: alapigazság, pl. két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
- *Alapfogalom*: pont, egyenes, sík, eleme, metszi

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*
- *Axióma*: alapigazság, pl. két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
- *Alapfogalom*: pont, egyenes, sík, eleme, metszi
- Egyik sem vezethető vissza alapabbra

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*
- *Axióma*: alapigazság, pl. két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
- *Alapfogalom*: pont, egyenes, sík, eleme, metszi
- Egyik sem vezethető vissza alapabbra
- *Definíció*: pl. a háromszög A csúcsához tartozó szögfelező egyenes,

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*
- *Axióma*: alapigazság, pl. két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
- *Alapfogalom*: pont, egyenes, sík, eleme, metszi
- Egyik sem vezethető vissza alapabbra
- *Definíció*: pl. a háromszög A csúcsához tartozó szögfelező egyenes,
- **Tétel**. A háromszög 3 szögfelezője 1 pontban metszi egymást

Eukleidész

- Eukleidész (i.e. 300, Alexandria): Elemek
- Nem nagy tudós, de a valaha élt legjobb *tankönyvíró*
- *Axióma*: alapigazság, pl. két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
- *Alapfogalom*: pont, egyenes, sík, eleme, metszi
- Egyik sem vezethető vissza alapabbra
- *Definíció*: pl. a háromszög A csúcsához tartozó szögfelező egyenes,
- **Tétel**. A háromszög 3 szögfelezője 1 pontban metszi egymást
- Meglepő, de logikus!

Párhuzamossági axióma

- Definíció. Két síkbeli egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást

Párhuzamossági axióma

- Definíció. Két síkbeli egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást
- Az V. axióma: Adott egyeneshez adott külső ponthoz *pontosan egy* párhuzamos egyenes húzható

Párhuzamossági axióma

- Definíció. Két síkbeli egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást
- Az V. axióma: Adott egyeneshez adott külső ponthoz *pontosan egy* párhuzamos egyenes húzható
- Eukleidész is tudatában volt annak, hogy ez az axióma más, mint a többi, esetleg tétel

Párhuzamossági axióma

- Definíció. Két síkbeli egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást
- Az V. axióma: Adott egyeneshez adott külső ponthoz *pontosan egy* párhuzamos egyenes húzható
- Eukleidész is tudatában volt annak, hogy ez az axióma más, mint a többi, esetleg tétel
- 15 tételt kimondott nélküle, s csak aztán vezette be

Párhuzamossági axióma

- Definíció. Két síkbeli egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást
- Az V. axióma: Adott egyeneshez adott külső ponthoz *pontosan egy* párhuzamos egyenes húzható
- Eukleidész is tudatában volt annak, hogy ez az axióma más, mint a többi, esetleg tétel
- 15 tételt kimondott nélküle, s csak aztán vezette be
- Bolyai–Lobacsevszkij (1830): *logikailag* létezik olyan geometria, amelyben nem érvényes A5.

Párhuzamossági axióma

- Definíció. Két síkbeli egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást
- Az V. axióma: Adott egyeneshez adott külső ponthoz *pontosan egy* párhuzamos egyenes húzható
- Eukleidész is tudatában volt annak, hogy ez az axióma más, mint a többi, esetleg tétel
- 15 tételt kimondott nélküle, s csak aztán vezette be
- Bolyai–Lobacsevszkij (1830): *logikailag* létezik olyan geometria, amelyben nem érvényes A5.
- Nemcsak logikai játék: Einstein (1915) általános relativitáselmélete

Görög sejtések, modern megoldások

- Hány oldalú szabályos sokszögek *szerkeszthetők meg* euklidészi módon?

Görög sejtések, modern megoldások

- Hány oldalú szabályos sokszögek *szerkeszthetők meg* euklidészi módon?
- például a szabályos háromszög, négyzet, hatszög, és ötszög (aranymetszés)!!

Görög sejtések, modern megoldások

- Hány oldalú szabályos sokszögek *szerkeszthetők meg* euklidészi módon?
- például a szabályos háromszög, négyzet, hatszög, és ötszög (aranymetszés)!!
- Gauss (1795): a szabályos 7-szög nem szerkeszthető meg

Görög sejtések, modern megoldások

- Hány oldalú szabályos sokszögek *szerkeszthetők meg* euklidészi módon?
- például a szabályos háromszög, négyzet, hatszög, és ötszög (aranymetszés)!!
- Gauss (1795): a szabályos 7-szög nem szerkeszthető meg
- Harmadolható-e minden szög?

Görög sejtések, modern megoldások

- Hány oldalú szabályos sokszögek *szerkeszthetők meg* euklidészi módon?
- például a szabályos háromszög, négyzet, hatszög, és ötszög (aranymetszés)!!
- Gauss (1795): a szabályos 7-szög nem szerkeszthető meg
- Harmadolható-e minden szög?
- Például a 90° igen, de a 60° nem (Gauss)

3. Számelmélet

Számelméletről általában

- Gauss: a számelmélet a matematika királynője: szép, de haszontalan

Számelméletről általában

- Gauss: a számelmélet a matematika királynője: szép, de haszontalan
- görög újítás

Számelméletről általában

- Gauss: a számelmélet a matematika királynője: szép, de haszontalan
- görög újítás
- 1970 óta a *titkosírás* alapja:

Számelméletről általában

- Gauss: a számelmélet a matematika királynője: szép, de haszontalan
- görög újítás
- 1970 óta a *titkosírás* alapja:
- p és q egy-egy prímszám, szorzatuk pq egyszerűen kiszámítható

Számelméletről általában

- Gauss: a számelmélet a matematika királynője: szép, de haszontalan
- görög újítás
- 1970 óta a *titkosírás* alapja:
- p és q egy-egy prímszám, szorzatuk pq egyszerűen kiszámítható
- de ha a számok nagyok, pl. 10^{100} , akkor *gyakorlatilag* nem tudjuk tényezőire bontani a szorzatot

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.
- **Tétel** (Eukleidész.) Végtelen sok prímszám van.

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.
- **Tétel** (Eukleidész.) Végtelen sok prímszám van.
- **Bizonyítás.** Indirekt módon.

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.
- **Tétel** (Eukleidész.) Végtelen sok prímszám van.
- **Bizonyítás.** Indirekt módon.
- Tegyük föl, hogy csak véges sok van: $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.
- **Tétel** (Eukleidész.) Végtelen sok prímszám van.
- **Bizonyítás.** Indirekt módon.
- Tegyük föl, hogy csak véges sok van: $p_1, p_2, \dots, p_n$.
- Szorozzuk össze őket és a szorzathoz adjunk 1-et:
$$n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.
- **Tétel** (Eukleidész.) Végtelen sok prímszám van.
- **Bizonyítás.** Indirekt módon.
- Tegyük föl, hogy csak véges sok van: $p_1, p_2, \dots, p_n$.
- Szorozzuk össze őket és a szorzathoz adjunk 1-et:
$$n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$
- n nem osztható $p_1, p_2, \dots, p_n$ egyikével sem, tehát vagy új prím szám, vagy van egy újabb prímosztója

Végtelen sok prímszám van

- Definíció: Egy *prímszám* olyan pozitív egész szám, amelynek nincs valódi osztója.
- **Tétel** (Eukleidész.) Végtelen sok prímszám van.
- **Bizonyítás.** Indirekt módon.
- Tegyük föl, hogy csak véges sok van: $p_1, p_2, \dots, p_n$.
- Szorozzuk össze őket és a szorzathoz adjunk 1-et:
$$n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$
- n nem osztható $p_1, p_2, \dots, p_n$ egyikével sem, tehát vagy új prím szám, vagy van egy újabb prímosztója
- Példa: $2 \cdot 3 + 1 = 7$, prím, de az 5 kimarad

Hány ikerprímszám van?

- Definíció. Két prímszám *ikerprímszám*, ha különbségük 2

Hány ikerprímszám van?

- Definíció. Két prímszám *ikerprímszám*, ha különbségük 2
- Példa: 3 és 5, 5 és 7, 11 és 13 stb

Hány ikerprímszám van?

- Definíció. Két prímszám *ikerprímszám*, ha különbségük 2
- Példa: 3 és 5, 5 és 7, 11 és 13 stb
- Van-e *végtelen sok* ikerprímszám? Nem tudjuk

Hány ikerprímszám van?

- Definíció. Két prímszám *ikerprímszám*, ha különbségük 2
- Példa: 3 és 5, 5 és 7, 11 és 13 stb
- Van-e *végtelen sok* ikerprímszám? Nem tudjuk
- Legújabb eredmény: végtelen sok olyan (nem feltétlen iker) prímpár létezik, amelynek különbsége kisebb, mint 600.

Hány ikerprímszám van?

- Definíció. Két prímszám *ikerprímszám*, ha különbségük 2
- Példa: 3 és 5, 5 és 7, 11 és 13 stb
- Van-e *végtelen sok* ikerprímszám? Nem tudjuk
- Legújabb eredmény: végtelen sok olyan (nem feltétlen iker) prímpár létezik, amelynek különbsége kisebb, mint 600.
- Következmény: végtelen sok olyan prímpár létezik, amelynek különbsége egy adott páros szám, amelyik kisebb, mint 600 (pl. 2, 4,..., 598)

Vannak irracionális számok

- **Definíció.** Egy pozitív szám *racionalis*, ha felírható két pozitív szám hányadosaként (ratio $\neq$ értelem, hanem viszony), *irracionális* egyébként.

Vannak irracionális számok

- **Definíció.** Egy pozitív szám *racionalis*, ha felírható két pozitív szám hányadosaként (ratio= $\neq$ értelem, hanem viszony), *irracionális* egyébként.
- **Tétel.** $\sqrt{2}$ irracionális.

Vannak irracionális számok

- **Definíció.** Egy pozitív szám *racionalis*, ha felírható két pozitív szám hányadosaként (ratio= $\neq$ értelem, hanem viszony), *irracionális* egyébként.
- **Tétel.** $\sqrt{2}$ irracionális.
- **Bizonyítás.** Indirekt. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, (p, q) \neq 1$

Pitágorászi számhármások

- Derékszögű háromszögek hossza a, b, c : Pitágorász-tétel:
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pitágorászi számhármasok

- Derékszögű háromszögek hossza a, b, c : Pitágorász-tétel:
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
- Lehet-e a, b, c mind természetes szám? Például $(1, 1, \sqrt{2})$ nem ilyen

Pitágorászi számhármasok

- Derékszögű háromszögek hossza a, b, c : Pitágorász-tétel:
 $a^2 + b^2 = c^2$.
- Lehet-e a, b, c mind természetes szám? Például $(1, 1, \sqrt{2})$ nem ilyen
- Példa: $3^2 + 4^2 = 5^2$

Pitágorászi számhármaskok

- Derékszögű háromszögek hossza a, b, c : Pitágorász-tétel:
 $a^2 + b^2 = c^2$.
- Lehet-e a, b, c mind természetes szám? Például $(1, 1, \sqrt{2})$ nem ilyen
- Példa: $3^2 + 4^2 = 5^2$
- Mások? Például: triviális: $(6, 8, 10)$.

Pitágorászi számhármaskok

- Derékszögű háromszögek hossza a, b, c : Pitágorász-tétel:
 $a^2 + b^2 = c^2$.
- Lehet-e a, b, c mind természetes szám? Például $(1, 1, \sqrt{2})$ nem ilyen
- Példa: $3^2 + 4^2 = 5^2$
- Mások? Például: triviális: $(6, 8, 10)$.
- Mások? Tegyük föl, hogy $(a, b) = 1$: nincs közös osztójuk (primitív). Például $5^2 + 12^2 = 13^2$

folytatás

- Tétel. Ha (a, b, c) primitív pitágorászi számhármas, akkor felírható a következő alakban:

folytatás

- Tétel. Ha (a, b, c) primitív pitágorászi számhármas, akkor felírható a következő alakban:
- $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, ahol $m > n$ természetes szám, különböző paritásúak, és $(m, n) = 1$

folytatás

- Tétel. Ha (a, b, c) primitív pitágorászi számhármas, akkor felírható a következő alakban:
- $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, ahol $m > n$ természetes szám, különböző paritásúak, és $(m, n) = 1$
- Bizonyítás: Elégséges: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

folytatás

- Tétel. Ha (a, b, c) primitív pitágorászi számhármass, akkor felírható a következő alakban:
- $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, ahol $m > n$ természetes szám, különböző paritásúak, és $(m, n) = 1$
- Bizonyítás: Elégséges: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$
- Szükséges: $a^2 + b^2 = c^2$ -t átrendezve:
 $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$

folytatás

- Tétel. Ha (a, b, c) primitív pitágorászi számhármass, akkor felírható a következő alakban:
- $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, ahol $m > n$ természetes szám, különböző paritásúak, és $(m, n) = 1$
- Bizonyítás: Elégséges: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$
- Szükséges: $a^2 + b^2 = c^2$ -t átrendezve:
 $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$
- a^2 mindkét tényezője négyzetszám:

$$n^2 = c - b, \quad m^2 = c + b$$

stb.

Kitérő: Fermat-sejtés, 1636

■ **Fermat-sejtés:** $x^n + y^n \neq z^n$, ha $n > 2$

Kitérő: Fermat-sejtés, 1636

- **Fermat-sejtés:** $x^n + y^n \neq z^n$, ha $n > 2$
- **Fermat tétele:** $x^4 + y^4 \neq z^4$.

Kitérő: Fermat-sejtés, 1636

- **Fermat-sejtés:** $x^n + y^n \neq z^n$, ha $n > 2$
- **Fermat tétele:** $x^4 + y^4 \neq z^4$.
- **Wiles tétele (1994):** Fermat sejtése igaz

Kitérő: Fermat-sejtés, 1636

- **Fermat-sejtés:** $x^n + y^n \neq z^n$, ha $n > 2$
- **Fermat tétele:** $x^4 + y^4 \neq z^4$.
- **Wiles tétele** (1994): Fermat sejtése igaz
- Önmagában teljesen „haszontalan” kérdés, de óriási lökést adott a matematika fejlődésének

4. Analízis

Hosszúság, terület, térfogat, érintő

■ hosszúság, terület- és térfogatmérés

Hosszúság, terület, térfogat, érintő

- hosszúság, terület- és térfogatomérés
- Sima görbék érintőjének meredeksége (parabolatükör tökéletesen fókuszálja a párhuzamos sugarakat)

Hosszúság, terület, térfogat, érintő

- hosszúság, terület- és térfogatomérés
- Sima görbék érintőjének meredeksége (parabolatükör tökéletesen fókuszálja a párhuzamos sugarakat)
- A görögöknél fényűzés volt, de a modern tudomány és technika alapja

Zénó paradoxonai

- Zénon (i.e. 460, Élea): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

Zénó paradoxonai

- Zénon (i.e. 460, Élea): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

- Paradoxon: ellentmondásnak látszó helyes állítás

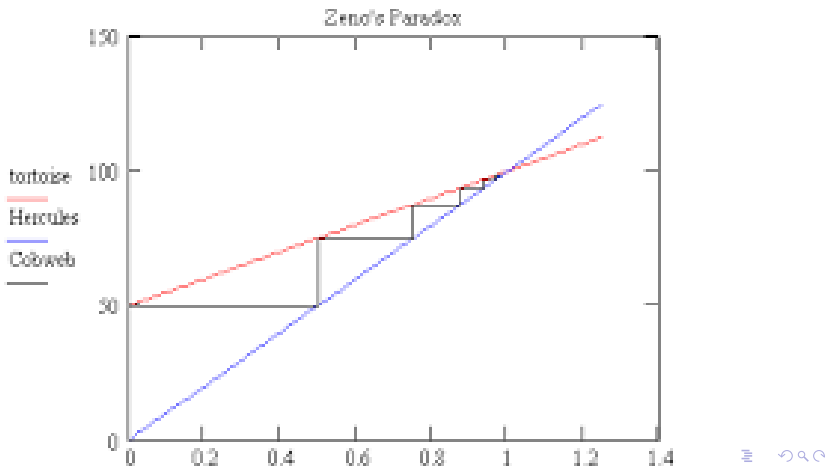
Zénó paradoxonai

- Zénon (i.e. 460, Élea): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

- Paradoxon: ellentmondásnak látszó helyes állítás
- Racionális magva: létezik végtelen sok pozitív szám, amelyek összege véges, itt 1

Akhilleusz és a teknősbéka



Kitérő: Pláton filozófiája

- Pláton (i.e. körül 370): filozófus, akadémia (liget neve): a filozófiához ismerned kell a geometriát!

Kitérő: Pláton filozófiája

- Pláton (i.e. körül 370): filozófus, akadémia (liget neve): a filozófiához ismerned kell a geometriát!
- Plutarkhosz (i.sz. 100): Párhuzamos életrajzok, Marcellus tábornok Szirakúzákat ostromolja, Arkhimédész halála:

Kitérő: Pláton filozófiája

- Pláton (i.e. körül 370): filozófus, akadémia (liget neve): a filozófiához ismerned kell a geometriát!
- Plutarkhosz (i.sz. 100): Párhuzamos életrajzok, Marcellus tábornok Szirakúzáét ostromolja, Arkhimédesz halála:
- Tökéletes leírás: a matematika nem valódi tárgyakkal, hanem azok égi másával foglalkozik

Kitérő: Pláton filozófiája

- Pláton (i.e. körül 370): filozófus, akadémia (liget neve): a filozófiához ismerned kell a geometriát!
- Plutarkhosz (i.sz. 100): Párhuzamos életrajzok, Marcellus tábornok Szirakúzáét ostromolja, Arkhimédesz halála:
- Tökéletes leírás: a matematika nem valódi tárgyakkal, hanem azok égi másával foglalkozik
- „Platón felháborodott [Eudoxosz mechanikai játékain], és szemrehányást tett neki, hogy ... elrontja azt, ami jó van a geometriában azáltal, hogy az emberek figyelmét a testetlen és elvont tárgyakról az érzékelhető világra fordítja.”

Eudoxosz

- Eudoxosz (i.e. 370, Athén): a kör kerülete = a körbe be- és köréírt sokszögek területének közös határértéke, amint az oldalak hossza tart 0-hoz:

Eudoxosz

- Eudoxosz (i.e. 370, Athén): a kör kerülete = a körbe be- és köréírt sokszögek kerületének közös határértéke, amint az oldalak hossza tart 0-hoz:
- Tétel: $P = \pi d$, ahol $\pi \approx 3$, $\pi > 3$

Arkhimédész, az ókor legnagyobb tudósa

- Arkhimédész (i.e. 287– i.e. 212, Szirakúza)

Arkhimédész, az ókor legnagyobb tudósa

- Arkhimédész (i.e. 287– i.e. 212, Szirakúza)
- legendák: szórakozott professzor a fürdőből ruhátlanul hazaszalad

Arkhimédész, az ókor legnagyobb tudósa

- Arkhimédész (i.e. 287– i.e. 212, Szirakúza)
- legendák: szórakozott professzor a fürdőből ruhátlanul hazaszalad
- praktikus mérnök, aki csigákkal partra vontatja az ostromló római hajókat

Gyújtótükör



Arkhimédész és a π

Legyen a_n és A_n az egység átmérőjű körbe- és köré írt n -oldalú szabályos sokszög oldalhossza. Végrehajtja Eudoxosz programját, *fokozatos megközelítéssel* az oldalhosszak közti rekurzióval,

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - a_n^2})}}, \quad A_{2n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + 1} + 1}$$

kiszámítja az egység átmérőjű körbe- és köré írt 96-oldalú szabályos sokszög területét:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Arkhimédész és a π , folytatás

Oldalszám	Beírt kerület	Köréírt kerület
6	3,00	3,46
12	3,11	3,21
24	3,13	3,16
48	3,140	3,146
96	3,141	3,143

Arkhimédész egyéb felfedezései

■ Gömb térfogata $= 4R^3\pi/3$

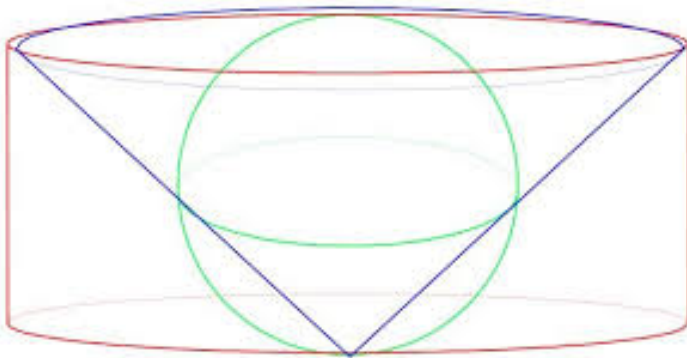
Arkhimédész egyéb felfedezései

- Gömb térfogata $= 4R^3\pi/3$
- Térfogat-bizonyítás: Félgömb = henger – Kúp (tölcsér)

Arkhimédész egyéb felfedezései

- Gömb térfogata $= 4R^3\pi/3$
- Térfogat-bizonyítás: Félgömb = henger – Kúp (tölcsér)
- A $[0, 1]$ szakaszon a parabola alatti terület $= 1/3$
Bizonyítás: 4 db

Arkhimédész síremléke



5. Matematikai csillagászat

Föld–Hold–Nap távolsága

- Arisztarkhosz (i.e. 290, Szamosz)

Föld–Hold–Nap távolsága

- Arisztarkhosz (i.e. 290, Szamosz)
- Félhold idején a FHN-szög derékszög

Föld–Hold–Nap távolsága

- Arisztarkhosz (i.e. 290, Szamosz)
- Félhold idején a FHN-szög derékszög
- $\overline{FH}/\overline{FN} = \cos \alpha$

Föld–Hold–Nap távolsága

- Arisztarkhosz (i.e. 290, Szamosz)
- Félhold idején a FHN-szög derékszög
- $\overline{FH}/\overline{FN} = \cos \alpha$
- Szabad szemmel $\alpha = 87^\circ$, tehát $\overline{FN} = 20\overline{FH}$

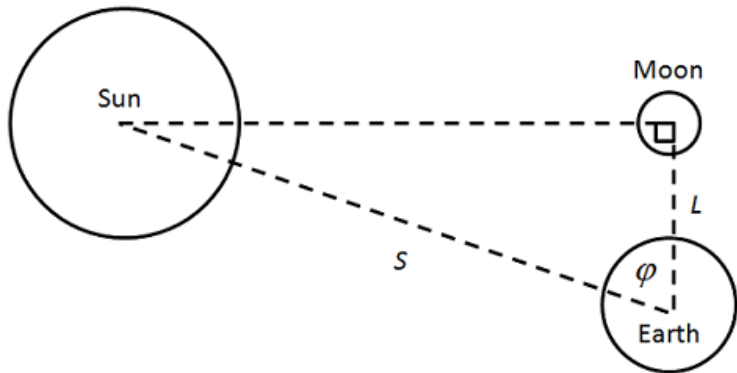
Föld–Hold–Nap távolsága

- Arisztarkhosz (i.e. 290, Szamosz)
- Félhold idején a FHN-szög derékszög
- $\overline{FH}/\overline{FN} = \cos \alpha$
- Szabad szemmel $\alpha = 87^\circ$, tehát $\overline{FN} = 20\overline{FH}$
- valójában $\alpha = 1/2^\circ$, tehát $\overline{FN} = 400\overline{FH}$

Föld–Hold–Nap távolsága

- Arisztarkhosz (i.e. 290, Szamosz)
- Félhold idején a FHN-szög derékszög
- $\overline{FH}/\overline{FN} = \cos \alpha$
- Szabad szemmel $\alpha = 87^\circ$, tehát $\overline{FN} = 20\overline{FH}$
- valójában $\alpha = 1/2^\circ$, tehát $\overline{FN} = 400\overline{FH}$
- A Nap sokkal nagyobb, mint a Hold $\Rightarrow$ Nap a központ, a Föld is bolygó (Kopernikusz, 1543)

Arisztarkhosz



Föld mérete

- Eratoszthenész (i.e. 240, Alexandria)

Föld mérete

- Eratoszthenész (i.e. 240, Alexandria)
- A nyári napforduló idején a napsugár merőlegesen esik be az asszuáni kútba, Alexandriában viszont α szöggel

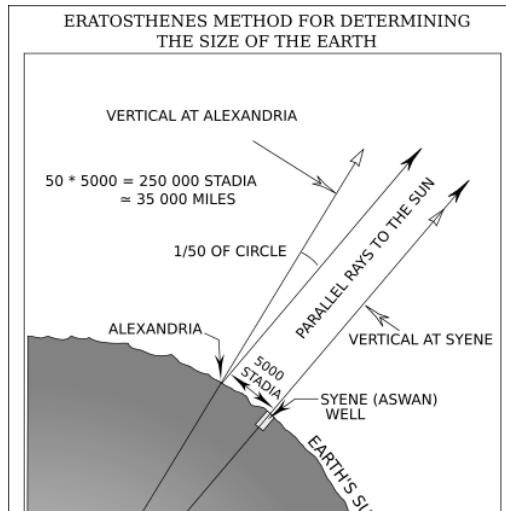
Föld mérete

- Eratoszthenész (i.e. 240, Alexandria)
- A nyári napforduló idején a napsugár merőlegesen esik be az asszuáni kútba, Alexandriában viszont α szöggel
- Ha egy délkörön fekszik a két hely, akkor $i = R\alpha$, $R \approx 40$ ezer km

Föld mérete

- Eratoszthenész (i.e. 240, Alexandria)
- A nyári napforduló idején a napsugár merőlegesen esik be az asszuáni kútba, Alexandriában viszont α szöggel
- Ha egy délkörön fekszik a két hely, akkor $i = R\alpha$, $R \approx 40$ ezer km
- Eratoszthenész sztadionban számolt, és többféle sztadion volt, akárcsak a brit és az amerikai gallon

Eratoszthenesz



6. Következtetések

Időrendi névsor

Thálesz (i.e. 580)

Püthagorász (i.e. 550)

Eudoxosz (i.e. 370)

Eukleidész (i.e. 300)

Arkhimédész (i.e. 240)

Következtetések

- Miért éppen a görögök? Városállamok versengése, szabad szellem

Következtetések

- Miért éppen a görögök? Városállamok versengése, szabad szellem
- Miért állt le a fejlődés? Elérte a maximumot, (leragadtak a paradoxonoknál, nem volt jó számírásuk, széteső társadalom)

Következtetések

- Miért éppen a görögök? Városállamok versengése, szabad szellem
- Miért állt le a fejlődés? Elérte a maximumot, (leragadtak a paradoxonoknál, nem volt jó számírásuk, széteső társadalom)
- A görög matematika feltámadása: újkor, pl. az analitikus geometria (Descartes, Fermat, 1630)

Következtetések

- Miért éppen a görögök? Városállamok versengése, szabad szellem
- Miért állt le a fejlődés? Elérte a maximumot, (leragadtak a paradoxonoknál, nem volt jó számírásuk, széteső társadalom)
- A görög matematika feltámadása: újkor, pl. az analitikus geometria (Descartes, Fermat, 1630)
- kalkulus (Newton és Leibniz, 1670-től)

Irodalom I

-  Szabó Árpád (1980): A görög matematika kibontakozása.
-  Simonyi Károly (1980): A fizika kultúrtörténete.
-  Simonovits András (2009): Válogatott fejezetek a matematika történetéből.